

Ναυσικά

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΙΛΟΤΙΚΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ
ΠΟΛΥΜΕΣΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΠΡΩΤΕΑΣ

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Παραδοτέο Π10

Εγχειρίδιο Καθηγητή



Ελληνικά
Σχολεία
στην
Κοινωνία
της
Πληροφορίας

Φορέας Υλοποίησης

Ινστιτούτο

Τεχνολογίας

Υπολογιστών

Ανάδοχοι

- KeyStone
- Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Παιδαγωγικής, Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Μαθηματικών (ΠΙΦΜ)

Φορείς της Ενέργειας



ΠΡΩΤΕΑΣ
ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Παραδοτέο: ΒΙΒΛΙΟ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΡΩΤΕΑ
Συμβατική Ημερομηνία Παράδοσης: 5-6-2000
Ημερομηνία Παράδοσης: 22-4-2002
Έκδοση: 1.5

Περίληψη

Το βιβλίο του Καθηγητή συνοδεύει το αντίστοιχο λογισμικό. Περιέχει εκτός της ύλης για κάθε διδακτική ώρα, και σχόλια διδακτικού χαρακτήρα, που στόχο έχουν να διευκολύνουν τη διδασκαλία και κυρίως τη χρήση και το συντονισμό με το λογισμικό. Οι διδακτικές ώρες συγκροτούνται σε ενότητες.

Συντάκτες:

- **Κώστας Δρόσος**, Τομέας ΠΙΦΜ, Τμήμα Μαθηματικών,
Παν/μιο Πατρών.
- **Ευτύχης Παπαδοπετράκης** Τομέας ΠΙΦΜ, Τμήμα Μαθηματικών,
Παν/μιο Πατρών.
- **Πέτρος Σκαλτσάς** Τομέας ΠΙΦΜ, Τμήμα Μαθηματικών,
Παν/μιο Πατρών.
- **Θέκλη Βιτωράτου**, Συνταξιούχος Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης.
- **Διον. Ροδίτης**, Καθηγητής Μέσης Εκπαίδευσης.
- **Αγγ. Τομαρά**, Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	6
2. Παιδαγωγική προσέγγιση.....	6
2.1 Βασικές παιδαγωγικές αρχές.....	6
2.2 Γενική περιγραφή των διδακτικών στόχων του λογισμικού.....	10
2.3 Ο Η/Υ στην εκπαιδευτική διαδικασία.....	10
2.4 Χρονισμός με το αναλυτικό πρόγραμμα.....	12
3. Αναλυτική περιγραφή των σεναρίων.....	13
3.1 Σενάριο 1 ^{ης} Ενότητας.....	13
3.1.1 Περιγραφή.....	13
3.1.2 Διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι:.....	13
3.1.3 Διδακτικά μέσα και τρόποι επίτευξης των στόχων:.....	13
3.1.4 Ασκήσεις για το σπίτι.....	14
3.1.5 Φύλλο Εργασίας.....	14
3.1.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή.....	15
3.2 Σενάριο 2ης ενότητας.....	28
3.2.1 Περιγραφή.....	28
3.2.2 Διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι:.....	28
3.2.3 Διδακτικά μέσα και τρόποι επίτευξης των στόχων:.....	28
3.2.4 Ερωτήσεις.....	29
3.2.5 Ασκήσεις (συνδυασμοί με τα άλλα κεφάλαια του Γυμνασίου).....	29
3.2.6 Φύλλο Εργασίας.....	30
3.2.7 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή.....	31
3.3 Σενάριο 3ης ενότητας.....	38
3.3.1 Περιγραφή.....	38
3.3.2 Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι:.....	38
3.3.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων:.....	38
3.3.4 Ασκήσεις για το σπίτι.....	39
3.3.5 Φύλλο Εργασίας.....	42
3.3.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή.....	43
3.4 Σενάριο 4ης Ενότητας.....	52
3.4.1 Περιγραφή.....	52
3.4.2 Διδακτικός & μαθησιακός στόχος.....	52
3.4.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης του στόχου.....	52
3.4.4 Ασκήσεις.....	53
3.4.5 Φύλλο Εργασίας.....	59
3.4.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή.....	61
3.5 Σενάριο 5ης Ενότητας.....	75

3.5.1	Περιγραφή	75
3.5.2	Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι	75
3.5.3	Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων	75
3.5.4	Ασκήσεις	76
3.5.5	Φύλλο Εργασίας	77
3.5.6	Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή	78
3.6	Σενάριο 6ης Ενότητας	88
3.6.1	Περιγραφή	88
3.6.2	Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι	88
3.6.3	Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων	88
3.6.4	Ασκήσεις	88
3.6.5	Φύλλο Εργασίας	94
3.6.6	Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή	95
3.7	Σενάριο 7ης Ενότητας	114
3.7.1	Περιγραφή	114
3.7.2	Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι	114
3.7.3	Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης του στόχου	114
3.7.4	Ασκήσεις για το σπίτι	115
3.7.5	Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή	117
3.8	Σενάριο 8ης Ενότητας	130
3.8.1	Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι	130
3.8.2	Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων	130
3.8.3	Ασκήσεις	130
3.8.4	Φύλλο Εργασίας	132
3.8.5	Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή	134
4.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ	140
5.	Ιστοσελίδες σχετικές με την Πιθανότητα	142

1. Εισαγωγή.

Οι ενότητες που αποτελούν το βασικό κορμό του λογισμικού, καθώς επίσης και οι έννοιες που αποτελούν το διδακτικό στόχο για κάθε διδακτική ενότητα, είναι κατά σειρά:

- **Διδακτική ενότητα 1:** Τυχαίο πείραμα (ανάρριψη νομίσματος, ρίψη ζαριού, ρουλέτα, ρωμαϊκή κρήνη, κτλ.), δυνατά αποτελέσματα, δειγματικός χώρος, ενδεχόμενο και στοιχειώδης λογισμός των ενδεχομένων, δένδροδιαγράμματα.
- **Διδακτική ενότητα 2:** Πιθανότητα, σχετική συχνότητα, το πείραμα της βροχής, πιθανότητα και εμβαδόν, πιθανότητα και μάζα, ρωμαϊκή κρήνη. Ιδιότητες της πιθανότητας, (βγαλμένες με εμπειρικό τρόπο μέσα από τα σχετικά πειράματα). Επίλυση προβλημάτων.
- **Διδακτική ενότητα 3:** Δεσμευμένη πιθανότητα, δένδροδιαγράμματα, ανεξαρτησία. Επίλυση προβλημάτων.
- **Διδακτική ενότητα 4:** Τυχαίες μεταβλητές, κατανομή της τυχαίας μεταβλητής, χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών. Επίλυση προβλημάτων.
- **Διδακτική ενότητα 5:** Μαθηματική ελπίδα, διασπορά, Επίλυση προβλημάτων.
- **Διδακτική ενότητα 6:** Διωνυμική κατανομή, τρίγωνο του Pascal, Ρωμαϊκή κρήνη, ο πίνακας του Galton και άλλα σχετικά εποπτικά μέσα για την Διωνυμική κατανομή. Επίλυση προβλημάτων.
- **Διδακτική ενότητα 7:** Περιγραφική στατιστική, παρουσίαση δεδομένων, στατιστική σκέψη και γραφικοί τρόποι παρουσίασης στατιστικών δεδομένων.
- **Διδακτική ενότητα 8:** Δειγματικός μέσος και δειγματική διασπορά. Αθροιστική συχνότητα.

2. Παιδαγωγική προσέγγιση

2.1 Βασικές παιδαγωγικές αρχές

Εκθέτουμε στη συνέχεια τους συγκεκριμένους παιδαγωγικούς στόχους του προτεινόμενου λογισμικού αλλά και της συγκεκριμένης εφαρμογής του στις Πιθανότητες και τη Στατιστική. Οι αναφορές μας σε φάσεις καθόλου δεν σημαίνουν ουσιαστικό διαχωρισμό του έργου σε τμήματα, αλλά στιγμές μιας συνεχούς και με ενιαία λογική παιδαγωγικής διαδικασίας:

- Ανάπτυξη φαντασίας και κριτικής σκέψης.** Η ανάπτυξη κριτικής σκέψης, δημιουργικότητας, ευρηματικότητας και φαντασίας του μαθητή, μέσα από διερευνητικού-ενεργητικού χαρακτήρα ολοκληρωμένα μαθησιακά σενάρια και οπτικοποιημένες έννοιες, που θα εμπλέκουν σύγχρονες τεχνολογίες πολυμέσων, αποτελεί έναν από τους βασικότερους στόχους
- Ανάπτυξη Ουσιαστικής και υπολογιστικής γνώσης.** Η ενίσχυση και ανάπτυξη της συνθετικής, κατανοήσιμης μαθηματικής γνώσης, που προωθείται μέσα από τις γνωστικές διαδικασίες και των δύο ημισφαιρίων του εγκεφάλου. Η ανάπτυξη αυτή βασίζεται από το ένα μέρος στην ενεργητική γνώση, μέσα από οπτικοποιημένα, φυσικού τύπου παραδείγματα. Από το άλλο μέρος η εννοιολογική αυτή γνώση που θα είναι αντικείμενο του πρώτου μαθησιακού επιπέδου, θα ακολουθείται και θα συντίθεται διαλεκτικά με μια υπολογιστικού χαρακτήρα γνώση, μέσα από υπολογισμούς εμπέδωσης της έννοιας.

Ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία είναι ο στόχος της “μαθηματοποίησης” των εννοιών και των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί με διαισθητικό τρόπο. Η σταδιακή εισαγωγή μαθηματικού συμβολισμού και της κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας, πρέπει να είναι βασικός στόχος. Ωστόσο σ’ αυτό το αρχικό στάδιο θεωρείται σκόπιμο να μην υπάρχει άμεσος διαχωρισμός των εμπειρικών φαινομένων από τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Ο διαχωρισμός

αυτός θα γίνεται με έμμεσο τρόπο, με στόχο σε κάποιο μελλοντικό στάδιο, ο διαχωρισμός να γίνει με φυσιολογικό τρόπο. Έτσι ο μαθητής μαθαίνει να χρησιμοποιεί με διαλεκτικό τρόπο, τους δύο τύπους γνώσης, της εννοιολογικής και της συμβολικής-υπολογιστικής, όπως εξάλλου διαλεκτική είναι και η φύση της αλληλεπίδρασης των δύο ημισφαιρίων του εγκεφάλου που ειδικεύονται στους αντίστοιχους τύπους γνώσης. Αυτή η φάση θα περιλαμβάνει κυρίως εξατομικευμένη μάθηση.

- (iii) **Ομαδική μάθηση.** Η διερευνητική, ομαδική και ενεργητική μάθηση, μπορεί να αναπτυχθεί, σε μια δεύτερη φάση της μαθησιακής διαδικασίας, όπου οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες, ο δε στόχος είναι η ανάπτυξη και προώθηση της ομαδικής διερευνητικής μεθόδου μάθησης. Προτείνονται επίσης αρκετά projects ώστε οι μαθητές να συνηθίζουν στην αυτόνομη και υπεύθυνη ομαδική εργασία, δημιουργώντας έτσι περιβάλλον συνεργατικότητας και σεβασμού των ιδιαιτεροτήτων των άλλων. Τελικός στόχος όλων αυτών είναι η *ανάπτυξη μιας ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών προς τα Μαθηματικά.*

Η ομαδική γνώση διευκολύνεται μέσα από ζωντανές συζητήσεις στην τάξη αλλά και μέσω δικτύου τοπικού και διαδικτύου (Internet). Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές, χωρίς την έντονη παρουσία της αυθεντίας του καθηγητή, να εργάζονται ως αυτόνομες ομάδες που υπόκεινται σε κριτική και τελική αποτίμηση. Μέσα από πράξη, πειραματισμό και συζητήσεις, οι μαθητές οδηγούνται φυσιολογικά στη διατύπωση και έλεγχο θεωρητικών εικασιών γύρω από τα μαθηματικά αντικείμενα και δίνονται παραδείγματα όπου η διαίσθηση χρειάζεται να ενισχύεται από λιγότερο ή περισσότερο αυστηρές αποδείξεις, και που θα αναπτυχθούν κυρίως σε επόμενες τάξεις.

- (iv) **Επίλυση προβλημάτων.** Σε μια τρίτη φάση της μαθησιακής διαδικασίας, επικεντρώνεται η προσοχή στην παραπέρα ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Είναι γνωστό ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων είναι καταρχήν μία μη αναλυτικο-λογική ικανότητα του ανθρώπου, που σχετίζεται εξαιρετικά με τις ικανότητες του δεξιού ημισφαιρίου του εγκεφάλου, για πρόσληψη της (ολικής) δομής των αντικειμένων. Έρευνα που σχετίζεται με τα θέματα αυτά, διεξάγεται από το υπεύθυνο του έργου και τους συνεργάτες του. Όπου είναι δυνατόν, λύνονται τα προβλήματα με τη χρήση “φυσικών και νοητικών” μοντέλων, π.χ. η Ρωμαϊκή κρίση, σε σχέση με τη διωνυμική κατανομή, και στη συνέχεια, μεταφέρεται το πρόβλημα σε περισσότερο ή λιγότερο αναλυτικό πλαίσιο, που εξαρτάται από το επίπεδο του μαθητή. Οι κατηγορίες των προβλημάτων με τις υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις δίδονται σε μορφή οπτικοποιημένων διαφανειών, που θα μπορούν να τυπωθούν, και για την εξυπηρέτηση του καθηγητή αλλά και του μαθητή.

Στο λογισμικό έχουν προβλεφθεί όλοι οι τύποι προβλημάτων: **Ασκήσεις αναγνώρισης εννοιών και μεθόδων, ασκήσεις εμπέδωσης (drill exercises), αλγοριθμικές ασκήσεις**, που με βάση κάποια συγκεκριμένη συνταγή υπολογίζονται διάφορα πράγματα, **προβλήματα εφαρμογών, προβλήματα ανοικτού-διερευνητικού τύπου, προβλήματα πραγματικών καταστάσεων κτλ.**

- (v) **Ενίσχυση της αυτοπεποίθησης του μαθητή.** Μέσα από την ενεργητική αλληλεπίδραση του μαθητή με τον υπολογιστή (ως “μαθηματικό εργαστήριο”) αλλά και με τον καθηγητή, καθώς και όλων των χαρακτηριστικών που αναπτύχθηκαν παραπάνω, τα μαθηματικά μετατρέπονται σε “επιστήμη”. Βασίζονται δηλαδή στο πείραμα και την παρατήρηση. Ο μαθητής ακόμα, μπορεί να παρατηρεί τα οπτικοποιημένα μαθηματικά αντικείμενα, να αναπτύσσει με φυσιολογικό τρόπο τις δεξιότητές του και τη διερευνητική του διάθεση. Αποτέλεσμα των προαναφερθέντων είναι η απαλλαγή του μαθητή από τη νοοτροπία της απλής απομνημόνευσης, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις δεν συνεπάγεται την κατανόηση, η ανάπτυξη αυτοπεποίθησης για τις ικανότητές του και η υποβάθμιση πολλών από εκείνους τους παράγοντες που προξενούν τη φοβία (έμμεσες ή άμεσες αποδοκιμασίες του περιβάλλοντος, συστολή κτλ.).

- (vi) **Διαθεματική προσέγγιση και μέθοδος project.** Τα αντικείμενα των πιθανοτήτων και της Στατιστικής, προσφέρονται ιδιαίτερα σε “ολική διδασκαλία” και διαθεματική προσέγγιση, που θα συνδέει με φυσιολογικό τρόπο, θεωρία, εφαρμογές, και συνθετική γνώση. Ο διαθεματικός χαρακτήρας του λογισμικού, προωθείται σε όλα

τα πιο πάνω στάδια, με ιστορικές αναφορές, projects, προβλήματα και ασκήσεις, από επιστημονικές περιοχές που άπτονται της συγκεκριμένης ενότητας, κτλ. Η μέθοδος project στην Πιθανοθεωρία και τη στατιστική, περιγράφεται και συζητείται σε έκταση από τον Holmes (1980).

- (vii) **Καλλιέργεια του γλωσσικού αισθητηρίου.** Είναι γνωστό ότι η καλλιέργεια της γλώσσας περνά μέσα από όλα τα μαθήματα. Στο μάθημα των Μαθηματικών το ζήτημα της γλώσσας έχει μια ιδιαίτερη σημασία για δύο κυρίως λόγους: πρώτο, γιατί μαζί με τα μαθηματικά ο μαθητής πρέπει να μαθαίνει (όπως έχουμε αναφέρει και στο 2) και την κατάλληλη γλώσσα, τη **Μαθηματική Γλώσσα**, που αποτελεί τη γλώσσα έκφρασης, επικοινωνίας και διαλογισμού για τα μαθηματικά και δεύτερο γιατί η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης είναι αλληλένδετη, προϋποθέτει αλλά και συνεπάγεται, τη καλλιέργεια της γλώσσας.

Έτσι στο προτεινόμενο λογισμικό θα δίνεται ιδιαίτερη σημασία στο θέμα της γλώσσας, σε ό,τι αφορά: την αρτιότητα του λόγου, γραπτού ή προφορικού, τη σχέση φυσικής γλώσσας - μαθηματικής γλώσσας, την αναλογία φυσικού-συμβολικού λόγου σε κάθε στάδιο όλων των μαθησιακών φάσεων και τους νεολογισμούς (για τα παιδιά), είτε πρόκειται για νέες λέξεις είτε για δανεισμένες από τη φυσική γλώσσα, που παίρνουν νέο περιεχόμενο. Επίσης θα αξιοποιηθεί η δυνατότητα του υπερκειμένου: Κάθε νεολογισμός ή και λέξη με ιδιαίτερο ρόλο στην κατανόηση του κειμένου θα οδηγεί σε υπερκείμενο το οποίο δεν θα είναι άλλο από τη *Σημασιολογική Καρτέλα* της λέξης. (Δες [19] και Παράρτημα Ε). Τέλος, ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στη ορθή σύνταξη και γραμματική της απόδοσης σε φυσική γλώσσα, των μικτών φράσεων.

- **Η θεματική κατηγορία και το αντικείμενο** της συγκεκριμένης εφαρμογής του ΠΡΩΤΕΑ, είναι η εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής της Γ' Γυμνασίου. Η προβλεπόμενη από το αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου διδακτέα ύλη, καθώς και οι στόχοι, θα καλύπτονται πλήρως. Δεν υπάρχουν προαπαιτούμενα. Ωστόσο, θα καταβληθεί προσπάθεια, ώστε να υπάρχουν ιεραρχημένα επίπεδα γνώσης ώστε και οι ανάγκες του καθηγητή να εξυπηρετούνται αλλά και οι ανάγκες προικισμένων μαθητών.
- **Διδακτικοί και Μαθησιακοί Στόχοι στη Διεθνή Πραγματικότητα.**

Το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών, τις τελευταίες δεκαετίες ήταν το αντικείμενο γύρω από το οποίο υπήρχαν πάντοτε ισχυρές αντιθέσεις και ποικιλία απόψεων. Υπάρχουν πολλές συστάσεις από ειδικά συνέδρια, ερευνητές και διεθνείς επιτροπές. Για μια ιδέα της κατάστασης δείτε τα: [0], [1], [5], [7]. Ωστόσο, όλες σχεδόν οι συστάσεις συμφωνούν στο ότι πρέπει να συμπεριληφθούν στο πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι πιθανότητες και η στατιστική.

Ήδη από το 1955, η Επιτροπή για τα Μαθηματικά που οργανώθηκε στις Η.Π.Α. λέει μεταξύ άλλων: "Όπως ακριβώς τα μαθηματικά ασχολούνται με καταστάσεις στις οποίες τα δεδομένα μπορούν να καθοριστούν, έτσι μας παρέχουν και τρόπους για μελέτη, κατανόηση, και έλεγχο της αβεβαιότητας. Πολλές από τις νεότερες εφαρμογές των μαθηματικών χρησιμοποιούν την πιθανοθεωρία και την στατιστική επιχειρηματολογία.

Με αυξητικές τάσεις, η σύγχρονη επιστήμη - Φυσική, Βιολογία, Κοινωνικές επιστήμες- χρησιμοποιούν την πιθανοτική περιγραφή των φαινομένων". Επίσης το περίφημο Σεμινάριο Royaumont που οργανώθηκε από την Ευρωπαϊκή Οικονομική Συνεργασία το 1959 λέει: "Τα Στοιχεία Πιθανότητας πρέπει να αναγνωρισθούν ως ένα κατάλληλο θέμα των μαθηματικών που πρέπει να διδάσκεται στη μέση εκπαίδευση". Παρόμοιες προτάσεις έχουν γίνει και από την OECD-sponsored Conference on Mathematics Education που πραγματοποιήθηκε στην Αθήνα.

Οι σύγχρονες τάσεις οδηγούν σε πιο συγκεκριμένους παιδαγωγικούς και διδακτικούς στόχους για τη διδασκαλία των πιθανοτήτων και στατιστικής στα γυμνάσια και στα λύκεια: Είναι γνωστό ότι η κοινή καθημερινή πιθανοτική σκέψη που συναντάται στους ανθρώπους, είναι διαφορετική από την επιστημονική αντίληψη και πολλές φορές οδηγεί και σε λάθος επιχειρήματα, (δες [0] και [11]). Ένα συνηθισμένο λάθος είναι ότι η πιθανότητα ενός ανεξάρτητου ενδεχομένου, συναρτάται με παρόμοια ενδεχόμενα στο παρελθόν. Τέτοια παραδείγματα έχουν προβλεφθεί από το λογισμικό, με στόχο να φανερώσουν τέτοιου είδους παρανοήσεις, ώστε να δοθεί η κατάλληλη προσοχή στη συνέχεια.

Μέσω του ΠΡΩΤΕΑ επιδιώκεται:

1. Να δίνεται έμφαση στην ουσιαστική γνώση των εννοιών μέσα από οπτικοποιήσεις και εξομοιώσεις, καθώς επίσης και στο διερευνητικό χαρακτήρα της στατιστικής σκέψης, όταν ερμηνεύουμε διαγράμματα της περιγραφικής στατιστικής.
2. Να προηγείται η απλή και ουσιαστική πρόσληψη της έννοιας, χωρίς να επιβαρύνεται η διαδικασία αυτή από πολύπλοκα αριθμητικά δεδομένα και πράξεις. Σε ένα μετέπειτα στάδιο, η έμφαση θα μεταφέρεται στο σοβαρό υπολογιστικό μέρος, διαλεκτικά συνδεδεμένο με το εννοιολογικό μέρος.
3. Να δίνεται έμφαση στις εφαρμογές στην διαθεματική γνώση και στο χτίσιμο μοντέλων πραγματικών καταστάσεων.
4. Να χρησιμοποιούνται εξομοιώσεις, π.χ. στον υπολογισμό του εμβαδού μιας ακανόνιστης επίπεδης επιφάνειας.
5. Να χρησιμοποιείται η μέθοδος project, (δες και το [10]).

• Η Διάταξη της Ύλης

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή του ΠΡΩΤΕΑ για τις Πιθανότητες και τη Στατιστική, η βασική θέση της ένωσης ως προς τη διάταξη της “διδασκίας” ύλης συνοψίζεται σε δύο σημεία:

1. **Η Συνδυαστική ανάλυση δεν πρέπει να προηγείται της πιθανοθεωρίας**, γιατί δημιουργείται στον μαθητή η ψευδής εντύπωση ότι πιθανότητα είναι κάποιες μέθοδοι υπολογισμού των ευνοϊκών και των δυνατών περιπτώσεων, ενώ ταυτόχρονα οι υπολογισμοί αυτοί εμποδίζουν την απρόσκοπτη και φυσική πρόσληψη της ουσίας της έννοιας. Οι υπολογισμοί κατά την εισαγωγή των εννοιών της πιθανότητας μπορούν να περιοριστούν σε απλές περιπτώσεις, έτσι ώστε να μην χρειάζεται η συνδυαστική ανάλυση. Αργότερα μπορεί κανείς να αυξήσει το μέγεθος n του δειγματικού χώρου, έτσι ώστε η οποιαδήποτε γραφική αντιμετώπιση του προβλήματος να οδηγεί σε αδιέξοδο. Έτσι η εισαγωγή και ανάπτυξη συνδυαστικών μεθόδων γίνεται πλέον αναγκαία και αναπόφευκτη.
2. **Η Περιγραφική Στατιστική, με τα πολλά δεδομένα, τους υπολογισμούς, κτλ.. δεν προσφέρεται για τη σύλληψη των εννοιών της πιθανότητας**. Μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί “πειράματα” με ισχυρό εμπειρικό και ενορατικό περιεχόμενο, όπως η Ρωμαϊκή Κρήνη, όπου κάθε μόριο νερού είναι στην ουσία ένα τυχαίο πείραμα, και η μάζα του νερού που βλέπουμε, αντιστοιχεί στην επανάληψη του πειράματος, δισεκατομμύρια φορές, και τελικά αυτή η μάζα του νερού που τρέχει από κάθε εκροή είναι πρακτικά το όριο της σχετικής συχνότητας. Με το πείραμα αυτό λοιπόν, οπτικοποιείται και η έννοια του ορίου (τα παιδιά βλέπουν με τα ίδια τους τα μάτια, “πρακτικά” το όριο της σχετικής συχνότητας) αλλά και του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών, δηλ. του ορίου της σχετικής συχνότητας καθώς ο αριθμός των πειραμάτων τείνει στο άπειρο, χωρίς ποτέ να χρειασθεί να μιλήσει κανείς επίσημα για το όριο ή το νόμο των Μεγάλων αριθμών. Το διαισθητικό αυτό υπόβαθρο θα αποτελέσει αργότερα τη βάση πάνω στην οποία θα χτισθεί μια περισσότερο αναλυτική και αυστηρή προσέγγιση στα θέματα αυτά. Πρέπει δηλ. και η περιγραφική στατιστική να έπεται της πιθανότητας. Με λίγα λόγια **το εννοιολογικό (“soft” mathematics) πρέπει πάντοτε να**

προηγείται του πολύπλοκου υπολογιστικού ("hard" mathematics) και τελικά τα δύο να δένονται διαλεκτικά.

2.2 Γενική περιγραφή των διδακτικών στόχων του λογισμικού.

Έχουν ήδη εκτεθεί οι παιδαγωγικές αρχές και οι διδακτικοί στόχοι. Κρίνεται όμως σκόπιμο να προστεθούν εδώ μερικές ακόμη παρατηρήσεις. Το λογισμικό θα πρέπει να είναι εύκολο στο χειρισμό, ελκυστικό ώστε να κερδίζεται η προσοχή και το ενδιαφέρον του μαθητή, αλλά ταυτόχρονα και ουσιαστικό, να προωθείται δηλαδή η ουσιαστική γνώση.

1. Υπάρχει ένα σοβαρότατο πρόβλημα που προέρχεται από την επαφή και την εμπειρία με υπολογιστές. Οι τεράστιες ταχύτητες των υπολογιστών (χιλιοστό του δευτερολέπτου), έχουν μια σημαντικότερη επίδραση πάνω στους μαθητές αλλά, και όλους τους χρήστες γενικότερα. Η ταχύτητα αυτή συνδυαζόμενη με την επίσης μεγάλη ταχύτητα άμεσης πρόσληψης των εννοιών μέσα από γρήγορες και εύληπτες παρουσιάσεις και οπτικοποιήσεις, έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αποστρέφονται τη μελέτη βιβλίων που συνήθως απαιτούν αργή και σε βάθος μελέτη.
2. Θα καταβληθεί λοιπόν προσπάθεια ώστε μαζί με τις οπτικοποιήσεις κτλ. ο μαθητής να μάθει να σκέπτεται και να συγκεντρώνεται με βαθύ και αργό τρόπο πάνω σε γραπτό λόγο και βιβλία, και να καταπιάνεται με προβλήματα που απαιτούν χρόνο. Αναγνωρίζοντας ακόμη την ανάγκη του παιδιού για παιχνίδι, θα γίνει πρόβλεψη ώστε το λογισμικό να περιέχει ενδιαφέροντα παιχνίδια που σχετίζονται με την πιθανότητα, έτσι, μαζί με το παιχνίδι και μέσα απ' αυτό να προωθείται ταυτόχρονα και η γνώση.
3. Η ομαδική δραστηριότητα και γνώση, θα προωθείται με τα projects. Γενικά το λογισμικό στοχεύει στην ενίσχυση της δημιουργικής σκέψης και δραστηριότητας, την καταπολέμηση της απάθειας, και στον εθισμό του μαθητή στην αυτοπειθαρχία και την αυτοαξιολόγηση.

• Το Λογισμικό και το Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το προτεινόμενο λογισμικό και η συγκεκριμένη εφαρμογή του στις πιθανότητες και τη στατιστική μπορεί να χρησιμοποιηθεί πλήρως στο υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα στο μάθημα των μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου, ενώ είναι ταυτόχρονα ευέλικτο και ευπροσάρμοστο έτσι ώστε να μπορεί να αξιοποιηθεί και μετά από τυχόν αλλαγές που τυχόν θα προκύψουν στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις των τεχνολογικών και κοινωνικών εξελίξεων των τελευταίων χρόνων.

2.3 Ο Η/Υ στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η παρουσίαση ενός θέματος πρέπει να εμπεριέχει τα στοιχεία της τέχνης του κλόουν και του θαυματουργού για να είναι ενδιαφέρουσα.

Howard Eves

Μέσω του λογισμικού Πρωτέας δίνεται η δυνατότητα διδασκαλίας των πιθανοτήτων μέσω των υπολογιστών. Οι εμπειρίες μας, τόσο από τη πειραματική διδασκαλία όσο και τα αποτελέσματα ήταν θετικές.

Θα θέλαμε να εκθέσουμε τα πλεονεκτήματα μίας τέτοιας διδασκαλίας στο εργαστήριο, όπως τα διαπιστώσαμε στην πράξη.

Ο ρόλος του δασκάλου με τη χρήση του λογισμικού αλλάζει και από μεταδότης γνώσεων μπορεί να γίνεται συντονιστής, οργανωτής, διευκολυντής και υποστηρικτής της μάθησης. Μερικές δε φορές γίνεται και ο ίδιος μαθητής στο πλευρό των μαθητών του.

Οι έννοιες οπτικοποιούνται, γεγονός που αποτελεί γέφυρα για εξοικείωση με τις έννοιες. Η γνώση δεν μεταδίδεται έτοιμη αλλά αποκαλύπτεται-ανακαλύπτεται από τον ίδιο το μαθητή και το συμμαθητή του.

Ο μαθητής δεν γίνεται ένας απλός χρήστης ενός προγράμματος αλλά γίνεται χειριστής γνώσης κατά τρόπο που μοιάζει με παιγνίδι και έτσι ενεργοποιείται εσωτερικά ο μαθητής για μάθηση. Οι αναπαραστάσεις που παρατηρούνται κάνουν το μαθητή να αντιληφθεί πολύ πιο εύκολα μοντέλα κανονικότητας και νόμους.

Ο Fieschben ισχυρίστηκε ότι "πολύ συχνά η διαισθητική γνώση ταυτίζεται με την οπτική αναπαράσταση" και ότι "κάτι που δεν μπορούμε να το φανταστούμε οπτικά είναι δύσκολο να κατανοήσουμε νοητικά", καταλήγοντας ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις συμβάλλουν στην οργάνωση της πληροφορίας και αποτελούν ένα σπουδαίο παράγοντα για τη σφαιρική αντίληψη. Ο υπολογιστής εισάγει μία δυναμική διάσταση στην βελτίωση της μάθησης με βάση τις οπτικές αναπαραστάσεις καθώς τα γραφικά στην οθόνη μπορούν να γίνουν πολλές φορές αντικείμενο χειρισμού και μετασχηματισμού με πολλούς τρόπους.

Πολλές έρευνες επιρρίπτουν την ευθύνη για τις δυσκολίες στη κατανόηση εννοιών στη περιορισμένη οπτική εμπειρία που προσφέρουμε στους μαθητές κατά τη διδασκαλία. Τα προβλήματα μπορεί να λυθούν με τον εμπλουτισμό της οπτικής εμπειρίας μέσω του υπολογιστή.

Σύμφωνα με έρευνες των Clements και Battista, η εμπειρία μικρών παιδιών σε περιβάλλοντα Logo επηρέασε θετικά την ανάπτυξη της έννοιας "τρίγωνο".

Η σχέση μαθητή-δασκάλου υφίσταται κατά το πλείστον ποιοτική αλλαγή. Διαφορετικά είναι ένας δάσκαλος να κάνει διάλεξη στην άκρη της αίθουσας από να στέκεται δίπλα στον μαθητή και να συνεργάζεται μαζί του ποικιλοτρόπως.

Βέβαια ο νέος ρόλος παρουσιάζει νέου είδους απαιτήσεις και δυσκολίες. Πρέπει ο δάσκαλος να μάθει να διαχειρίζεται τον χρόνο, να συνθέτει τις εμπειρίες και να διαχειρίζεται κατάλληλα το διαδίκτυο.

Η δυνατότητα διασύνδεσης του μαθητή με το διαδίκτυο τον εξοικειώνει στην επαφή του με άλλους συμμαθητές ή εκπαιδευτικούς ή και άλλους επίσημους φορείς.

Με τη χρήση του υπολογιστή οι δομές επικοινωνίας μέσα στη τάξη αλλάζουν και προσλαμβάνουν μία αποκεντρωμένη και δημοκρατική μορφή. Προωθείται η συνεργατική μάθηση. Οι μαθητές μοιράζονται τον υπολογιστή ανά δυάδες έτσι μοιράζουν και τις γνώσεις τους και τις συμπληρώνουν για ένα κοινό σκοπό.

Οι μαθητές που δουλεύουν μέσω υπολογιστή είναι αυτοί που πρέπει να πάρουν αποφάσεις σε κάθε φάση εκμάθησης. Έτσι το αποτέλεσμα το κατανοούν καλύτερα, αντίθετα το παραδοσιακό μάθημα μερικές φορές τους αφήνει τη δυνατότητα να αδιαφορούν ή να αντιγράφουν τον πίνακα.

Προσεγγίζουν το θέμα με μεγαλύτερο ενθουσιασμό. Τελειώνουν τις παρατηρήσεις τους ταχύτερα.

Η χρησιμοποίηση του υπολογιστή προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιστοιχίσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την ακριβή σχέση μεταξύ της εικονικής -γραφικής έκφρασης και της αναλυτικής-αλγεβρικής. Παράδειγμα οι έννοιες της συχνότητας και της σχετικής συχνότητας.

Η παρέμβαση του δασκάλου είναι πρωταρχικής σημασίας για να μαθαίνουν οι μαθητές κάτι αξιόλογο και να ωριμάζουν σαν άτομα από την αξιοποίηση του λογισμικού.

Το πάγωμα της εικόνας είναι αναγκαίο για να μπορεί ο καθηγητής να σχολιάζει και ο μαθητής να ρωτά και να παρατηρεί.

Τα φύλλα εργασίας που παρατίθενται στο βιβλίο του μαθητή είναι **ενδεικτικά**. Με τη πρόοδο του μαθήματος μπορεί ο δάσκαλος να αυτοσχεδιάζει δικά του φύλλα εργασίας. Επίσης υποκινούμενος ο μαθητής από το λογισμικό μπορεί να δημιουργεί και ο ίδιος τα δικά του οπτικά μοντέλα.

Οι ασκήσεις, προβλήματα και οι συνθετικές εργασίες που περιλαμβάνονται στα φύλλα εργασίας δεν πρέπει να είναι μόνο απλές εφαρμογές εννοιών που διδάχτηκαν αλλά συγχρόνως να ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα των μαθητών για έρευνα. Πάντως *κατάλληλες εργασίες για το σπίτι είναι εκείνες που μπορούν να αντιμετωπιστούν από τους περισσότερους μαθητές χωρίς*

ιδιαίτερη βοήθεια. Εκτός από τις ασκήσεις που μπορεί να βρει ο μαθητής στο λογισμικό να μπορεί να βρίσκει και μόνος του και με τη καθοδήγηση του καθηγητή και σε άλλα σημεία του διαδικτύου ή να μπορεί να δημιουργεί και ο ίδιος.

Τα αποτελέσματα των εργασιών του μπορεί ο ίδιος ο μαθητής να αποθηκεύσει σε αρχείο και να το ανοίξει όποτε θέλει ή ο ίδιος ή ο μαθητής.

Οι νέες δυνατότητες που προσφέρουν τα multimedia είναι πρόκληση για την εκπαίδευση. Με επιλεγμένη χρήση μπορούν να γίνουν εργαλεία πρόσφορα για τη δημιουργία μαθησιακού περιβάλλοντος, τέτοιου που να επιτρέπει την εξερεύνηση, την ανακάλυψη και οικοδόμηση γνώσεων, τεχνικών και μοντέλων ενός γνωστικού τομέα, από τους ίδιους τους μαθητές και με τη καθοδήγηση του δασκάλου.

2.4 Χρονισμός με το αναλυτικό πρόγραμμα.

Το λογισμικό αυτό έχει σχεδιαστεί (με βάση το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα) για να αξιοποιείται κατά το τρίτο τρίμηνο της Γ΄ Γυμνασίου.

3. Αναλυτική περιγραφή των σεναρίων.

3.1 Σενάριο 1^{ης} Ενότητας.

3.1.1 Περιγραφή

Είναι γνωστό ότι η θεωρία των πιθανοτήτων (δειγματικός χώρος, ενδεχόμενα, σύνθετα πειράματα τύχης κλπ.) συνδέεται και βασίζεται σε βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων. Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν έχουν μία συστηματική εισαγωγή στις στοιχειώδεις έννοιες από τη θεωρία συνόλων, μπορεί ο καθηγητής με αφορμή τη θεωρία πιθανοτήτων, να εισάγει παράλληλα και με έναν ενδιαφέροντα τρόπο και τις αναγκαίες έννοιες από τα σύνολα, χωρίς όμως να επιμένει σε φORMALISΤΙΚΕΣ διατυπώσεις.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.1.2 Διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι:

Εισαγωγή και εξοικείωση με στοιχειώδεις έννοιες από τη θεωρία συνόλων, με αξιοποίηση του τρόπου με τον οποίο εμφανίζονται οι έννοιες αυτές στη στοιχειώδη πιθανοθεωρία και στατιστική.

3.1.3 Διδακτικά μέσα και τρόποι επίτευξης των στόχων:

Τα πειράματα τύχης που οπτικοποιούνται από το λογισμικό στην ενότητα αυτή αξιοποιούνται μέσω της προσπάθειας να συνηθίσουν οι μαθητές να καταγράφουν συστηματικά στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων, τα δεδομένα από την εκτέλεσή των πειραμάτων αυτών.

1. Εισαγωγή
2. Πειράματα τύχης
3. Η ανάρριψη ενός νομίσματος.
4. Η ανάρριψη ενός ζαριού
5. Ο δίχρωμος τροχός
6. Οπτικοποιημένη ρωμαϊκή κρήνη
7. Ανακεφαλαίωση
8. Ασκήσεις.
9. Δειγματικός χώρος
10. Δυνατά αποτελέσματα
11. Ασκήσεις-Παραδείγματα
12. Δενδροδιαγράμματα
13. Ενδεχόμενα
14. Απλά ή στοιχειώδη ενδεχόμενα
15. Ασκήσεις
16. Σχόλιο

3.1.4 Ασκήσεις για το σπίτι

1. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι. Αποτελεί αυτό πείραμα τύχης;
2. Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης (ΝΑΙ/ΟΧΙ).
 - i. Θεωρούμε ότι ένας ηλεκτρικός διακόπτης λειτουργεί καλά. Ανοίγουμε το διακόπτη. Μας ενδιαφέρει αν θα ανάψει η λάμπα ή όχι. Να γίνει συζήτηση.
 - ii. Κατά τη γέννηση ενός παιδιού μας ενδιαφέρει αν θα γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.
 - iii. Ένας σκοπευτής πυροβολεί σε κάποιο στόχο. Μας ενδιαφέρει το σημείο που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα.
 - iv. Με κάποιο όργανο ακριβείας μέτρησης μήκους, μετράμε το πλάτος ενός παραθύρου.
3. Σ' έναν αγώνα τένις μεταξύ δύο παικτών A και B κερδίζει εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο.
4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές. Να γράψετε το ενδεχόμενο A : «τις τρεις πρώτες φορές να έρθει κεφαλή».
5. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές.
 - i) Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο
 - ii) Να γράψετε τα ενδεχόμενα:
 A : να φέρουμε ακριβώς 3 φορές γράμματα
 B : να φέρουμε τουλάχιστον 3 φορές γράμματα
 Γ : να φέρουμε το πολύ 3 φορές γράμματα

3.1.5 Φύλλο Εργασίας

Θέμα 1

- α) Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:
 - A. $\Omega = \{Κ, Γ\}$
 - B. $\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$
 - Γ. $\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΓΚ, ΓΓΓ, ΓΚΓ, ΚΓΚ\}$
- β) Η διαδικασία ενός πειράματος τύχης μπορεί να επαναληφθεί με τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε.
 Σ ☐ Λ ☐

- γ) Ελέγχουμε διαδοχικά βιβλία μέχρι να βρούμε ένα κακοτυπωμένο(Κ) ή δύο σωστά τυπωμένα(Σ). Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:
- A. $\Omega=\{KK,K\Sigma\}$
- B. $\Omega=\{K,\Sigma\Sigma\}$
- Γ. $\Omega=\{K,\Sigma K,\Sigma\Sigma\}$
- Δ. $\Omega=\{KK,\Sigma\Sigma\}$

Θέμα 2

Μία δισκογραφική εταιρία ελέγχει τα CD που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD. Να βρεθούν:

- α) ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα.
- β) το ενδεχόμενο: "ακριβώς 2 ελαττωματικά CD".

Θέμα 3

Να αναφέρετε 4 πειράματα τύχης.

Θέμα 4

Αναφέρατε παραδείγματα δειγματικών χώρων από εφημερίδες, περιοδικά, τηλεοράσεις ή από το διαδίκτυο.

Απαντήσεις

- 1 α) Γ
- β) Σ
- γ) Γ
2. α) $\Omega=\{KKKK, KKKE, KKEK, KKEE, KEKK, KEKE, KEE, EKKK, EKKE, EKE, EE\}$
- β) $B=\{KKEE, KEKE, KEE, EKKE, EKE, EE\}$

3.1.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή

3.1.6.1 Ιστορικό Σημείωμα

*Η τυχειότητα τράβηξε την προσοχή των ανθρώπων από την αρχαιότητα. Παρόλ' αυτά η συστηματική αντιμετώπιση της πιθανότητας με μαθηματικό τρόπο άρχισε τον 15^ο αιώνα.. Για πρώτη φορά εμφανίστηκαν σκέψεις πάνω σε τυχερά παιχνίδια στο βιβλίο *Suma* του Luca Pacioli (1494). Σ' αυτή την εργασία ο Pacioli πρότεινε το περίφημο "Πρόβλημα των μεριδίων" στο οποίο ζητείται, σ' ένα τυχερό παιχνίδι που δεν έχει ακόμη τελειώσει, πώς θα μοιραστούν τα στοιχήματα λαβαίνοντας υπ' όψιν τα μέχρι τη διακοπή αποτελέσματα.*

Τον 16^ο αιώνα ο Girolamo Cardano, ένας άλλος Ιταλός, έγραψε ένα εγχειρίδιο του παίκτη στο οποίο διετύπωσε κάποιους κανόνες για τη λύση του προβλήματος

των ζαριών, για ένα ζάρι. Περίπου 50 χρόνια αργότερα ο Γαλιλαίος έδωσε τον πλήρη πίνακα για το πρόβλημα των 3 ζαριών.

Παρά τις αρχικές προσπάθειες για να μαθηματικοποιηθούν οι νόμοι της τύχης, η γέννηση της θεωρίας πιθανοτήτων σαν μαθηματικής επιστήμης τοποθετείται το έτος 1654. Τότε ο George Brossin ιππότης στην αυλή του Λουδοβίκου XIV πρότεινε το πρόβλημα των ζαριών και το πρόβλημα των μεριδίων στον Blaise Pascal. Ο ιππότης είχε βρει ότι η θεωρητική αντιμετώπιση των προβλημάτων δεν συμφωνούσε με τις εμπειρικές παρατηρήσεις του. Ο Pascal έδωσε το πρόβλημα στον Pierre de Fermat και σύντομα και οι δύο μαζί βρήκαν διαφορετικές λύσεις.

Η εργασία τους θεωρείται η μεγαλύτερη εξέλιξη στη θεμελίωση της μαθηματικής θεωρίας των πιθανοτήτων. Η εργασία των Pascal και Fermat δημιούργησε μεγάλο ενδιαφέρον για τις πιθανότητες. Το 1655 ο Christiaan Huygens ταξίδεψε στο Παρίσι για να μάθει περισσότερα για τις ιδέες του Pascal. Παρ' όλο που δεν κατάφερε να συναντήσει τον διάσημο Γάλλο, γύρισε πίσω και συνέθεσε ανεξάρτητα μια πραγματεία στη Θεωρία των Πιθανοτήτων που ήταν η πρώτη στο είδος της και που δημοσιεύτηκε το 1658. Παρ' όλο που στα πρώτα βήματα η μελέτη των πιθανοτήτων επικεντρώθηκε στα παιγνίδια τύχης, πάρα πολλά παράδοξα αναφύονταν, που προκύπτανε από έναν μη ικανοποιητικό ορισμό της πιθανότητας. Μετά το έτος 1700 η θεωρία άρχισε να αναπτύσσεται με γρήγορους ρυθμούς.

Η δεύτερη σημαντική δημοσίευση ήταν ένα άρθρο του Pierre-Remond De Montmort (1708). Το 1713 εμφανίστηκε το πρώτο βιβλίο αφιερωμένο αποκλειστικά στις πιθανότητες. Ήταν το *Ars Consectandi* του Jacob (Jacques) Bernoulli. Το πρώτο από μια σειρά μεγάλων συνεισφορών της οικογένειας Bernoulli. Ο Abraham De Moivre δημοσίευσε το *Doctrine of chances* το 1718 και η θεωρία των πιθανοτήτων συνέχισε να αναπτύσσεται κατά την διάρκεια του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα με συνεισφορές από τον Euler, Laplace, Gauss και πολλών άλλων.

Τα τελευταία 100 χρόνια η θεωρία πιθανοτήτων έχει προχωρήσει σημαντικά μέσα από τις προσπάθειες των μαθηματικών να εξασφαλίσουν μια στερεή μαθηματική βάση πάνω στην οποία να μπορούν να κτίσουν. Το αποκορύφωμα αυτής της προσπάθειας ήταν η δημοσίευση στη δεκαετία του '30 του "Foundations of the Theory of Probability" του Kolmogorov, στο οποίο αναπτύσσεται η θεωρία πιθανοτήτων σε μια αυστηρά αξιωματική βάση, συμπληρώνοντας έτσι την μετάβαση του αντικειμένου από μία συλλογή κανόνων για παίκτες σε ένα απαγωγικό μαθηματικό σύστημα.

3.1.6.2 Εισαγωγή

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει, σχετικά εύκολα, ότι η καθημερινή ζωή είναι γεμάτη παραδείγματα που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα..

Είναι πολύ συνηθισμένες για παράδειγμα φράσεις όπως:

- Έχει μεγάλες πιθανότητες να πετύχει στο πανεπιστήμιο.
- Είναι πολύ πιθανό να βρέξει.
- Συμπληρώνοντας περισσότερες στήλες ΠΡΟ-ΠΟ αυξάνεται η πιθανότητα να κερδίσεις.

- Η πιθανότητα να ακυρωθεί η εκδρομή λόγω βροχής είναι μικρή.
- Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι: 50 - 50 ή 50% ή ένα προς δύο ή 1/2
- Είναι εξίσου πιθανόν να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

3.1.6.3 Πείραμα.

Από την καθημερινή μας ζωή γνωρίζουμε διάφορες διαδικασίες, που μπορούμε να τις εκτελέσουμε πρακτικά κάτω από τις ίδιες συνθήκες, και που στο τέλος έχουν κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα είναι σε όλους γνωστό το «πείραμα» του βρασμού του νερού ή έχουμε πολλές φορές δει κάποιο μήλο να πέφτει από τη μηλιά.

Είναι απολύτως βέβαιο ότι το νερό θα βράσει στους 100 βαθμούς της κλίμακας Κελσίου καθώς επίσης είναι βέβαιο ότι λόγω της βαρύτητας το μήλο πάντοτε θα πέφτει προς τα κάτω. Αυτό εξάλλου παρατήρησε και ο Νεύτων και διετύπωσε τη θεωρία της βαρύτητας.

Υπάρχουν όμως και πειράματα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά τους. Για παράδειγμα όταν στρίβουμε ένα νόμισμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε αν θα έλθει «κεφαλή» (Κ) ή «γράμματα» (Γ).

Ορισμός

*Μια διαδικασία, η οποία οδηγεί σε κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα, και την οποία μπορούμε να επαναλάβουμε πρακτικά κάτω από τις ίδιες συνθήκες, όσες φορές θέλουμε, θα τη λέμε **πείραμα**.*

Παράδειγμα

Οι διαδικασίες που ακολουθούν είναι πειράματα:

1. Η ανάρριψη ενός νομίσματος.
2. Μια μεταλλική ράβδος που θερμαίνεται
3. Ένας δίχρωμος (μαύρο-κόκκινο) τροχός που περιστρέφεται πάνω σε ένα δίσκο εφοδιασμένο με ένα βέλος.
4. Η ανάρριψη ενός ζαριού.
5. Αφήνουμε ένα τόπι να πέσει.

Κάθε ένα από τα **πειράματα** που αναφέραμε έχει κάποιο αποτέλεσμα. Άλλοτε είναι προβλέψιμο κι άλλοτε όχι. Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος δεν είναι προβλέψιμο, τότε έχουμε ένα **πείραμα τύχης** ή **τυχαίο πείραμα**. Για παράδειγμα η ανάρριψη ενός νομίσματος είναι πείραμα τύχης γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε από πριν το αποτέλεσμα, αν δηλαδή θα έλθει (Κ) κεφαλή ή (Γ) γράμματα.

Γνωρίζουμε από τη φυσική ότι όταν ένα μέταλλο θερμαίνεται διαστέλλεται. Η αύξηση της θερμοκρασίας της μεταλλικής ράβδου θα έχει ως προβλέψιμο αποτέλεσμα την επιμήκυνσή της. Το πείραμα λοιπόν αυτό δεν αποτελεί πείραμα τύχης, αφού είναι δυνατόν να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του.

Άσκηση

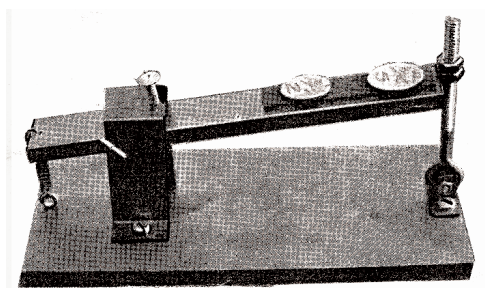
Από τα πειράματα που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα ποιο είναι πείραμα τύχης και ποιο όχι;

Απάντηση

Πειράματα τύχης είναι τα 1,3,4.

3.1.6.4 Δυνατά Αποτελέσματα - Δειγματικός χώρος

Ας δούμε πάλι το **τυχαίο πείραμα** της ανάρριξης ενός νομίσματος. Ποια είναι τα **δυνατά αποτελέσματα**;



Μηχανή ανάρριξης νομίσματος

Τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο: Κεφαλή (Κ) ή Γράμματα (Γ). Το **σύνολο** των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το $\Omega = \{K, \Gamma\}$.

Το σύνολο Ω θα το ονομάζουμε **δειγματικό χώρο**.

Παράδειγμα

Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα στο τυχαίο πείραμα του ζαριού;

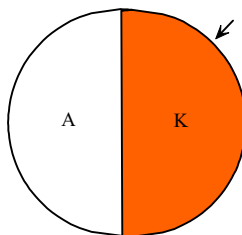
Απάντηση

Να φέρει 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6. Δηλαδή ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Παράδειγμα

Έχουμε ένα δίχρωμο τροχό. Να γράψεις “Κ” όταν έρχεται κόκκινο και “Α” όταν έρχεται άσπρο.



Ρουλέτα

Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο που περιέχει τα αποτελέσματα «Κ» ή «Α» δηλαδή: $\Omega = \{ K, A \}$

Παράδειγμα

Στρίβουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

Δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα

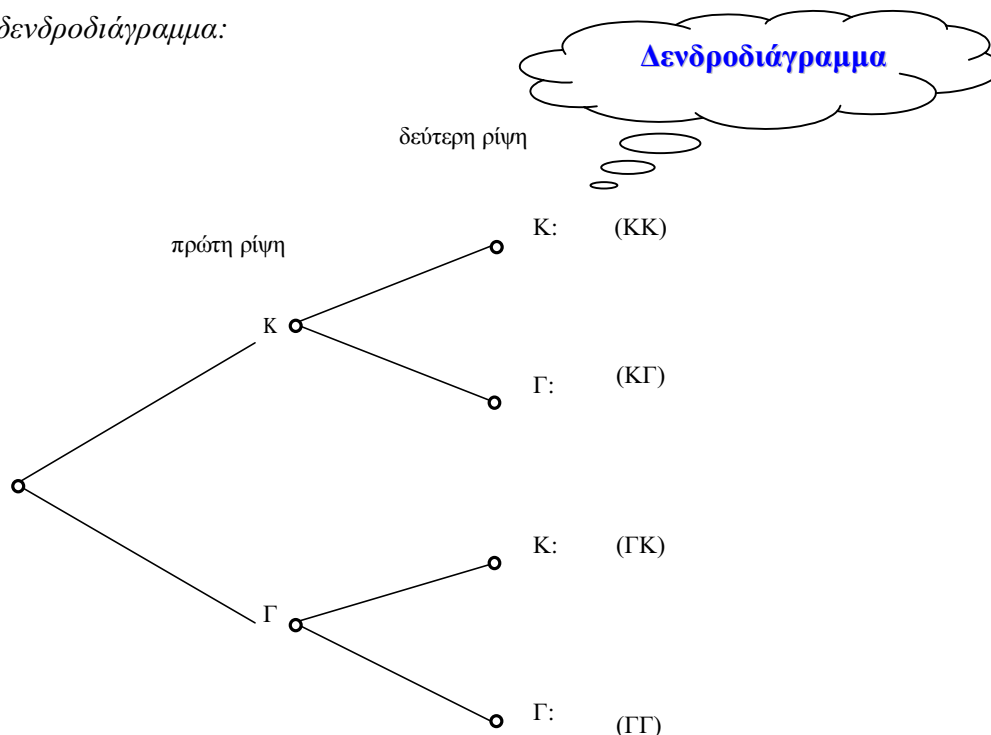
<i>Να φέρει την πρώτη φορά:</i>	<i>και την δεύτερη φορά:</i>
Κεφαλή	Κεφαλή
Κεφαλή	Γράμματα
Γράμματα	Κεφαλή
Γράμματα	Γράμματα

Γίνονται φανερά τα αποτελέσματα της ανάρριψης ενός νομίσματος δύο φορές. Αν βάλουμε Κ για την κεφαλή και Γ για τα γράμματα και συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα:

<i>1η ρίψη</i>	<i>2η ρίψη</i>
Κ	Κ
Κ	Γ
Γ	Κ
Γ	Γ

Έχουμε την κωδικοποίηση των αποτελεσμάτων για το στρίψιμο ενός νομίσματος 2 φορές.

Η αλλιώς με δένδροδιάγραμμα:



Αναπαράσταση με δενδροδιάγραμμα

Άσκηση 1

Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω του παραπάνω πειράματος;

Απάντηση

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο $\Omega = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma \}$

Όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές είναι δυνατόν να έχουμε Κεφαλή (K) την πρώτη φορά και Κεφαλή (K) τη δεύτερη, και διάφορους άλλους συνδυασμούς. Έτσι θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

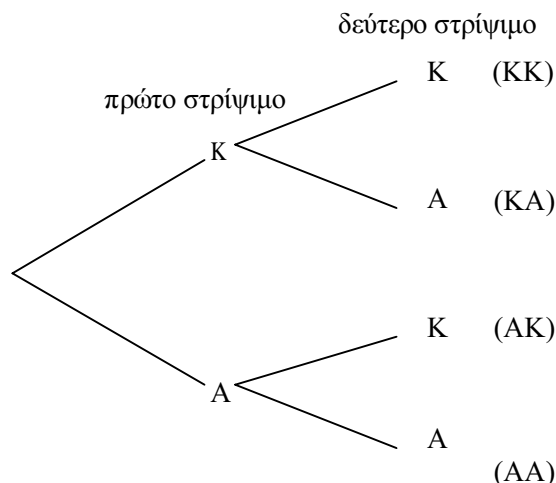
- KK , για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Κεφαλή (K) και στη δεύτερη ρίψη Κεφαλή (K).
- $K\Gamma$, για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Κεφαλή (K) και στη δεύτερη ρίψη Γράμματα (Γ).
- ΓK , για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Γράμματα (Γ) και στη δεύτερη ρίψη Κεφαλή (K).
- $\Gamma\Gamma$, για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Γράμματα (Γ) και στη δεύτερη ρίψη Γράμματα (Γ).

Άσκηση 2

Στο παράδειγμα του δίχρωμου τροχού, ας υποθέσουμε ότι γυρίζουμε το τροχό δύο φορές. Ποια είναι τα **δυνατά αποτελέσματα**;

Απάντηση

Κατασκευάζουμε πρώτα το σχετικό δενδροδιάγραμμα:



Δενδροδιάγραμμα για το δίχρωμο τροχό (ρουλέτα)

Άρα ο δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega = \{ KK, KA, AK, AA \}$.

Άσκηση 3

Ας θεωρήσουμε ξανά το τυχαίο πείραμα της ανάρριψης ενός ζαριού.

Απάντηση

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Ορισμός.

Δειγματικός χώρος είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

3.1.6.5 Απλά ή στοιχειώδη ενδεχόμενα

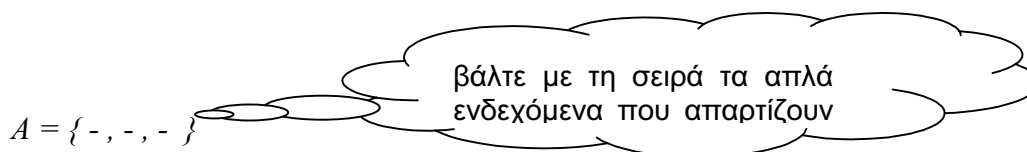
Κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου λέγεται **απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο**.

Για παράδειγμα όταν στρίβουμε ένα νόμισμα τότε τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι «κεφαλή» ή K και «γράμματα» ή Γ. Έτσι $\Omega = \{ K, \Gamma \}$.

Εκτός των **απλών ή στοιχειωδών** ενδεχομένων είναι δυνατόν να έχουμε και σύνθετα ενδεχόμενα. Για παράδειγμα όταν ρίχνουμε ένα ζάρι: «το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό»

Άσκηση 1

Από ποια απλά ενδεχόμενα απαρτίζεται το ενδεχόμενο A «να φέρουμε άρτιο αριθμό»;



Κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα λέγεται και «**στοιχειώδες**» ή «**απλό**» ενδεχόμενο.

Απάντηση

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Άσκηση 2

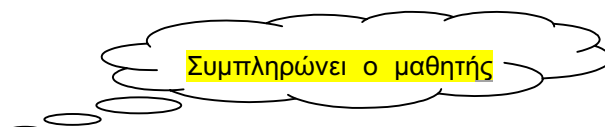
Συμπληρώστε τη φράση που αντιπροσωπεύει το στοιχειώδες ενδεχόμενο «ΓΓ».

Απάντηση

Το στοιχειώδες αυτό ενδεχόμενο αναφέρεται στο τυχαίο πείραμα της ανάρριψης ενός νομίσματος δύο φορές. Το συγκεκριμένο απλό ενδεχόμενο κωδικοποιεί το αποτέλεσμα να φέρουμε **γράμματα** την πρώτη φορά και **γράμματα** και τη δεύτερη φορά.

Άσκηση 3

Ποιο από τα **στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματοχώρο** $\Omega = \{ KK, KG, GK, GG \}$ αντιπροσωπεύει (κωδικοποιεί) τη φράση: «όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές είναι δυνατόν να έχουμε γράμματα την πρώτη φορά και κεφαλή την δεύτερη».

Απάντηση**Άσκηση 4**

Πως θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε με μια φράση ότι πραγματοποιείται το σύνθετο ενδεχόμενο $A = \{ KK \text{ και } KG \}$;

Απάντηση

“Όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές το ενδεχόμενο A κωδικοποιεί το σύνθετο ενδεχόμενο να φέρουμε **Κεφαλή** (K) την πρώτη φορά. Υπάρχουν δύο δυνατότητες για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου A : Κεφαλή (K) την πρώτη φορά και **Κεφαλή** ή **Γράμμα** την δεύτερη.

1η ρίψη	2η ρίψη
K	K
K	Γ

Το σύνολο $A = \{KK, K\Gamma\}$ είναι ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου

$\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$ και ονομάζεται ενδεχόμενο.

3.1.6.6 Βέβαιο Ενδεχόμενο

Ορισμός

Κάθε υποσύνολο A του δειγματικού χώρου Ω λέγεται **ενδεχόμενο**. Κάθε τέτοιο ενδεχόμενο που περιλαμβάνει **όλα** τα στοιχειώδη ενδεχόμενα, δηλαδή ταυτίζεται με τον δειγματικό χώρο Ω , λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

Άσκηση 1

Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα και στη συνέχεια ένα ζάρι.

α) Να κατασκευάσετε το δεντροδιάγραμμα.

β) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος;

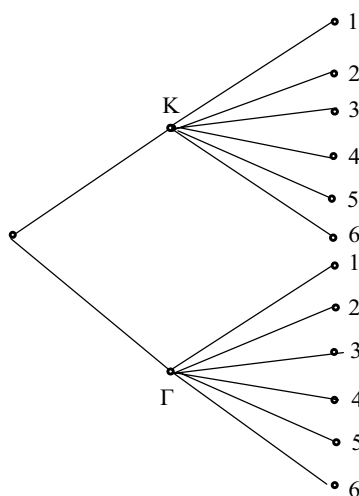
γ) Να γράψετε τα ενδεχόμενα

A : να φέρουμε κεφαλή και άρτιο αριθμό.

B : να φέρουμε αριθμό μικρότερο του 4.

Απάντηση

α)



Δενδροδιάγραμμα για τη ρίψη ενός νομίσματος και ενός ζαριού.

β) $\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$

$$\gamma) \quad A = \{ K2, K4, K6, \Gamma2, \Gamma4, \Gamma6 \}$$

$$\delta) \quad B = \{ K1, K2, K3, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3 \}$$

Άσκηση 2

Έχουμε τα γράμματα της λέξης “ΤΡΙΓΩΝΟ” γραμμένα σε καρτελίτσες T, P, I, Γ, Ω, N, O, μέσα σε ένα σακουλάκι. Ανασύρουμε μια καρτέλα και έστω ότι είναι το Γ. Ανασύρουμε μια δεύτερη καρτέλα.

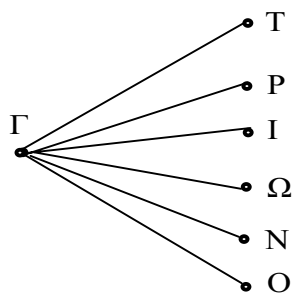
α) Φτιάξε το δενδροδιάγραμμα του πειράματος.

β) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο.

γ) Να γράψετε το ενδεχόμενο A: «η δεύτερη καρτέλα να είναι φωνήεν».

Απάντηση

α)



Δενδροδιάγραμμα του πειράματος

$$\beta) \quad \Omega = \{ \Gamma T, \Gamma P, \Gamma I, \Gamma \Omega, \Gamma N, \Gamma O \}$$

$$\gamma) \quad A = \{ \Gamma I, \Gamma \Omega, \Gamma O \}$$

Άσκηση 3

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

α) Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο.

β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα

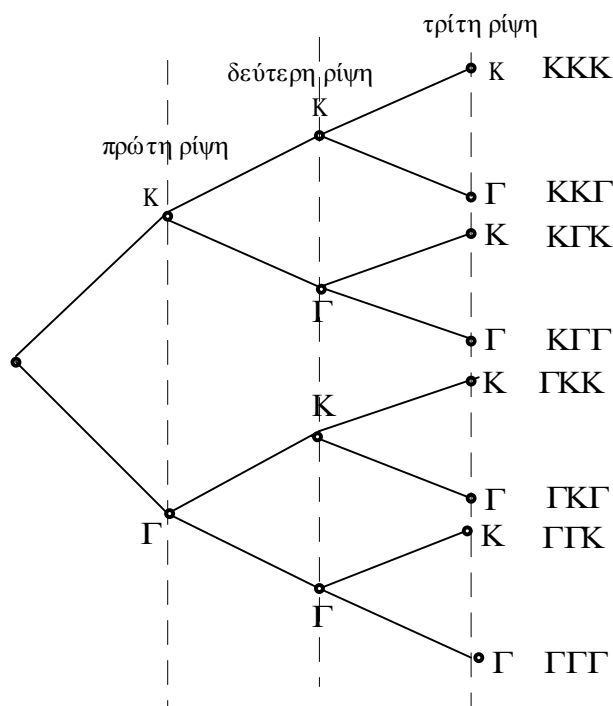
A: Να φέρουμε «ακριβώς 2 φορές γράμματα».

B: Να φέρουμε «τουλάχιστον δύο φορές γράμματα».

Γ: Να φέρουμε «το πολύ δύο φορές γράμματα».

Απάντηση

α)



Δενδροδιάγραμμα για την ρίψη νομίσματος τρεις φορές

$$\Omega = \{ KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \}$$

$$\beta) A = \{ K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K \}$$

$$B = \{ K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \}$$

$$\Gamma = \{ KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K \}$$

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα κόκκινο, και ένα πράσινο (με αυτή τη σειρά). Να γράψετε τα ενδεχόμενα

A: «Και τα δύο ζάρια να φέρουν το 6».

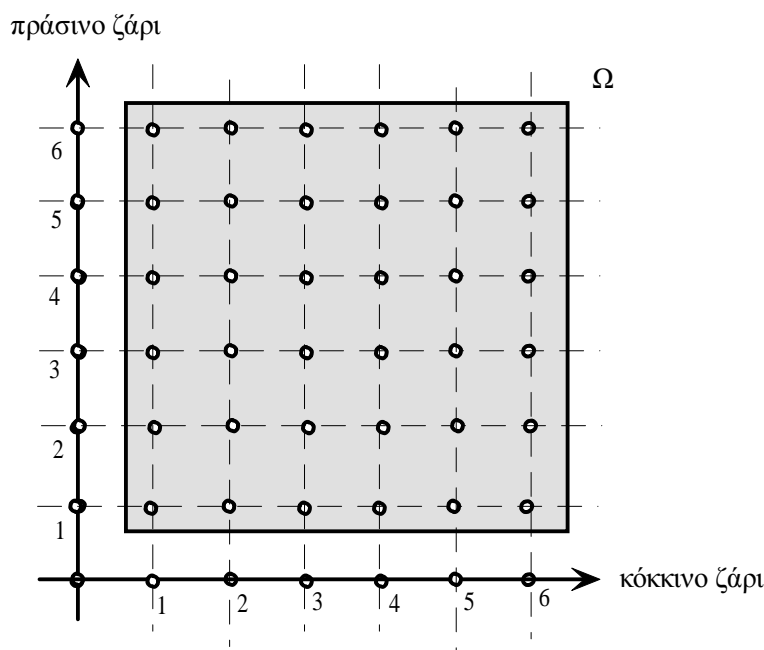
B: «Η ένδειξη του κόκκινου ζαριού να είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη του πράσινου».

Γ: «Το κόκκινο ζάρι φέρνει 6 και το πράσινο όχι».

Δ: «Το κόκκινο (πρώτο) ζάρι να φέρει αριθμό μεγαλύτερο του 4».

Απάντηση

Με τη βοήθεια του πιο κάτω δικτυωτού (καρτεσιανό γινόμενο), να υπολογίσετε το δειγματικό χώρο του πειράματος καθώς και τα ενδεχόμενα A , B και Γ .



Δειγματικός χώρος για τη ρίψη δύο ζαριών

Σημείωση. Στη λύση της άσκησης 4, χρησιμοποιείται πίνακας με κουκίδες. Μπορούμε βεβαίως να χρησιμοποιήσουμε και δεδροδιαγράμματα για να βρούμε το δειγματικό χώρο.

3.1.6.7 Ασκήσεις για το σπίτι

1. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι. Αποτελεί αυτό πείραμα τύχης;
2. Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης (ΝΑΙ/ΟΧΙ).
 - i) Θεωρούμε ότι ένας ηλεκτρικός διακόπτης λειτουργεί καλά. Ανοίγουμε το διακόπτη. Μας ενδιαφέρει αν θα ανάψει η λάμπα ή όχι. Να γίνει συζήτηση.
 - ii) Κατά τη γέννηση ενός παιδιού μας ενδιαφέρει αν θα γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.
 - iii) Ένας σκοπευτής πυροβολεί σε κάποιο στόχο. Μας ενδιαφέρει το σημείο που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα.
 - iv) Με κάποιο όργανο ακριβείας μέτρησης μήκους, μετράμε το πλάτος ενός παραθύρου.
3. Σ' έναν αγώνα τένις μεταξύ δύο παικτών A και B κερδίζει εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο.

4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές. Να γράψετε το ενδεχόμενο A: «τις τρεις πρώτες φορές να έρθει κεφαλή».
5. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές.
 - i) Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο
 - ii) Να γράψετε τα ενδεχόμενα:
 - A: να φέρουμε ακριβώς 3 φορές γράμματα
 - B: να φέρουμε τουλάχιστον 3 φορές γράμματα
 - Γ: να φέρουμε το πολύ 3 φορές γράμματα

3.2 Σενάριο 2ης ενότητας

3.2.1 Περιγραφή

Στο Κεφάλαιο αυτό πρώτα εισάγουμε την έννοια της σχετικής συχνότητας η οποία εκφράζει με θαυμάσιο τρόπο τη βασική έννοια της «στατιστικής ομαλότητας». Η πιθανότητα λοιπόν εκφράζει ένα είδος αφαίρεσης της σχετικής συχνότητας, με τον αριθμό των πειραμάτων να αυξάνει απερίοριστα. Στη συνέχεια διασυνδέεται η έννοια της πιθανότητας με τη στοιχειώδη έννοια του εμβადού. Δίνονται αρκετά παραδείγματα για να ισχυροποιηθεί αυτή η διασύνδεση. Η επόμενη και τελική διασύνδεση δίδεται μεταξύ της πιθανότητας και της εμπειρικής έννοιας της «μάζας». Το βασικό τυχαίο πείραμα είναι από τις Ρωμαϊκές κρήνες. Διασυνδέεται το πείραμα της Ρωμαϊκής κρήνης με τη σχετική συχνότητα. Επειδή ο αριθμός των μορίων είναι πολύ μεγάλος, η μάζα του νερού που εκρέει από μια εκροή πρακτικά συμπίπτει με τον όριο της σχετικής συχνότητας, δηλαδή με την πιθανότητα.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.2.2 Διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι:

Διαισθητική και αναλυτική προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας, και εξαγωγή του κλασσικού ορισμού της και των ιδιοτήτων της.

3.2.3 Διδακτικά μέσα και τρόποι επίτευξης των στόχων:

Σύμφωνα με την παιδαγωγική μας προσέγγιση, θα δοθεί εξίσου βάρος στη διαισθητική και την αναλυτικολογική κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας. Για το σκοπό αυτό έχουμε επιλέξει ένα ιδιαίτερο είδος οπτικοποίησης, που είναι το γεωμετρικό αναλογικό μοντέλο της πιθανότητας μέσω της έννοιας του εμβადού (ήδη γνωστής στα παιδιά). Ακόμα χρησιμοποιούνται ίδια ή παρόμοια παραδείγματα με αυτά της 1^{ης} ενότητας.

1. Πιθανότητα.
2. Ολοκλήρωση της έννοιας του τυχαίου πειράματος.
Δημιουργούμε προβληματισμό πάνω στην έννοια της πιθανότητας παρουσιάζοντας διαδοχικά τα πειράματα τύχης: κέρμα, ρουλέτα, βροχή, υλική ράβδος, ρωμαϊκή κρήνη.
3. Ορισμός της πιθανότητας μέσω της αναλυτικής παρουσίασης των πειραμάτων.
 - α) Τυχαίο πείραμα ρουλέτας; (τροχός τύχης;)
Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας με την έννοια του εμβადού.
 - β) Τυχαίο φαινόμενο της βροχής.
Χρησιμοποιώντας διάφορα γεωμετρικά σχήματα επάνω στο έδαφος συνδέουμε την έννοια της πιθανότητας με το εμβαδόν.
 - γ) Υλική ράβδος.
Σύνδεση της έννοιας της πιθανότητας με τη μάζα.
 - δ) Ρωμαϊκή κρήνη.
4. Σχετική συχνότητα - Ορισμός Πιθανότητας.
5. Η σχετική συχνότητα κατά την εκτέλεση τυχαίου πειράματος n – φορές.
(ανάρριψη κέρματος, κατασκευή πινάκων, παρατήρηση αποτελεσμάτων)
6. Εξαγωγή του ορισμού της έννοιας της πιθανότητας από το πείραμα της ρουλέτας για μεγάλο αριθμό δοκιμών.
7. Εξαγωγή του ορισμού της έννοιας της πιθανότητας με τη χρήση του εμβადού (πείραμα βροχής).

8. Ανακεφαλαίωση κλασσικού ορισμού πιθανότητας.
9. Νόμοι των πιθανοτήτων από τα παραδείγματα.

3.2.4 Ερωτήσεις

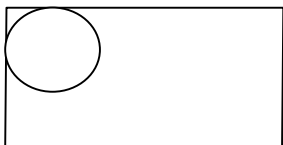
- α) Ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών,
- β) Αντιστοιχίσεις,
- γ) Συμπληρώσεις κενών σε προτάσεις.

3.2.5 Ασκήσεις (συνδυασμοί με τα άλλα κεφάλαια του Γυμνασίου).

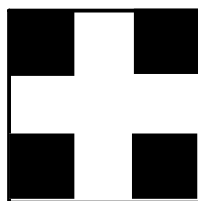
3.2.5.1 Εφαρμογές - Προβλήματα (Υπολογισμός εμβαδών κ.α.)

3.2.5.2 Ασκήσεις για το σπίτι

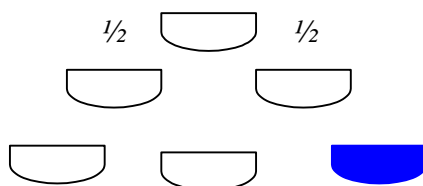
1. Στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται η ορθογώνια πλάκα μιας πλατείας με έναν κύκλο στο εσωτερικό της. Χρησιμοποιώντας το λόγο των εμβαδών να υπολογίσετε την πιθανότητα μια σταγόνα να πέσει στο εσωτερικό του ορθογωνίου όχι όμως στο εσωτερικό του κύκλου.



2. Μια μέρα βροχής παρακολουθούμε τις πλάκες του σχήματος. Ποια η πιθανότητα να πέσει μια σταγόνα σε ένα μαύρο τετράγωνο; Η κάθε πλάκα έχει τετράγωνο σχήμα και το κάθε μαύρο τετράγωνο έχει πλευρά όσο το ένα τρίτο της πλευράς της πλάκας.



3. Αν η πιθανότητα για μια σταγόνα στη Ρωμαϊκή κρήνη είναι $\frac{1}{2}$ για να πάει από τη δεξιά πλευρά της κούπας και $\frac{1}{2}$ για να πάει από την αριστερή πλευρά της, να υπολογιστεί η πιθανότητα για μια σταγόνα να φτάσει στη μπλέ κούπα.



4. Δίνεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα από την ανάρριψη ενός νομίσματος. Ο αριθμός 100 και πολύ περισσότερο ο 500 θεωρείται μεγάλος αριθμός ρίψεων. Το νόμισμα που χρησιμοποιήσαμε είναι «αμερόληπτο»; (Δηλαδή η πιθανότητα να έλθει Κ είναι ίδια με την πιθανότητα να έλθει Γ);

Ρίψεις	Κεφαλές
10	7
30	26
50	40
100	82
500	400

3.2.6 Φύλλο Εργασίας

Θέμα 1

- I) Για την πιθανότητα $P(A)$ ισχύει:
- $1 < P(A) < 2$
 - $P(A) > 1$
 - $P(A) < 0$
 - κανένα από τα προηγούμενα.
- II) Ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων είναι:
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - $P(AB) = P(A) + P(B)$
- III) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου, τότε ισχύει η ανισότητα.
- $$2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$
- Σ ☐ Λ ☐
- IV) Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = P(B)$ τότε $A = B$.
- Σ ☐ Λ ☐

Θέμα 2

Μία κληρωτίδα περιέχει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10. Παίρνουμε στη τύχη ένα αριθμό. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $\Gamma = \{\text{αριθμός άρτιος}\}$ και $\Delta = \{\text{αριθμός μικρότερος από το 4}\}$.

Θέμα 3

Η πιθανότητα να κρυολογήσουμε την άνοιξη είναι τριπλάσια από του να μη κρυολογήσουμε. Να βρεθεί η πιθανότητα να κρυολογήσουμε.

Θέμα 4

Πότε η έννοια της Πιθανότητας εμφανίσθηκε στην Ιστορία και ποια η εξελιγή της.

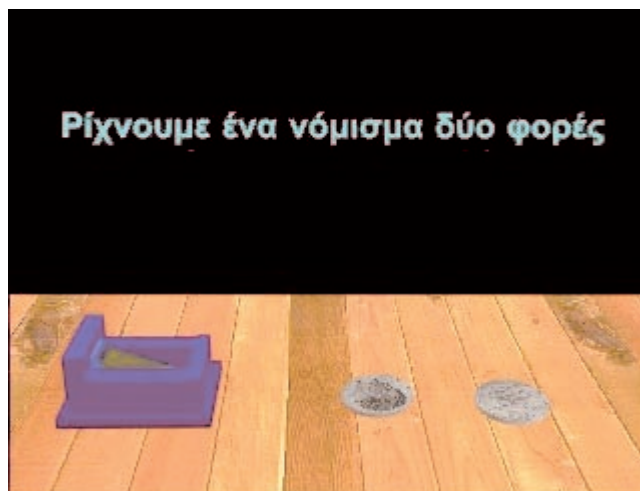
Απαντήσεις

1. I) Δ
II) Γ
III) Σ
IV) Λ
2. $P(\Gamma)=1/2$
 $P(\Delta)=3/10$
3. $P(A)=3/4$

3.2.7 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή**3.2.7.1 Εισαγωγή**

Στο Κεφάλαιο αυτό πρώτα εισάγουμε την έννοια της σχετικής συχνότητας η οποία εκφράζει με θαυμάσιο τρόπο τη βασική έννοια της «στατιστικής ομαλότητας». Η πιθανότητα λοιπόν εκφράζει ένα είδος αφαίρεσης της σχετικής συχνότητας, με τον αριθμό των πειραμάτων να αυξάνει απεριόριστα. Στη συνέχεια διασυνδέεται η έννοια της πιθανότητας με τη στοιχειώδη έννοια του εμβადού. Δίνονται αρκετά παραδείγματα για να ισχυροποιηθεί αυτή η διασύνδεση. Η επόμενη και τελική διασύνδεση δίδεται μεταξύ της πιθανότητας και της εμπειρικής έννοιας της «μάζας». Το βασικό τυχαίο πείραμα είναι από τις Ρωμαϊκές κρήνες. Διασυνδέεται το πείραμα της Ρωμαϊκής κρήνης με τη σχετική συχνότητα. Επειδή ο αριθμός των μορίων είναι πολύ μεγάλος, η μάζα του νερού που εκρρέει από μια εκρροή πρακτικά συμπίπτει με τον όρο της σχετικής συχνότητας, δηλαδή με την πιθανότητα.

3.2.7.2 Η Έννοια της Πιθανότητας



Ας θεωρήσουμε ξανά το παράδειγμα της ανάρριψης 2 αμερόληπτων νομισμάτων. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: $\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$. Είναι φανερό ότι το ενδεχόμενο $\{KK\}$ έχει «μικρότερη πιθανότητα» να εμφανιστεί από ότι το $\{KK, KG, GK, GG\}$, αφού στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα του πειράματος θα πρέπει να είναι οπωσδήποτε KK , ενώ στη δεύτερη περίπτωση το αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να είναι KK ή KG ή GK ή GG , δηλαδή το δεύτερο ενδεχόμενο είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Έτσι λοιπόν αφού υπάρχουν ενδεχόμενα με μικρότερη ή μεγαλύτερη πιθανότητα, υπάρχει η ανάγκη να μπορούμε να «μετρήσουμε την τυχαιότητα», το πόσο τυχαίο είναι δηλαδή ένα αυθαίρετο ενδεχόμενο. Αν τώρα στρίβουμε ένα νόμισμα όλο και περισσότερες φορές παρατηρούμε ένα είδος «στατιστικής ομαλότητας», δηλαδή ο αριθμός π.χ. των κεφαλών που εμφανίζονται σταθεροποιείται και τείνει να ο μισός του αριθμού των πειραμάτων. Από την ιστορία των μαθηματικών έχουμε την πληροφορία ότι οι Buffon και Pearson είχαν την υπομονή να στρίψουν ένα νόμισμα χιλιάδες φορές. Το αποτέλεσμα είναι αυτό που φαίνεται στον πίνακα:

	Αριθμός ρίψεων	Αριθμός κεφαλών
Buffon	4040	2048
Karl Pearson	12.000	6019
Karl Pearson	24.000	12.012

Δηλαδή στις 4040 ρίψεις ο αριθμός των κεφαλών είναι 2048 (2048 κεφαλές στις 4040 ρίψεις) ή

$$\frac{2048}{4040} = 0,5069$$

Που δείχνει ότι ο αριθμός των κεφαλών είναι περίπου 50%.

Ορισμός

Αυτός ο αριθμός $0,5069 = \text{Αριθμός κεφαλών} / \text{Αριθμός ρίψεων}$ λέγεται σχετική συχνότητα της εμφάνισης του Κ.

Έτσι λοιπόν βλέπουμε τον πίνακα που δείχνει τις σχετικές συχνότητες αυτών των ρίψεων.

	Αριθμός ρίψεων	Αριθμός κεφαλών	Σχετική συχνότητα
<i>Buffon</i>	4040	2048	0,5069
<i>Karl Pearson</i>	12.000	6019	0,5016
<i>Karl Pearson</i>	24.000	12.012	0,5005

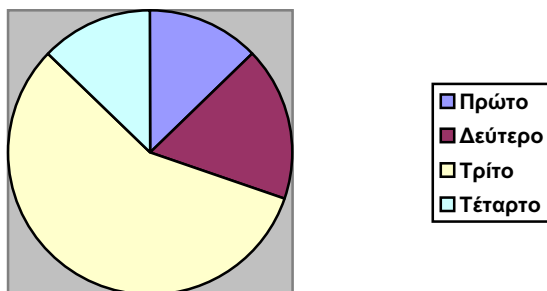
Ας μελετήσουμε τον επόμενο πίνακα που μας δείχνει τη σχετική συχνότητα να έλθει κεφαλή σταδιακά από τις 10, 20, 30 ... 200 ρίψεις. Θα παρατηρήσουμε ότι για μεγάλο αριθμό ρίψεων το ποσοστό των κεφαλών σταθεροποιείται γύρω στο 50%.

3.2.7.3 Ρίψεις	Κεφαλές	Σχετική Συχνότητα	Ποσοστό
10	7	0,700	70%
20	13	0,650	65%
30	16	0,533	53%
40	23	0,576	58%
50	26	0,520	52%
80	39	0,488	49%
100	46	0,460	46%
120	61	0,508	50%
140	70	0,500	50%
160	81	0,506	51%
180	89	0,494	50%
200	99	0,495	50%
.....
4040	2048	0,507	50%
12000	6019	0,501	50%
24000	12012	0,500	50%

Παράδειγμα

Μια βασιλόπιτα είναι κομμένη σε άνισα κομμάτια και το φλουρί βρίσκεται μόνο σε 1 κομμάτι. Εσείς ποιο κομμάτι θα διαλέγατε; Ασφαλώς το μεγαλύτερο. Δηλαδή

Το Εμβαδόν έχει άμεση σχέση με την πιθανότητα



Παράδειγμα

Βρισκόμαστε σε μια πλατεία μια βροχερή ημέρα. Παρατηρούμε τι γίνεται σε μία από τις πλάκες της πλατείας. Η πλάκα όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ορθογώνια και



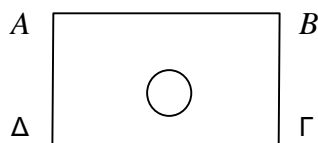
κάπου στο εσωτερικό της υπάρχει ένας κύκλος. Μετράμε τις σταγόνες που πέφτουν μέσα σε ολόκληρο το ορθογώνιο (πλάκα) και τον αριθμό των σταγόνων που πέφτουν μέσα στον κύκλο και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Σταγόνες στο ορθογώνιο	Σταγόνες στον κύκλο
10	2
100	12
500	52
1000	104
10.000	1043

Όπως φαίνεται η σχετική συχνότητα για μεγάλο αριθμό σταγόνων σταθεροποιείται γύρω στο 10%.

Άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα δίδονται: $AB=100\text{cm}$, $B\Gamma=31,4\text{cm}$ και $\rho=10\text{cm}$. Αν υποθέσουμε ότι $\pi=3,14$ να υπολογίσετε την πιθανότητα να πέσει η σταγόνα της βροχής μέσα στον κύκλο.

**Απάντηση**

Υπολογίζουμε: $E_{\text{ορθ.}} = (AB) \times (B\Gamma) = 100 \times 31,4 = 3140 \text{ cm}^2$

$E_{\text{κυκλ.}} = \pi \rho^2 = 3,14 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$.

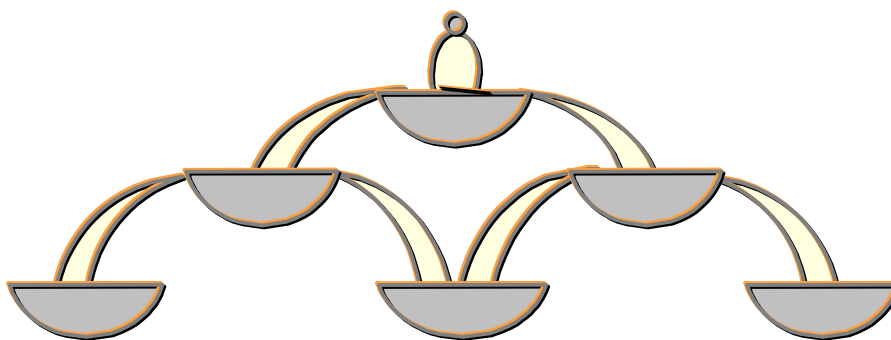
Η σχέση του εμβαδού του κύκλου με το εμβαδόν του ορθογωνίου υπολογίζεται από το κλάσμα $\frac{\text{Εμβαδόν κύκλου}}{\text{Εμβαδόν ορθογωνίου}}$

δηλαδή $E_{\text{κυκλ.}}/E_{\text{ορθ.}} = 314/3140 = 1/10 = 0,10$.

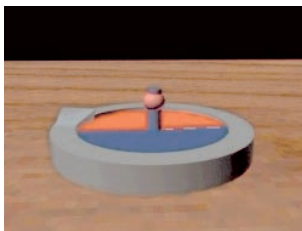
Άρα η πιθανότητα να πέσει μέσα στον κύκλο είναι 10%.

3.2.7.4 Πειράματα με δύο δυνατά αποτελέσματα

Ας παρατηρήσουμε τη Ρωμαϊκή κρήνη όπως φαίνεται στο σχήμα:



Στη Ρωμαϊκή κρήνη βλέπουμε ότι το τυχαίο πείραμα της ροής ενός μορίου νερού και η ανάρριξη ενός νομίσματος είναι στην πραγματικότητα όμοια τυχαία πειράματα. Έχουν δηλαδή και τα δύο πειράματα ΔΥΟ δυνατά αποτελέσματα.

Άσκηση

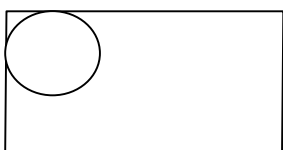
Έχουμε έναν δίχρωμο τροχό χωρισμένο σε 2 ημικύκλια το κόκκινο και το μαύρο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να έλθει μαύρο χρησιμοποιώντας το λόγο των εμβαδών.

Απάντηση

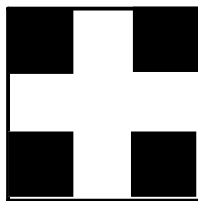
$$\text{Εμβαύρ.ημ/ Εκυκλ.δ.} = 1/2\pi r^2/\pi r^2 = 1/2 = 0,5$$

3.2.7.5 Ασκήσεις για το σπίτι

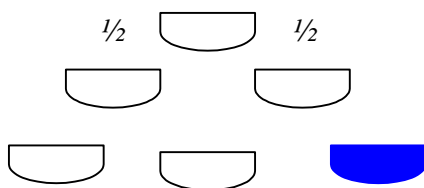
1. Στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται η ορθογώνια πλάκα μιας πλατείας με έναν κύκλο στο εσωτερικό της. Χρησιμοποιώντας το λόγο των εμβαδών να υπολογίσετε την πιθανότητα μια σταγόνα να πέσει στο εσωτερικό του ορθογωνίου όχι όμως στο εσωτερικό του κύκλου.



2. Μια μέρα βροχής παρακολουθούμε τις πλάκες του σχήματος. Ποια η πιθανότητα να πέσει μια σταγόνα σε ένα μαύρο τετράγωνο; Η κάθε πλάκα έχει τετράγωνο σχήμα και το κάθε μαύρο τετράγωνο έχει πλευρά όσο το το ένα τρίτο της πλευράς της πλάκας.



3. Αν η πιθανότητα για μια σταγόνα στη Ρωμαϊκή κρήνη είναι $\frac{1}{2}$ για να πάει από τη δεξιά πλευρά της κούπας και $\frac{1}{2}$ για να πάει από την αριστερή πλευρά της, να υπολογιστεί η πιθανότητα για μια σταγόνα να φτάσει στη μπλέ κούπα.



4. Δίνεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα από την ανάρριψη ενός νομίσματος. Ο αριθμός 100 και πολύ περισσότερο ο 500 θεωρείται μεγάλος αριθμός ρίψεων. Το νόμισμα που χρησιμοποιήσαμε είναι «αμερόληπτο»; (Δηλαδή η πιθανότητα να έλθει K είναι ίδια με την πιθανότητα να έλθει Γ);

Ρίψεις	Κεφαλές
10	7
30	26
50	40
100	82
500	400

3.3 Σενάριο 3ης ενότητας .

3.3.1 Περιγραφή

Στην ενότητα θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την ιδέα της πιθανοθεωρητικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας μεταξύ δύο ενδεχομένων.

Επίσης θα επεκτείνουμε τη κλασσική έννοια της πιθανότητας στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας και θα παρακολουθήσουμε τη δυνατότητα εφαρμογής της θεωρίας στην καθημερινή ζωή.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.3.2 Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι:

Ο γενικός γνωστικός στόχος αυτής της ενότητας είναι η προσέγγιση στην ιδέα της πιθανοθεωρητικής εξάρτησης καθώς και της ανεξαρτησίας μεταξύ δύο ενδεχομένων. Επιμέρους διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι είναι:

- α) Ο κλονισμός της πεποίθησης ότι δύο ενδεχόμενα είναι πάντοτε ανεξάρτητα μεταξύ τους, ή το αντίθετο, ότι είναι πάντοτε εξαρτημένα μεταξύ τους.
- β) Η επέκταση της κλασσικής έννοιας της πιθανότητας στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας.
- γ) Η πρακτική εφαρμογή της θεωρίας στην καθημερινή ζωή και το κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών.

3.3.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων:

- α) Παρουσίαση και ανάδειξη του ζητήματος μέσα από παραδείγματα και καταστάσεις οικείες στους μαθητές.
- β) Χρήση ενός παραδείγματος στο μοντέλο του εμβადού για την οπτικοποίηση της έννοιας των ανεξάρτητων ενδεχομένων.
- γ) Ετυμολογική προσέγγιση στους όρους με αντίστοιχη εννοιολογική ανάλυση.
- δ) Χρήση δένδροδιαγραμμάτων για λογική ανάλυση των ενδεχομένων σε διάφορες «φάσεις» (δένδροδιαγράμματα τριών σταδίων).

- 1. Δεσμευμένη Πιθανότητα.
- 2. Διαισθητική παρουσίαση δεσμευμένης πιθανότητας με χρήση του πειράματος βροχής και τη χρήση διαφορετικών διαφραγμάτων σε διαφορετικές θέσεις. Μας ενδιαφέρουν οι σταγόνες της βροχής που θα διέλθουν και από τα δύο διαφράγματα.
- 3. Ανάρριψη τριών αμερόληπτων νομισμάτων.
Επισήμανση της μη δεσμευμένης $P(K,K,K)$ να έρθουν τρεις κεφαλές και της δεσμευμένης $P(K,K,K)$ όταν ξέρουμε ότι το πρώτο νόμισμα είναι κεφαλή.
- 4. Ορισμός Δεσμευμένης Πιθανότητας - Ετυμολογική προσέγγιση.
- 5. Παραδείγματα. Ανάλυση της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας.

Ανάδειξη του ζητήματος ότι κάθε πιθανότητα P μπορεί να θεωρηθεί ως δεσμευμένη πιθανότητα με το πείραμα της βροχής.

6. Επαναληπτικές δεσμευμένες πιθανότητες.
7. Ανεξαρτησία ενδεχομένων.
8. Πείραμα ανάρριψης τριών νομισμάτων.
9. Παρουσίαση δένδροδιαγράμματος τριών σταδίων.
10. Παραδείγματα και υπολογισμός Δεσμευμένης Πιθανότητας με τη βοήθεια δένδροδιαγραμμάτων.
11. Ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων - Ετυμολογική προσέγγιση.
Πάλι το τυχαίο πείραμα της βροχής και χρησιμοποίηση κατάλληλων διαφραγμάτων.
12. Νόμοι Δεσμευμένης Πιθανότητας.
13. Ορισμός, Παραδείγματα, Ασκήσεις.

3.3.4 Ασκήσεις για το σπίτι

Να λυθούν οι ασκήσεις που δεν είναι απαντημένες.

3.3.4.1 Ερωτήσεις πολλαπλής Επιλογής.

1. Αν $P(A \cap B) = 0,4$ και $P(A) = 0,9$ τότε $P(B/A) =$
 Α. 0,4/0,9 Β. 0,4/0,9 Γ. 0,9/0,4 Δ. 0,9 Ε. 0,4

Απάντηση.

Το Β

2. Αν $P(A \cap B) = 20\%$, $P(B) = 80\%$ και τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα τότε $P(A/B) =$;

Α. 0,25 Β. 0,8 Γ. 0,4 Δ. 0,2

Απάντηση.

Το Α.

3. Αν Α είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A/\Omega) =$
 Α. 1 Β. $P(A)$ Γ. $1/P(A)$ Δ. $(P(A))^3$

3.3.4.2 Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού.

1. Αν Γ, Δ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε η $P(\Gamma/\Delta)$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$P(\Gamma/\Delta) = \boxed{} \text{ ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του } \boxed{}$$

Με δεδομένο το $\boxed{}$

2. Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα αν

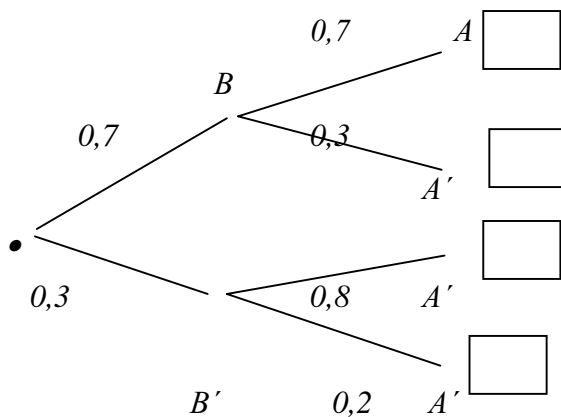
$$P(A \cap B) = \boxed{}$$

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B ισχύει η σχέση.

$$P(A \cup B) = \boxed{}$$

3. Αν $P(A)=0,8$, $P(B)=\boxed{}$ και $P(A \cap B)=0,16$ και τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα

4. Με βάση το παρακάτω δενδροδιάγραμμα συμπληρώστε τα κενά.



3.3.4.3 Ασκήσεις Ανάπτυξης

1. Αν $P(A \cap B) = 0,18$ και $P(B) = 0,3$ και $P(A) = 0,6$. Να βρείτε $P(A/B)$ και $P(B/A)$.

Απάντηση.

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0,18 / 0,3 = 0,6$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 0,18 / 0,6 = 0,3$$

2.Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A.«ένας οδηγός δίκυκλου δεν φορούσε κράνος ενώ οδηγούσε.

B.«ένας οδηγός τραυματίστηκε σε τροχαίο ατύχημα»

Να γράψετε με λόγια τις παρακάτω πιθανότητες.

I) $P(A/B)$ II) $P(B/A)$

3. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη ενδεχομένων είναι ανεξάρτητα

i)Επιλέγουμε ένα άνθρωπο στη τύχη.

A.: «Το επάγγελμά του είναι καθηγητής»

B.: «έχει πράσινα μάτια»

ii) Επιλέγουμε ένα άνθρωπο στη τύχη

A.: «είναι πλούσιος»

B.: «έχει αυτοκίνητο BMW»

4. Αν για τα ενδεχόμενα Γ και Δ ισχύει

$P(\Gamma)=1/3$, $P(\Delta)=1/8$ και $P(\Gamma/\Delta)=1/5$.

Τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες

I) $P(\Gamma \cap \Delta)$ ii) $P(\Gamma \cup \Delta)$

5. Αν A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και $P(A)=0,7$ και $P(B)=0,74$ τότε να βρείτε τις πιθανότητες

i) $P(A/B)$ ii) $P(A \cup B)$ iii) $P(B/A)$ iv) $P(A \cap B)$

6. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα με

$P(A)=1/4$, $P(A \cup B)=1/3$ και $P(B)=\chi$, τότε

Να βρεθεί το χ αν τα A και B είναι ανεξάρτητα.

7. Ας υποθέσουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα με $P(A)<P(B)$, $P(A \cap B)=6/25$ και $P(A/B)+P(B/A)=1$.

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

8. Μπορεί ένα ενδεχόμενο να είναι ανεξάρτητο με τον εαυτό του.

9. Αν $P(A \cap B) \neq 0$ και $P(A) > P(B)$ τότε είναι $P(A/B) > P(B/A)$

3.3.5 Φύλλο Εργασίας**Θέμα 1**

- I. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.
- α. Κ «Ένα άτομο είναι μανιώδης πότης»
Δ «Ένα άτομο θα προσβληθεί από ασθένεια του ήπατος.»
 - β. Ε «Το απόγευμα θα πάω στην Αθήνα»
Ζ «Η εκκλησία του χωριού είναι μεγάλη»
 - γ. Η «Έχω πολλά χρήματα σήμερα»
Θ «θα πάω στο Μουσείο τη Κυριακή»
- II. Αν Γ είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(\Gamma/\Omega)=$
- α. 2
 - β. $P(\Gamma)$
 - γ. $1/P(\Gamma)$
 - δ. $(P(\Gamma))^2$

Θέμα 2

Αν $P(A \cap B) = 0,18$ και $P(B) = 0,3$ και $P(A) = 0,6$ να βρείτε την $P(A/B)$ και την $P(B/A)$.

Θέμα 3

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

- A. «ένας οδηγός δίκυκλου δεν φορούσε κράνος ενώ οδηγούσε.»
- B. «ένας οδηγός τραυματίστηκε σε τροχαίο ατύχημα»

Να γράψετε με λόγια τις παρακάτω πιθανότητες.

- I) $P(A/B)$
- II) $P(B/A)$

Θέμα 4

Περιγράψτε με ένα δικό σας παράδειγμα την έννοια της δεσμευμένης Πιθανότητας. Αν δε μπορείτε να βρείτε σκεφτείτε ένα αυτοκίνητο με ηλιοροφή.

Απαντήσεις

- 1. I) β
- II) β
- 2. $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0,18 / 0,3 = 0,6$
 $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 0,18 / 0,6 = 0,3$

3.3.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή

3.3.6.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την ιδέα της πιθανοθεωρητικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας μεταξύ δύο ενδεχομένων.

Επίσης θα επεκτείνουμε τη κλασσική έννοια της πιθανότητας στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας και θα παρακολουθήσουμε τη δυνατότητα πραγματικών εφαρμογών στη καθημερινή ζωή και στο κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών.

3.3.6.2 Δεσμευμένη Πιθανότητα.

Παράδειγμα

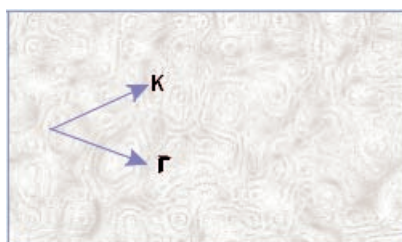
Ας ρίξουμε δύο ίδια μεταξύ τους νομίσματα. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος;

Απάντηση

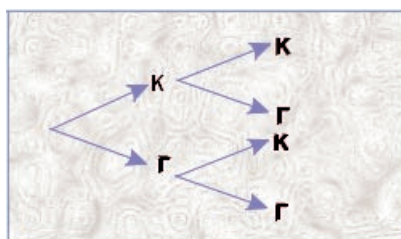
$$\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$$

Ας δούμε εν συνεχεία το δενδροδιάγραμμα του δειγματικού χώρου.

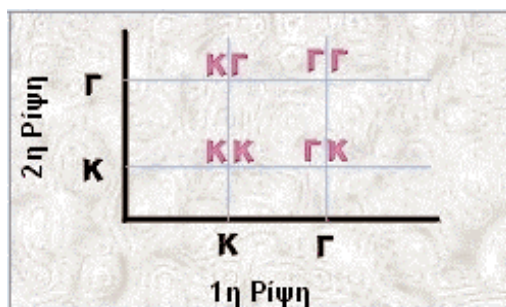
Η 1^η ρίψη έχει δύο δυνατότητες Κεφάλι – Γράμματα.



Η 2^η ρίψη έχει πάλι δύο δυνατότητες Κεφάλι – Γράμματα



Μπορούμε όμως να αναπαραστήσουμε τον δειγματικό χώρο σε ορθογώνιο σύστημα



Εδώ ο δειγματικός μας χώρος αποτελείται από ενδεχόμενα πιο σύνθετα. Καθένα από αυτά αποτελείται από δύο απλά ενδεχόμενα.

Παράδειγμα

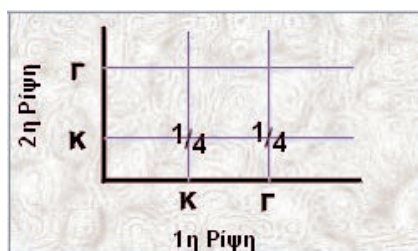
Ποια είναι η πιθανότητα και στα δύο κέρματα να έχουμε κεφαλές; Δηλαδή το $P(KK)$; Ποια η πιθανότητα να έχουμε Γράμματα στο ένα και Κεφάλι στο άλλο; Δηλαδή το $P(ΓΚ)$;

Απάντηση

$$P(KK)=1/4$$

$$P(ΓΚ)=1/4$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η αναπαράσταση είναι:



Παράδειγμα

Αν γνωρίζουμε ότι σε ένα τέτοιο σύνθετο ενδεχόμενο το πρώτο γράμμα είναι Κ,

Ποιος θα είναι ο δειγματικός χώρος Ω ;

Ποια ενδεχόμενα δεν μας ενδιαφέρουν;

Απάντηση

$$\Omega' = \{KK, K\Gamma\}$$

Δεν μας ενδιαφέρουν τα ενδεχόμενα ΓΚ, ΓΓ

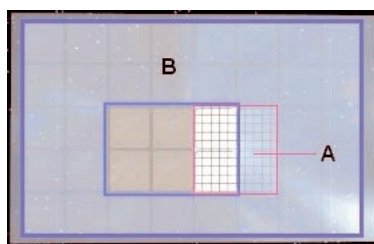
Παράδειγμα

Αν ήδη ξέρουμε ότι το πρώτο νόμισμα έχει δώσει κεφάλι ποια είναι η πιθανότητα και το δεύτερο να είναι κεφάλι;

Απάντηση

Αφού έχουμε μία δυνατότητα η πιθανότητα είναι $1/4$.

Μας ενδιαφέρει ξανά η πιθανότητα να πέσει μια σταγόνα στο A με την προϋπόθεση φυσικά ότι έχει περάσει από το διάφραγμα B . Δηλαδή η $P(A/B)$



Η πιθανότητα λοιπόν για μια σταγόνα να φτάσει στο A αφού έχει περάσει από το B είναι δύο προς έξι. Ή γενικά

$$P(A/B) = \frac{K1}{K2} = \frac{K3}{K4}$$

όπου

$$K1 = \text{Εμβαδόν } (A \cap B)$$

$$K2 = \text{Εμβαδόν } (B)$$

$$K3 = P(A \cap B)$$

$$K4 = P(B)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτή η πιθανότητα καλείται Δεσμευμένη και τη συμβολίζουμε $P(A/B)$.

Και εκφωνείται δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A δοθέντος ότι έχει εμφανιστεί το ενδεχόμενο B ή απλά δοθέντος του B .

Παράδειγμα

Έστω τα ενδεχόμενα

A: «Ο Γιώργος έχει χρήματα»

B: «Ο Γιώργος θα πάει κινηματογράφο»

Πώς θα διατυπώσουμε με λόγια το $P(B/A)$;

Απάντηση

Ο Γιώργος θα πάει κινηματογράφο διότι έχει χρήματα.

Παράδειγμα

Αν σκεφτόμαστε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με το εμβαδόν του, όπως στην περίπτωση των διαφραγμάτων, συμπληρώστε τα κενά

$P(A/B)=$;

$P(B/A)=$;

Απάντηση

Διαπιστώνουμε ότι

$P(A/B)= 2/6$

$P(B/A)= 2/4$

Παρατηρήσεις

Ας ξανάρθουμε στην περίπτωση της βροχής, για να εξετάσουμε τι θα γίνει αν το διάφραγμα B αρχίσει να μεγαλώνει μέχρι να γίνει ίσο με το Ω ή να το ξεπεράσει.

Ποια είναι τώρα η $P(A/B)$ και ποια η $P(A)$;

Από το σχήμα φαίνεται

$P(A/B)=6/40$

$P(A)=6/40$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ταυτίζεται με την κανονική πιθανότητα.

Ορισμός

Αν τοποθετήσουμε τώρα και ένα δεύτερο διάφραγμα πάνω από το B, ποια είναι η πιθανότητα μια σταγόνα να φτάσει στο A;

Είναι

$P(A/B/G)=P(A \cap (B/G))/P(B/G)$

3.3.6.3 Ανεξαρτησία Ενδεχομένων.

Παράδειγμα

Ο Γιώργος και ο Γιάννης έχουν βγει για την Κυριακάτικη βόλτα τους και ταλαντεύονται μεταξύ τριών δυνατοτήτων. Να πάνε κινηματογράφο, ζαχαροπλαστείο ή στο κουκλοθέατρο. Έτσι αποφασίζουν να το αφήσουν στην τύχη. Επειδή όμως θέλουν να δώσουν ένα προβάδισμα στον κινηματογράφο, γράφουν σε 2 χαρτάκια «κινηματογράφος», σε 1 «κουκλοθέατρο» και σε 1 «ζαχαροπλαστείο». Ρίχνουν τα 4 χαρτάκια σε ένα κουτί και τραβούν ένα.

Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε στον κινηματογράφο;

Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε στο κουκλοθέατρο;

Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε στο ζαχαροπλαστείο;

Απάντηση

Η πιθανότητα να πάνε στον κινηματογράφο είναι: $2/4$

Η πιθανότητα να πάνε στο κουκλοθέατρο είναι: $1/4$

Η πιθανότητα να πάνε στο ζαχαροπλαστείο είναι: $1/4$

Ορισμός

Το ενδεχόμενο να πάνε ο Γιώργος και ο Γιάννης κινηματογράφο μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο αν έχουν χρήματα.

Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι **εξαρτημένα** μεταξύ τους

Συμβολικά γραμμένα τα ενδεχόμενα:

A: Ο Γιώργος και ο Γιάννης πάνε κινηματογράφο

B: Ο Γιώργος και ο Γιάννης έχουν χρήματα

Τα A και B είναι εξαρτημένα μεταξύ τους

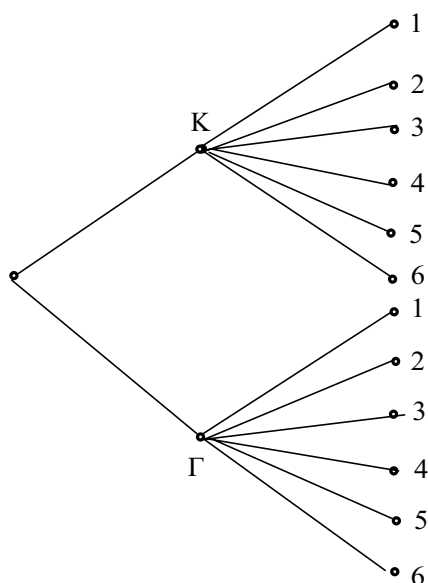
Ρίχνουμε τώρα ένα κέρμα και μετά ένα ζάρι. Παρατηρούμε το ενδεχόμενο το ζάρι να φέρει άρτιο αριθμό δεν επηρεάζεται καθόλου από το τι έχει φέρει το κέρμα (Κεφάλι ή Γράμματα)

Τα δύο ενδεχόμενα θα λέμε ότι είναι **ανεξάρτητα**

Παράδειγμα

Αν διατυπώσουμε ένα νέο ενδεχόμενο: να έχουμε Κεφάλι και άρτιο αριθμό

Φτιάξτε το δένδροδιάγραμμα και προσπαθήστε να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού

Απάντηση

Έστω το Ενδεχόμενο X : Εμφανίζεται Κεφάλι και άρτιος αριθμός

$$P(X) = 1/6 \quad \text{δηλαδή} \quad P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Γενικά όταν έχουμε δύο ενδεχόμενα ανεξάρτητα το ένα A και το άλλο B , η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A και B είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A επί την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B . Δηλαδή

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τον ίδιο τύπο από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας

Απάντηση

$$\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$$

$$\text{Οπότε} \quad P(A \cap B) = 2/12 = 1/6$$

3.3.6.4 Ασκήσεις για το σπίτι

Να λυθούν οι ασκήσεις που δεν είναι απαντημένες.

3.3.6.4.1 Ερωτήσεις πολλαπλής Επιλογής

1. Αν $P(A \cap B) = 0,4$ και $P(A) = 0,9$ τότε

$P(B/A) =$

A. 0,4/0,9 B. 0,4/0,9 Γ. 0,9/0,4 Δ. 0,9 E. 0,4

Απάντηση.

Το B

2. Αν $P(A \cap B) = 20\%$, $P(B) = 80\%$ και τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα τότε $P(A/B) =$;

A. 0,25 B. 0,8 Γ. 0,4 Δ. 0,2

Απάντηση.

Το A.

3. Αν A είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A/\Omega) =$

A. 1 B. $P(A)$ Γ. $1/P(A)$ Δ. $(P(A))^3$

3.3.6.4.2 Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

1. Αν Γ, Δ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε η $P(\Gamma/\Delta)$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$P(\Gamma \cap \Delta) = \boxed{}$ ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του $\boxed{}$

Με δεδομένο το $\boxed{}$

2. Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα αν

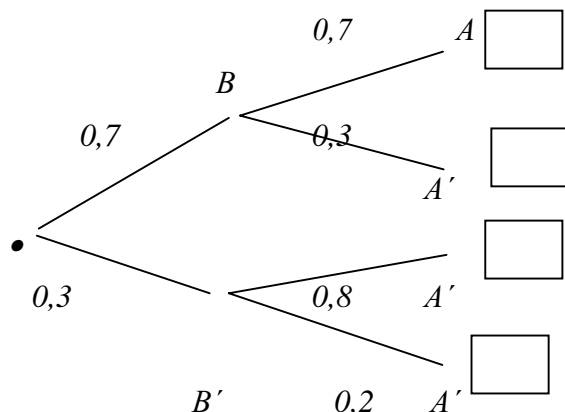
$P(A \cap B) = \boxed{}$

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B ισχύει η σχέση.

$$P(A \cup B) = \boxed{}$$

3. Αν $P(A)=0,8$, $P(B)=\boxed{}$ και $P(A \cap B)=0,16$ και τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα

4. Με βάση το παρακάτω δένδροδιάγραμμα συμπληρώστε τα κενά.



3.3.6.4.3 Ασκήσεις Ανάπτυξης

1. Αν $P(A \cap B) = 0,18$ και $P(B) = 0,3$ και $P(A) = 0,6$. Να βρείτε $P(A/B)$ και $P(B/A)$.

Απάντηση.

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0,18 / 0,3 = 0,6$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 0,18 / 0,6 = 0,3$$

2. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A. «ένας οδηγός δικυκλου δεν φορούσε κράνος ενώ οδηγούσε.

B. «ένας οδηγός τραυματίστηκε σε τροχαίο ατύχημα»

Να γράψετε με λόγια τις παρακάτω πιθανότητες.

I) $P(A/B)$ II) $P(B/A)$

3. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη ενδεχομένων είναι ανεξάρτητα

i) Επιλέγουμε ένα άνθρωπο στη τύχη.

A. : «Το επάγγελμά του είναι καθηγητής»

B : «έχει πράσινα μάτια»

ii) Επιλέγουμε ένα άνθρωπο στη τύχη

A : «είναι πλούσιος»

B : «έχει αυτοκίνητο BMW»

4. Αν για τα ενδεχόμενα Γ και Δ ισχύει

$$P(\Gamma)=1/3, P(\Delta)=1/8 \text{ και } P(\Gamma/\Delta)=1/5.$$

Τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$i) P(\Gamma \cap \Delta) \text{ ii) } P(\Gamma \cup \Delta)$$

5. Αν A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και $P(A)=0,7$ και $P(B)=0,74$ τότε να βρείτε τις πιθανότητες

$$i) P(A/B) \text{ ii) } P(A \cup B) \text{ iii) } P(B/A) \text{ iv) } P(A \cap B)$$

6. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα με

$$P(A)=1/4, P(A \cup B)=1/3 \text{ και } P(B)=\chi, \text{ τότε}$$

Να βρεθεί το χ αν αν τα A και B είναι ανεξάρτητα.

7. Ας υποθέσουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα με $P(A)<P(B)$, $P(A \cap B)=6/25$ και $P(A/B)+P(B/A)=1$.

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

8. Μπορεί ένα ενδεχόμενο να είναι ανεξάρτητο με τον εαυτό του.

9. Αν $P(A \cap B) \neq 0$ και $P(A) > P(B)$ τότε είναι $P(A/B) > P(B/A)$

3.4 Σενάριο 4ης Ενότητας

3.4.1 Περιγραφή

Στόχος της ενότητας είναι η παρουσίαση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Θα χρησιμοποιήσουμε πειράματα που έχουν ήδη γίνει οικεία στους μαθητές από τις προηγούμενες ενότητες και παραπέρα επεξεργασία τους με τη βοήθεια πινάκων και ιστογραμμάτων. Η προσέγγιση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής θα γίνει μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων και θα παρουσιαστεί η έννοια της κατανομής πιθανότητας με διαγράμματα, ραβδογράμματα και ιστογράμματα. Τέλος με παράδειγμα θα περιγραφούν όλα τα χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.4.2 Διδακτικός & μαθησιακός στόχος

Μια πρώτη συγκρότηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής.

3.4.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης του στόχου

Χρήση πειραμάτων που έχουν ήδη γίνει οικεία στους μαθητές από τις προηγούμενες ενότητες και παραπέρα επεξεργασίας τους με τη βοήθεια πινάκων και ιστογραμμάτων. Η έννοια και τα χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών αναμένεται να προκύψουν μέσα από τα συγκεκριμένα αυτά αλλά κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα.

1. Τυχαία μεταβλητή

Η τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που σχετίζεται με τυχαία πειράματα. Είναι λοιπόν ευκαιρία για τον διδάσκοντα να επιμείνει στην κατανόηση αυτής της έννοιας με διάφορους τρόπους, όπως π.χ. ο εικονικός τρόπος που περιγράφεται στο βιβλίο του μαθητή.

2. Παράδειγμα ρίψης κέρματος δύο φορές

Δημιουργία πίνακα δειγματικού χώρου και ορισμός επ' αυτού της τυχαίας μεταβλητής που απαριθμεί τον αριθμό των κεφαλών.

3. Περιγραφή της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής με τη βοήθεια του πειράματος ανάρριψης ενός αμερόληπτου ζαριού δύο φορές.

4. Δειγματικός χώρος - Διάφορα ενδεχόμενα - Υπολογισμός των πιθανοτήτων.

5. Πείραμα με λευκές και κόκκινες σφαίρες και επιλογή 3 σφαιρών χωρίς επανάθεση.

6. Προσέγγιση της έννοιας της κατανομής.

7. Χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών.

8. Παραδείγματα

α) Ανάρριψη κέρματος

β) Πείραμα επιλογής τυχαίου μαθητή με ύψος που να ανήκει σε συγκεκριμένο διάστημα (π.χ. 1,60 - 1,65).

3.4.4 Ασκήσεις

- Αντιστοιχίσεις
- Γεμίσματα κενών
- Ερωτήσεις Πολ/πλών επιλογών
- Ασκήσεις
- Προβλήματα.

Άσκηση 1

Μπορείς να υπολογίσεις το άθροισμα $P_X(1) + P_X(0) =$;

Άσκηση 2

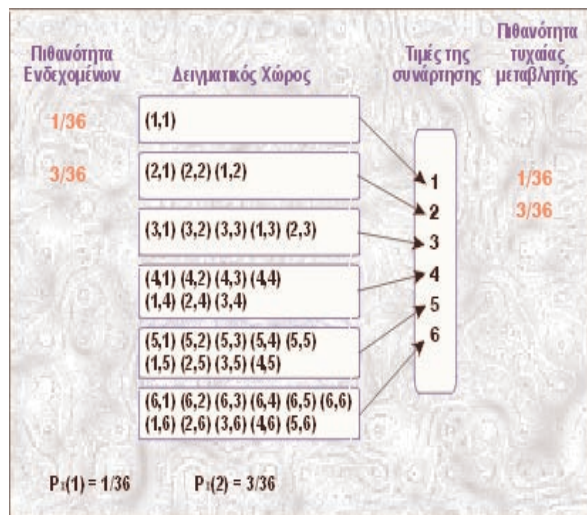
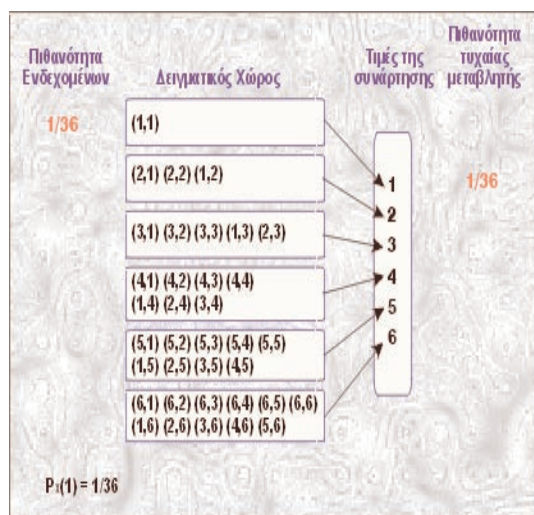
Ρίχνουμε 2 ζάρια και σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων όπως στο παράδειγμα 4.3.1

α) Θεωρούμε συνάρτηση X που στέλνει το κάθε ζευγάρι στο άθροισμα των ενδείξεων της ζαριάς. Να συμπληρωθούν τα κενά: $X: (3,2) \rightarrow A$ $X: (4,4) \rightarrow B$

Απάντηση

$A=5, B=8$

β) Στο διάγραμμα που ακολουθεί περιγράφεται η συνάρτηση όπως ορίζεται από την άσκηση 3 και υπολογίζονται οι πιθανότητες $P(1,1)=1/36$, $P(2,1)=1/36$, $P(6,6)=1/36$. Αντίστοιχα, αφού μόνο το ζευγάρι $(1,1)$ αντιστοιχεί στην τιμή $1+1=2$, η πιθανότητα να σταλεί η διπλή ζαριά στον αριθμό 2 είναι όση και να έλθει η ζαριά $(1,1)$, δηλαδή $1/36$.



Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο να συμπληρωθεί ο πίνακας:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$1/36$	$2/36$	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	$2/36$	$1/36$

Απάντηση

$A=3/36$, $B=4/36$, $\Gamma=5/36$, $\Delta=6/36$, $E=5/36$, $Z=4/36$, $H=3/36$.

Αν προσθέσουμε όλες τις τιμές της πιθανότητας P , παρατηρούμε ότι το άθροισμα ισούται με τη μονάδα. Εκτός από τον πίνακα μπορούμε να παραστήσουμε την κατανομή της πιθανότητας με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα.

Άσκηση 3

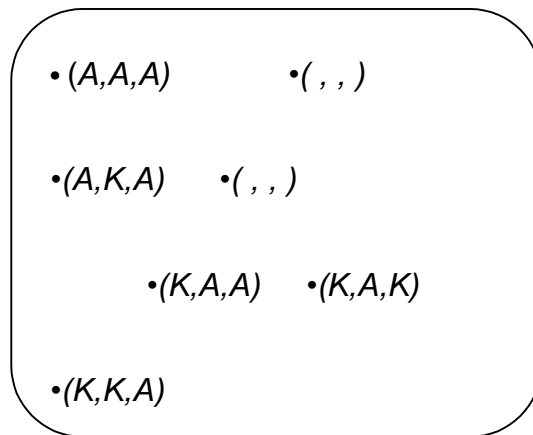
Αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι «Α» ή κορίτσι «Κ» είναι ίδια, να βρεθεί ο δειγματικός χώρος που περιγράφει το φύλο των παιδιών μιας τριμελούς οικογένειας.

α) Να αντικατασταθούν οι αριθμοί 1,2,3,4 του παρακάτω σχήματος με τα γράμματα Α ή Κ.

**Απάντηση**

$1 \rightarrow A$, $2 \rightarrow K$, $3 \rightarrow A$, $4 \rightarrow K$

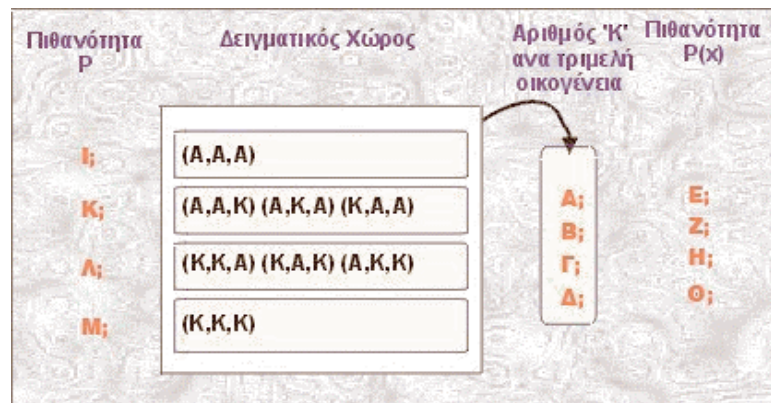
β) Να συμπληρωθεί ο δειγματικός χώρος



Απάντηση

Λείπουν τα (A,K,K) , (A,A,K) και (K,K,K)

γ) Να ορίσετε την τυχαία μεταβλητή που στέλνει κάθε τριάδα παιδιών στον αριθμό που δείχνει πόσα «Κ» υπάρχουν σε μία οικογένεια και να συμπληρωθούν τα κενά στο διάγραμμα που δείχνει τον αριθμό «Κ» ανά οικογένεια καθώς και τη στήλη της πιθανότητας P .



Απάντηση

$A \rightarrow 0$ $B \rightarrow 1$ $\Gamma \rightarrow 2$ $\Delta \rightarrow 3$ $I, E \rightarrow 1/8$ $K, Z \rightarrow 3/8$ $A, H \rightarrow 3/8$ $M, \Theta \rightarrow 1/8$

δ) Να υπολογιστεί το άθροισμα: $P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3)$

Απάντηση

$$P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) = 1$$

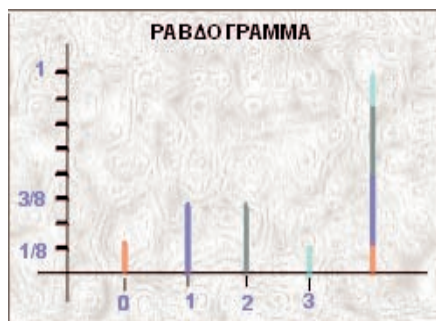
ε) Να συμπληρωθεί ο πίνακας

X	0	1	2	3
P	A	B	Γ	Δ

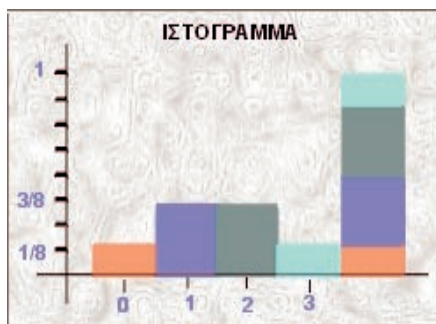
Απάντηση

$$A=1/8 \quad B=3/8 \quad \Gamma=3/8 \quad \Delta=1/8$$

στ) Από τα ζεύγη $(0,1/8)$, $(2,3/8)$, $(3,1/8)$ του αριθμού «K» ανά τριάδα παιδιών και της πιθανότητας P_X να γίνει το αντίστοιχο ραβδόγραμμα και με τις ίδιες τιμές να γίνει και το αντίστοιχο ιστόγραμμα.



Απάντηση



Άσκηση 4

Ένα δοχείο περιέχει 15 σφαίρες, 2 λευκές και 13 κόκκινες. Επιλέγουμε τυχαία 3 σφαίρες τη μία μετά την άλλη χωρίς επανάθεση. Μας ενδιαφέρει πόσες είναι οι λευκές σφαίρες ανάμεσα σ' αυτές που επιλέξαμε.

Στην επιλογή της 1^{ης} σφαίρας η πιθανότητα να έρθει «Κ» υπολογίζεται:

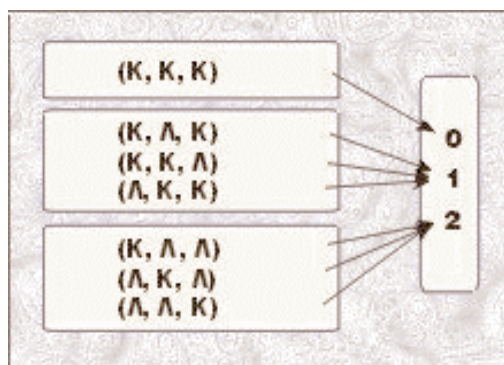
$$P(K) = (\text{αριθμός κόκκινων σφαιρών}) / (\text{σύνολο σφαιρών}) = 13/15$$

Στη 2^η επιλογή $P(L) = 2/14$ (αφού έχει ήδη αποσυρθεί η 1^η)

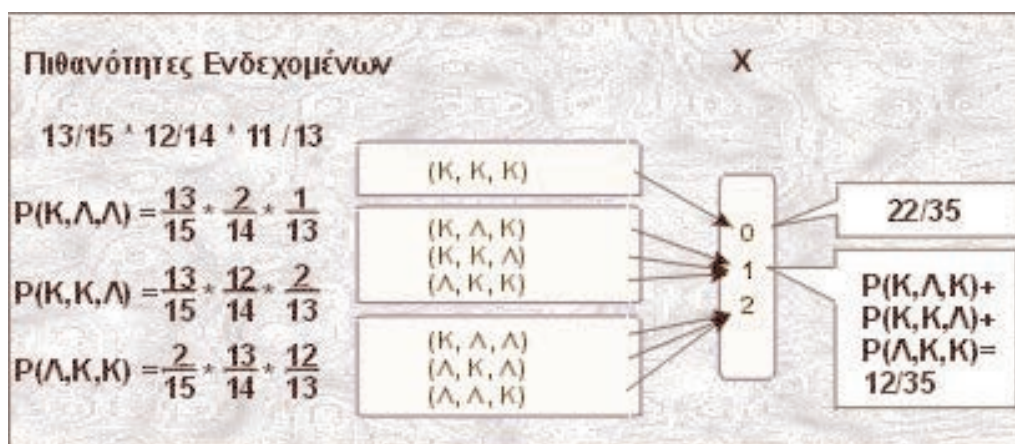
Στην 3^η επιλογή $P(K) = 12/13$

Άρα η πιθανότητα να έρθει η τριάδα (Κ,Λ,Λ) θα είναι $P(K,L,L) = 13/15 * 2/14 * 12/13 = 4/35$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(K,K,K) =$;



Από το διάγραμμα που ακολουθεί



Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να έρθει η τιμή 1 κατά την επιλογή 3 σφαιρών είναι το άθροισμα $P(K,L,L) + P(K,K,L) + P(L,K,K)$. Άρα $P_X(1) = 12/35$.

Αφού γνωρίζουμε ότι $P_X(0) = 22/35$ και $P_X(1) = 12/35$ μπορούμε να υπολογίσουμε την $P_X(2)$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την πιθανότητα των άλλων ενδεχομένων;

Απάντηση

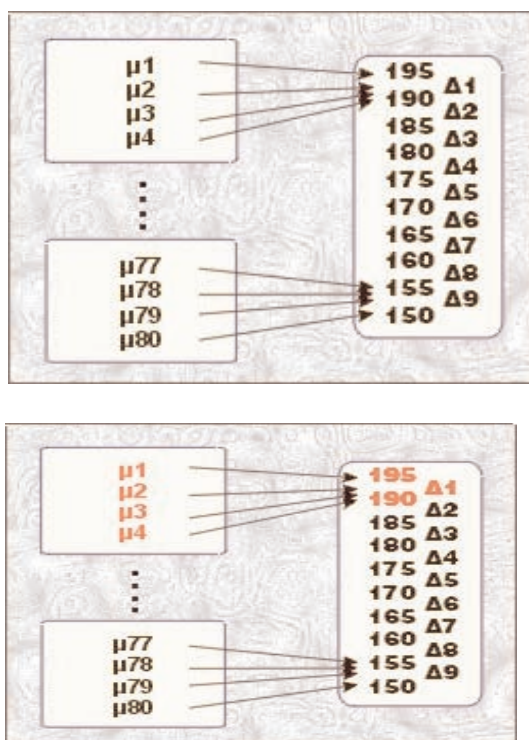
$$P_X(2) = 1/35$$

Άσκηση 5

Στη Γ' τάξη ενός Λυκείου μετρήθηκε το ύψος 80 μαθητών και σχηματίστηκε ο αντίστοιχος πίνακας:

Διάστημα ύψους σε cm	Αριθμός μαθητών
150-155	4
155-160	6
160-165	8
165-170	10
170-175	18
175-180	16
180-185	10
185-190	4
190-195	4

Ο πίνακας αυτός μας δείχνει ομαδοποιημένα τον αριθμό των ατόμων που το ύψος τους ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτό θα ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα αντιστοιχεί κάθε μαθητή με ένα διάστημα. Βάζουμε τους μαθητές κατά σειρά ύψους από τον ψηλότερο στον πιο κοντό: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{79}, \mu_{80}$. Ας θεωρήσουμε όλους τους μαθητές που έχουν ύψος από 190-195. Ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει ένας τυχαίος μαθητής από τους 80 στο διάστημα Δ1 190-195; $P(\Delta 1) =$;



Απάντηση

$$P(\Delta_1) = 4/80$$

3.4.5 Φύλλο Εργασίας

ΘΕΜΑ 1.

Μπορείς να υπολογίσεις το άθροισμα $P_X(1) + P_X(0) =$;

ΘΕΜΑ 2.

Ρίχνουμε 2 ζάρια και σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων όπως στο παράδειγμα 4.3.1

Θεωρούμε συνάρτηση X που στέλνει το κάθε ζευγάρι στο άθροισμα των ενδείξεων της ζαριάς. Να συμπληρωθούν τα κενά(δηλαδή να αντικατασταθούν τα A και B):

$$X: (3,2) \rightarrow A \quad X: (4,4) \rightarrow B$$

ΘΕΜΑ 3.

Στη Γ' τάξη ενός Λυκείου μετρήθηκε το ύψος 80 μαθητών και σχηματίστηκε ο αντίστοιχος πίνακας:

Διάστημα ύψους σε cm	Αριθμός μαθητών
150-155	4
155-160	6
160-165	8
165-170	10
170-175	18
175-180	16
180-185	10
185-190	4
190-195	4

Ο πίνακας αυτός μας δείχνει ομαδοποιημένα τον αριθμό των ατόμων που το ύψος τους ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτό θα ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα αντιστοιχεί κάθε μαθητή με ένα διάστημα. Βάζουμε τους μαθητές κατά σειρά ύψους από τον ψηλότερο στον πιο κοντό: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{79}, \mu_{80}$. Ας θεωρήσουμε όλους τους μαθητές που έχουν ύψος από 190-195. Ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει ένας τυχαίος μαθητής από τους 80 στο διάστημα Δ1 190-195; $P(\Delta_1)=$;

ΘΕΜΑ 4

Στο γνωστό πείραμα της βροχής που πέφτει πάνω στην πλάκα ορίζουμε μια συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί κάθε σταγόνα που πέφτει μέσα στον κύκλο με τον αριθμό 1 ενώ κάθε σταγόνα που πέφτει στην υπόλοιπη πλάκα με το 0. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να πέσει μια από τις σταγόνες που πέφτουν στην ορθογώνια πλάκα, μέσα στον κυκλικό δίσκο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P(A) = \frac{\text{Εμβαδόν κύκλου}}{\text{Εμβαδόν ορθογωνίου}}$$

Αν $P(A)=1/10$, και έστω ότι υπάρχει μηχανισμός όπου όταν πέφτει η σταγόνα μέσα στον κύκλο ανάβει ο αριθμός 1 ενώ όταν η σταγόνα πέφτει έξω ανάβει ο αριθμός 0. Τότε η πιθανότητα να ανάψει ο αριθμός 1 είναι $P_X(1)=1/10$, ενώ η πιθανότητα να ανάψει το 0 είναι $P_X(0)=9/10$.

Η συνάρτηση X που ορίσαμε με τιμές το 0 και το 1 είναι τυχαία μεταβλητή αφού η πιθανότητα να «ανάψει» το 1 ή να «ανάψει» το 2 καθορίζεται από την πιθανότητα να πέσει η σταγόνα μέσα ή έξω από το «Α».

Δημιουργείστε ανάλογα ανάλογα παραδείγματα με διαφορετικά σχήματα δηλαδή αντί κύκλο τετράγωνο κ.λ.π.

ΘΕΜΑ 5.

Ορίστε τη Τυχαία μεταβλητή όπως ορίσατε τις συναρτήσεις σε προηγούμενα κεφάλαια. Βρείτε Πεδίο Ορισμού και Σύνολα Τιμών. Τι έχετε να παρατηρήσετε για το Πεδίο Ορισμού της εν λόγω συνάρτησης.

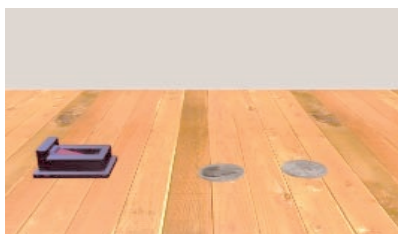
(Οι απαντήσεις υπάρχουν στην ενότητα)

3.4.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή

3.4.6.1 Εισαγωγή

Στόχος της ενότητας είναι η παρουσίαση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Θα χρησιμοποιήσουμε πειράματα που έχουν ήδη γίνει οικεία στους μαθητές από τις προηγούμενες ενότητες και παραπέρα επεξεργασία τους με τη βοήθεια πινάκων και ιστογραμμάτων. Η προσέγγιση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής θα γίνει μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων και θα παρουσιαστεί η έννοια της κατανομής πιθανότητας με διαγράμματα, ραβδογράμματα και ιστογράμματα. Τέλος με παράδειγμα θα περιγραφούν όλα τα χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών.

3.4.6.2 Τυχαία Μεταβλητή



Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι αναρρίπτουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 2 φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{ \cdot, \cdot \}$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο.

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας δένδροδιάγραμμα ή πίνακα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι: $\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$. Χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας υπολογίζουμε την πιθανότητα των απλών ενδεχομένων: $P(KG) = 1/4$, $P(KK) = 1/4$, $P(GK) = 1/4$, $P(GG) = 1/4$.

Παράδειγμα

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα του προηγούμενου παραδείγματος και ζητάμε:

Να καταγραφεί ο αριθμός των κεφαλών για κάθε απλό ενδεχόμενο στον πίνακα

Απλά ενδεχόμενα	KK	KG	GK	GG
Αριθμός Κεφαλών

Και στη συνέχεια να υπολογιστεί η πιθανότητα στις παρακάτω περιπτώσεις:

1^η : $P(\text{Να έλθει κεφαλή «K» μια φορά}) = ;$ **

2^η : $P(\text{Να έλθει κεφαλή «K» δύο φορές}) = ;$ ***

3^η : $P(\text{Να έλθει κεφαλή «K» καμία φορά}) = ;$ ****

4^η : $P(\text{Να έλθει κεφαλή «K» τουλάχιστον μια φορά}) = ;$ *****

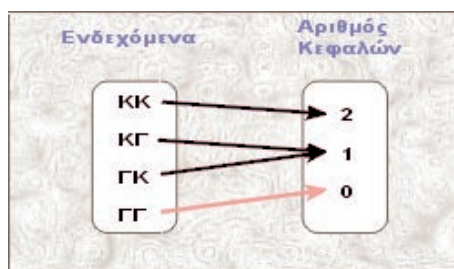
Απαντήσεις

Αφού έχουμε 2 κεφαλές δηλαδή (KK), στην περίπτωση που έχει έρθει κεφαλή (K) στην 1^η ρίψη και κεφαλή (K) στη 2^η ρίψη, στην (KG) και (GK) 1 κεφαλή ενώ στη (GG) 0 κεφαλές, ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

KK	KG	GK	GG
2	1	0	0

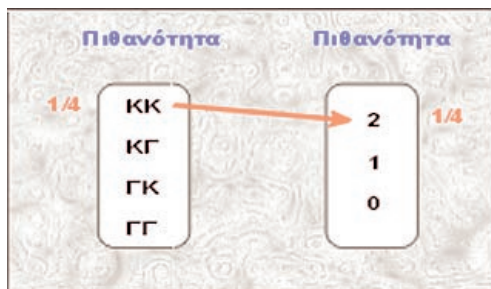
$$** = \frac{1}{2} \quad *** = \frac{1}{4} \quad **** = \frac{1}{4} \quad ***** = \frac{3}{4}$$

Τα παραδείγματα που αναλύσαμε προηγουμένως μας δίνουν τη δυνατότητα να ορίσουμε τη συνάρτηση που στέλνει το κάθε απλό ενδεχόμενο στον αριθμό που δείχνει πόσες φορές ήλθε K όπως φαίνεται στο διάγραμμα:

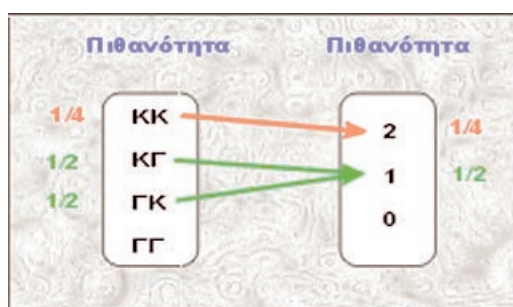


Υπολογίζοντας την πιθανότητα των διαφόρων ενδεχομένων βρίσκουμε ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο “ΚΚ”, δηλαδή 2 κεφαλές είναι $\frac{1}{4}$

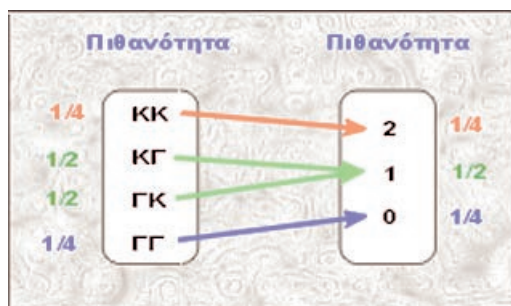
Ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο «ΚΓ» ή «ΓΚ», δηλαδή 1



κεφαλή είναι $\frac{1}{2}$.

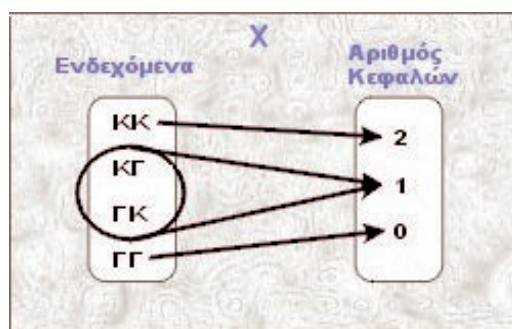


και τέλος η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο «ΓΓ», δηλαδή 0 κεφαλές είναι $\frac{1}{4}$.



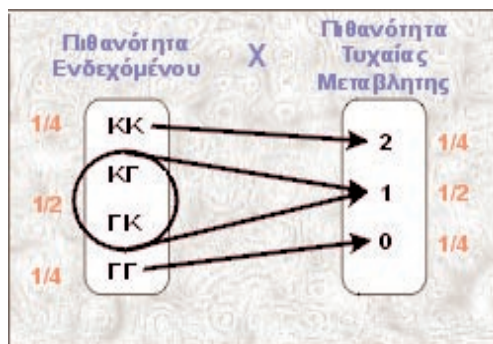
Ορισμός

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι η συνάρτηση X που δημιουργήσαμε εκτός του ότι στέλνει κάθε ενδεχόμενο σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό, «μεταφέρει» στον αριθμό αυτό και την πιθανότητα όλων των απλών ενδεχομένων που αντιστοιχούνται σε αυτόν. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.



3.4.6.3 Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

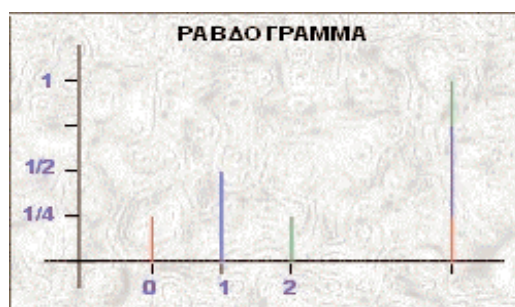
Εάν συμπληρωθεί το παραπάνω διάγραμμα με την πιθανότητα του ενδεχομένου και την πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής,

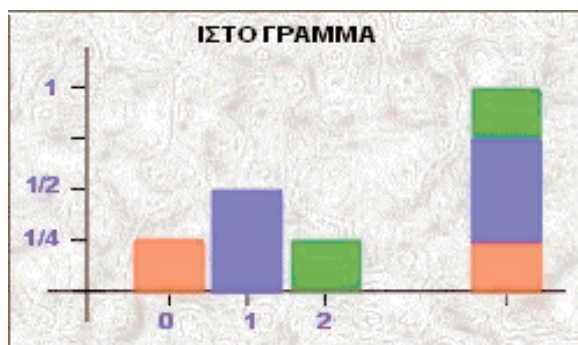


τότε ορίζουμε την κατανομή της πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα:

Τιμές τυχαίας μεταβλητής	0	1	2
Κατανομή πιθανότητας	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Εκτός από πίνακα η κατανομή της πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής μπορεί να παρασταθεί και με διαγράμματα:



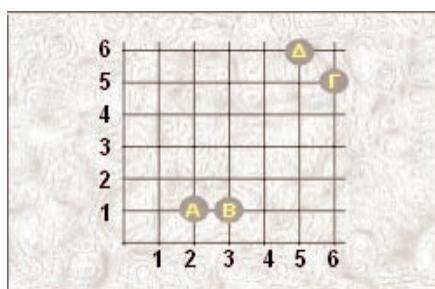


Παρατηρώντας το ραβδόγραμμα και το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι εάν «αθροίσουμε» το ύψος των ράβδων θα βρούμε το άθροισμα

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 2 φορές. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων μπορεί να παρασταθεί σε ένα σύστημα αξόνων 6x6 όπως στο σχήμα που ακολουθεί:



Έστω $A(2,1)$, $B(3,1)$, $\Gamma(6,5)$ και $\Delta(5,6)$ σημεία του συστήματος που αντιστοιχούν σε αποτελέσματα από τη ρίψη των ζαριών. Είναι φανερό ότι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου τα οποία έχουν πλήθος 36.

Σε κάθε «διπλό» ρίξιμο των ζαριών, όπως περιγράψαμε στο προηγούμενο πείραμα τύχης, ορίζουμε τη συνάρτηση ως εξής:

Κάθε ζεύγος των αριθμών, που ήλθε με τις ζαριές, το αντιστοιχούμε με εκείνον τον αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους δύο αριθμούς του ζεύγους. Έτσι λοιπόν ορίζουμε τυχαία μεταβλητή την:

$$(3,5) \rightarrow 5$$

$$(2,2) \rightarrow 2$$

$$(6,1) \rightarrow 6$$

Άσκηση 1

Να συμπληρωθούν τα κενά:

$$(4,3) \rightarrow A =$$

$$(1,1) \rightarrow B=$$

$$(1,5) \rightarrow \Gamma=$$

$$(4,2) \rightarrow \Delta=$$

Απάντηση

$$A=4, B=1, \Gamma=5, \Delta=4$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη περίπτωση να πάρει η συνάρτηση την τιμή «1» είναι το ζευγάρι (1,1).

3.4.6.4 Τυχαία μεταβλητή – Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής

Θεωρούμε το πείραμα τύχης του «διπλού» ριζίματος των ζαριών όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο.



Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι ο πλήθος των ζευγαριών που αντιστοιχούν στην τιμή 1 είναι 1, στην τιμή 2 είναι 3, στην τιμή 3 είναι 5.

Ασκηση 1

Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα:

Ζευγάρια που η τιμή τους είναι:	Πλήθος ζευγαριών
1	1
2	3
3	5
4	A *
5	B *
6	Γ *

Ορισμός

Αφού το σύνολο των δυνατών ζευγαριών είναι 36 και μόνο 1 ζευγάρι το (1,1) αντιστοιχεί στην τιμή 1, είναι φανερό ότι η πιθανότητα να έρθει η τιμή 1 είναι $1/36$, δηλαδή $P_X(1) = 1/36$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες

$$P_X(1) = 1/36$$

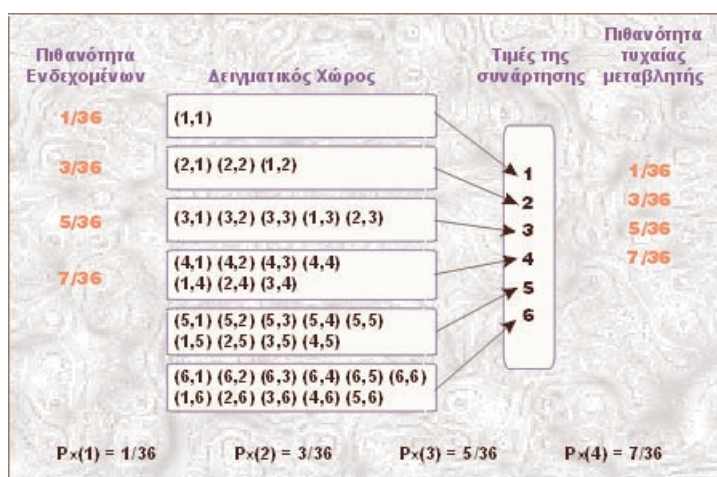
$$P_X(2) = 2/36$$

$$P_X(3) = 5/36$$

$$P_X(4) = 7/36$$

Ασκηση 2

Να υπολογιστεί η πιθανότητα να έλθει 5 καθώς και η πιθανότητα να έλθει 6.



Να συμπληρωθούν τα κενά

$$P_X(5) = A *$$

$$P_X(6) = B *$$

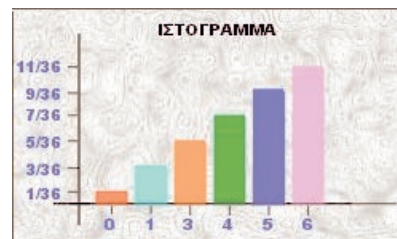
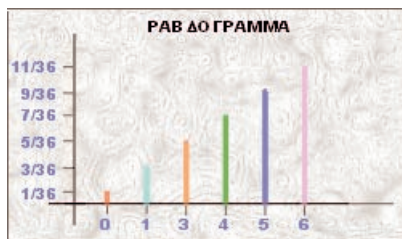
.....

Συμπέρασμα

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση X που «κουβαλάει» μαζί της την έννοια της πιθανότητας είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Μάλιστα η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής μπορεί να περιγραφεί με έναν πίνακα και η ίδια κατανομή μπορεί να περιγραφεί με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Τιμές της συνάρτησης	1	2	3	4	5	6
Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36



Παράδειγμα

Στο γνωστό πείραμα της βροχής που πέφτει πάνω στην πλάκα ορίζουμε μια συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί κάθε σταγόνα που πέφτει μέσα στον κύκλο με τον αριθμό 1 ενώ κάθε σταγόνα που πέφτει στην υπόλοιπη πλάκα με το 0. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να πέσει μια από τις σταγόνες που πέφτουν στην ορθογώνια πλάκα, μέσα στον κυκλικό δίσκο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P(A) = \frac{\text{Εμβαδόν κύκλου}}{\text{Εμβαδόν ορθογωνίου}}$$

Αν $P(A)=1/10$, και έστω ότι υπάρχει μηχανισμός όπου όταν πέφτει η σταγόνα μέσα στον κύκλο ανάβει ο αριθμός 1 ενώ όταν η σταγόνα πέφτει έξω ανάβει ο αριθμός 0. Τότε η πιθανότητα να ανάψει ο αριθμός 1 είναι $P_X(1)=1/10$, ενώ η πιθανότητα να ανάψει το 0 είναι $P_X(0)=9/10$.

Η συνάρτηση X που ορίσαμε με τιμές το 0 και το 1 είναι τυχαία μεταβλητή αφού η πιθανότητα να «ανάψει» το 1 ή να «ανάψει» το 0 καθορίζεται από την πιθανότητα να πέσει η σταγόνα μέσα ή έξω από το «Α».

Ασκηση 1

Μπορείς να υπολογίσεις το άθροισμα $P_X(1) + P_X(0) =$;

Ασκηση 2

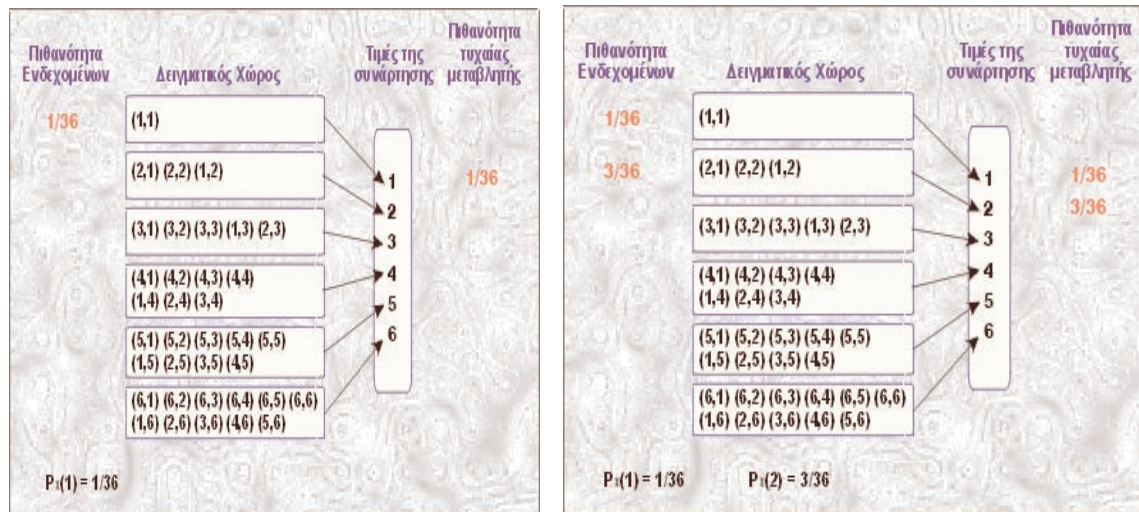
Ρίχνουμε 2 ζάρια και σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων όπως στο παράδειγμα 4.3.1

α) Θεωρούμε συνάρτηση X που στέλνει το κάθε ζευγάρι στο άθροισμα των ενδείξεων της ζαριάς. Να συμπληρωθούν τα κενά: $X: (3,2) \rightarrow A$ $X: (4,4) \rightarrow B$

Απάντηση

$$A=5, B=8$$

β) Στο διάγραμμα που ακολουθεί περιγράφεται η συνάρτηση όπως ορίζεται από την άσκηση 3 και υπολογίζονται οι πιθανότητες $P(1,1)=1/36$, $P(2,1)=1/36$, $P(6,6)=1/36$. Αντίστοιχα, αφού μόνο το ζευγάρι $(1,1)$ αντιστοιχεί στην τιμή $1+1=2$, η πιθανότητα να σταλεί η διπλή ζαριά στον αριθμό 2 είναι όση και να έλθει η ζαριά $(1,1)$, δηλαδή $1/36$.



Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο να συμπληρωθεί ο πίνακας:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	2/36	1/36

Απάντηση

$$A=3/36, B=4/36, \Gamma=5/36, \Delta=6/36, E=5/36, Z=4/36, H=3/36.$$

Αν προσθέσουμε όλες τις τιμές της πιθανότητας P , παρατηρούμε ότι το άθροισμα ισούται με τη μονάδα. Εκτός από τον πίνακα μπορούμε να παραστήσουμε την κατανομή της πιθανότητας με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα.

Άσκηση 3

Αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι «Α» ή κορίτσι «Κ» είναι ίδια, να βρεθεί ο δειγματικός χώρος που περιγράφει το φύλο των παιδιών μιας τριμελούς οικογένειας.

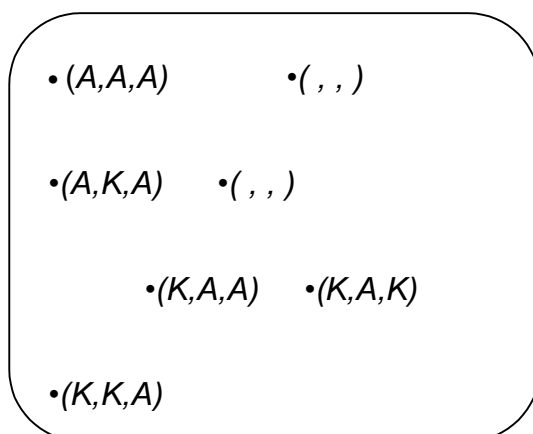
α) Να αντικατασταθούν οι αριθμοί 1,2,3,4 του παρακάτω σχήματος με τα γράμματα Α ή Κ.



Απάντηση

$1 \rightarrow A, 2 \rightarrow K, 3 \rightarrow A, 4 \rightarrow K$

β) Να συμπληρωθεί ο δειγματικός χώρος



Απάντηση

Λείπουν τα (A,K,K), (A,A,K) και (K,K,K)

γ) Να ορίσετε την τυχαία μεταβλητή που στέλνει κάθε τριάδα παιδιών στον αριθμό που δείχνει πόσα «Κ» υπάρχουν σε μία οικογένεια και να συμπληρωθούν τα κενά στο διάγραμμα που δείχνει τον αριθμό «Κ» ανά οικογένεια καθώς και τη στήλη της πιθανότητας P.

**Απάντηση**

$$A \rightarrow 0 \quad B \rightarrow 1 \quad \Gamma \rightarrow 2 \quad \Delta \rightarrow 3 \quad I, E \rightarrow 1/8 \quad K, Z \rightarrow 3/8 \quad \Lambda, H \rightarrow 3/8 \quad M, \Theta \rightarrow 1/8$$

δ) Να υπολογιστεί το άθροισμα: $P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3)$

Απάντηση

$$P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) = 1$$

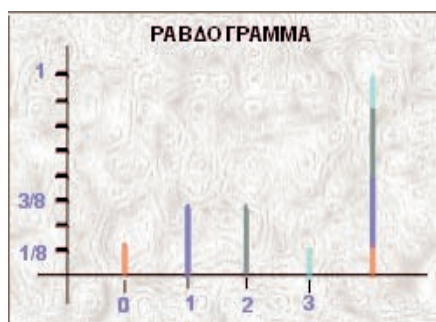
ε) Να συμπληρωθεί ο πίνακας

X	0	1	2	3
P	A	B	Γ	Δ

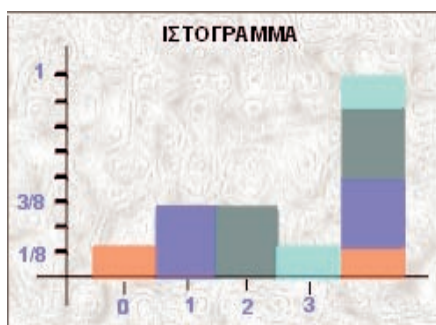
Απάντηση

$$A=1/2 \quad B=3/8 \quad \Gamma=3/8 \quad \Delta=1/8$$

στ) Από τα ζεύγη $(0, 1/8)$, $(2, 3/8)$, $(3, 1/8)$ του αριθμού «Κ» ανά τριάδα παιδιών και της πιθανότητας P_X να γίνει το αντίστοιχο ραβδόγραμμα και με τις ίδιες τιμές να γίνει και το αντίστοιχο ιστόγραμμα.



Απάντηση



Ασκηση 4

Ένα δοχείο περιέχει 15 σφαίρες, 2 λευκές και 13 κόκκινες. Επιλέγουμε τυχαία 3 σφαίρες τη μία μετά την άλλη χωρίς επανάθεση. Μας ενδιαφέρει πόσες είναι οι λευκές σφαίρες ανάμεσα σ' αυτές που επιλέξαμε.

Στην επιλογή της 1^{ης} σφαίρας η πιθανότητα να έρθει «Κ» υπολογίζεται:

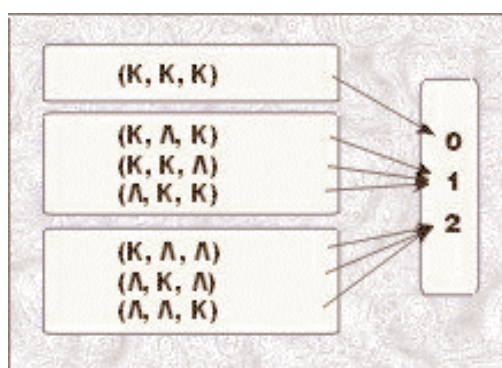
$$P(K) = (\text{αριθμός κόκκινων σφαιρών}) / (\text{σύνολο σφαιρών}) = 13/15$$

Στη 2^η επιλογή $P(L) = 2/14$ (αφού έχει ήδη αποσυρθεί η 1^η)

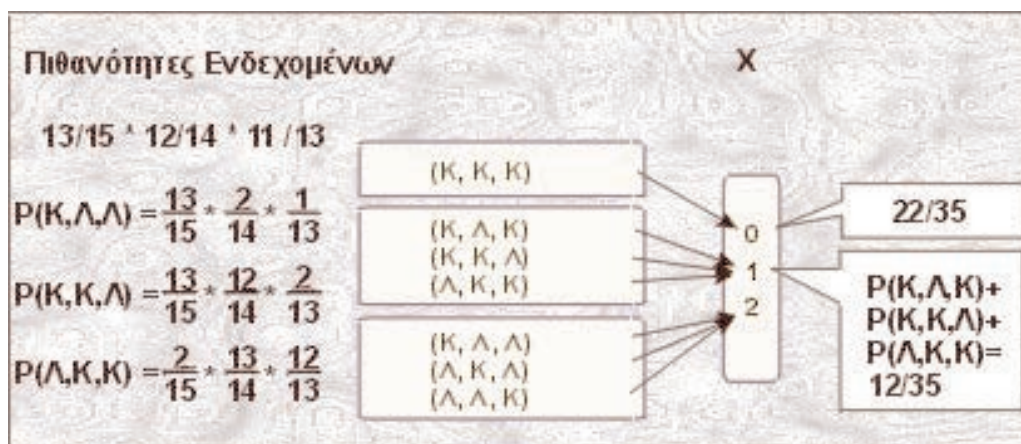
Στην 3^η επιλογή $P(K) = 12/13$

Άρα η πιθανότητα να έρθει η τριάδα (Κ,Λ,Λ) θα είναι $P(K,L,L) = 13/15 \times 2/14 \times 12/13 = 4/35$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(K,K,K) =$;



Από το διάγραμμα που ακολουθεί



Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να έρθει η τιμή 1 κατά την επιλογή 3 σφαιρών είναι το άθροισμα $P(K, \Lambda, \Lambda) + P(K, K, \Lambda) + P(\Lambda, K, K)$. Άρα $P_X(1) = 12/35$.

Αφού γνωρίζουμε ότι $P_X(0) = 22/35$ και $P_X(1) = 12/35$ μπορούμε να υπολογίσουμε την $P_X(2)$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την πιθανότητα των άλλων ενδεχομένων;

Απάντηση

$$P_X(2) = 1/35$$

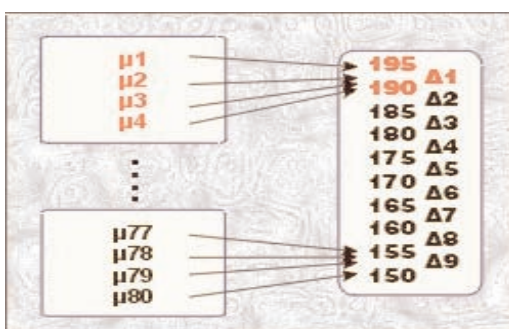
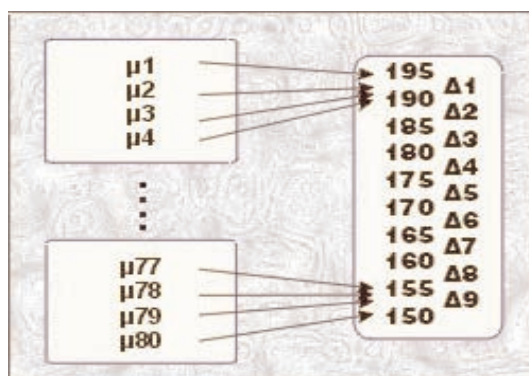
Ασκηση 5

Στη Γ' τάξη ενός Λυκείου μετρήθηκε το ύψος 80 μαθητών και σχηματίστηκε ο αντίστοιχος πίνακας:

Διάστημα ύψους σε cm	Αριθμός μαθητών
150-155	4
155-160	6
160-165	8
165-170	10
170-175	18
175-180	16
180-185	10
185-190	4
190-195	4

Ο πίνακας αυτός μας δείχνει ομαδοποιημένα τον αριθμό των ατόμων που το ύψος τους ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτό θα ορίσουμε

μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα αντιστοιχεί κάθε μαθητή με ένα διάστημα. Βάζουμε τους μαθητές κατά σειρά ύψους από τον ψηλότερο στον πιο κοντό: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{79}, \mu_{80}$. Ας θεωρήσουμε όλους τους μαθητές που έχουν ύψος από 190-195. Ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει ένας τυχαίος μαθητής από τους 80 στο διάστημα Δ_1 190-195; $P(\Delta_1)=$; **



Απάντηση

$$P(\Delta_1)=4/80$$

3.5 Σενάριο 5ης Ενότητας

3.5.1 Περιγραφή

Μία πολύ σημαντική έννοια στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική είναι η έννοια της Μαθηματικής Ελπίδας ή προσδοκώμενης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής. Ιστορικά η ενότητα αυτή έχει μια ιδιαίτερη σημασία καθώς προέκυψε από τα τυχερά παιχνίδια.

Μας δίνεται λοιπόν εδώ η ευκαιρία μιας “επανασύνδεσης” της πιθανοθεωρίας με τις ιστορικές της ρίζες, που θα τοποθετήσει το θέμα μας σ’ ένα κοινωνικό πλαίσιο που θα προκαλέσει και μια κριτική συζήτηση για τις σημερινές εφαρμογές της πιθανοθεωρίας.

Ειδικότεροι μαθησιακοί στόχοι είναι η συγκρότηση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας ως μέτρο θέσης μιας κατανομής και η κατάδειξη της ανάγκης “συμπλήρωσης” της από τη Διασπορά ή την Τυπική απόκλιση προκειμένου να έχουμε και ένα μέτρο του πόσο διασκορπισμένη γύρω από τη μέση τιμή είναι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.5.2 Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι

Ιστορικά η ενότητα αυτή έχει μια ιδιαίτερη σημασία καθώς προέκυψε από τα τυχερά παιχνίδια (βλ. Παράρτημα Δ). Μας δίνεται λοιπόν εδώ η ευκαιρία μιας «επανασύνδεσης» της πιθανοθεωρίας με τις ιστορικές της ρίζες, που θα τοποθετήσει το θέμα μας σ’ ένα κοινωνικό πλαίσιο και θα προκαλέσει και μια κριτική συζήτηση για τις σημερινές εφαρμογές της πιθανοθεωρίας. Ειδικότεροι μαθησιακοί στόχοι είναι η συγκρότηση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας και η κατάδειξη της ανάγκης «συμπλήρωσης» της από την παράμετρο της Διασποράς ή της Τυπικής Απόκλισης προκειμένου να έχουμε καλύτερη εικόνα μιας τυχαίας κατανομής.

3.5.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων

- α) Χρήση του ιστορικού πλαισίου (ανάθεση σχετικού project σε ομάδες μαθητών).
- β) Χρήση υλικών ή εποπτικών παραδειγμάτων.
- γ) Ετυμολογική προσέγγιση των όρων.

- 1. Μαθηματική Ελπίδα
- 2. Παράδειγμα της υλικής ράβδου

Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας, με τη βοήθεια του κέντρου βάρους και της ροπής αδράνειας.

- 3. Ανάρριψη αμερόληπτου ζαριού,
Υπολογισμός Μαθηματικής Ελπίδας.

- 4. Εξήγηση της Μαθηματικής Ελπίδας με τη χρήση τυχερών παιχνιδιών.
Ετυμολογική προσέγγιση.

- 5. Διασπορά

Παράδειγμα ράβδου για την κατανόηση της έννοιας της διασποράς της μάζας γύρω από το κέντρο βάρους.

6. Ανάρριψη αμερόληπτου ζαριού για προσέγγιση της έννοιας της κατανομής.
7. Γραφικές παραστάσεις, όπου φαίνεται η μεγάλη και η μικρή διασπορά.
8. Τυπική απόκλιση
9. Με τα ανωτέρω παραδείγματα, υπολογισμός της τυπικής απόκλισης.
10. Με τα ανωτέρω παραδείγματα και τις γραφικές παραστάσεις να φαίνεται ότι η διασπορά ή η τυπική απόκλιση αποτελούν μέτρο του πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής.
11. Ανακεφαλαίωση.
12. Αντιστοιχίσεις - Γέμισμα κενών – Ερωτήσεις Πολ/πλής επιλογής - Ασκήσεις – Προβλήματα

3.5.4 Ασκήσεις

1. Να βρείτε τη διασπορά στο πείραμα της ανάρριψης 2 ζαριών.
2. Σ' ένα παιχνίδι ένας παίκτης ρίχνει ένα ζάρι. Ο παίκτης κερδίζει 20 δραχμ. αν έρθει 2, 40 δραχμ. εάν έρθει 4, χάνει 30 δραχμές εάν έρθει 6 και ούτε κερδίζει ούτε χάνει αν έρθει άλλος αριθμός. Πόσες δραχμές αναμένεται να κερδίσει σ' ένα παιχνίδι.
3. Σ' ένα λαχνό υπάρχουν 200 βραβεία (κέρδη) των 5 χιλιάδων δραχμών, 20 βραβεία των 25 χιλιάδων δραχμών και 5 βραβεία των 100 χιλιάδων δραχμών. Εάν πρόκειται να μοιραστούν 10000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;
4. Υπολογίστε τη διασπορά στα υπόλοιπα παραδείγματα του κεφαλαίου.
5. Τα σωματικά βάρη 5 ανθρώπων είναι 75, 59, 90, 68, 80 κιλά. Να βρείτε τη διασπορά.
6. Ένας μετεωρολόγος μετράει κάθε 3 ώρες τη θερμοκρασία σε μία περιοχή. Οι μετρήσεις σε βαθμούς Κελσίου είναι:
-3 -1 -2 0 4 3 1 2

Να υπολογίσετε τη διασπορά των παραπάνω μετρήσεων.

7. Εάν $P[X=1]=p$ και $P[X=0]=a$,
Ν' αποδειχθεί ότι η Μαθηματική Ελπίδα ισούται με p .

3.5.5 Φύλλο Εργασίας

Θέμα 1

- I) Σε ένα καφενείο παίζεται ένα παιχνίδι με ζάρια ως εξής: ο καφετζής πληρώνει στον παίκτη τόσα χιλιάδικα όσα η ένδειξη του ζαριού που ρίχνει ο παίκτης. Ποιο το αναμενόμενο κέρδος του καφετζή;
- A. 4000
B. 3000
Γ. 3500
Δ. 6000
- II) Στο πείραμα της ανάρριψης ενός κέρματος 2 φορές η Μαθηματική Ελπίδα είναι:
- A. 2
B. 3
Γ. 1
Δ. 0

Θέμα 2

Σ' ένα παιχνίδι ένας παίκτης ρίχνει ένα ζάρι. Ο παίκτης κερδίζει 20 δραχμ. εάν έρθει 2, 40 δραχμ. εάν έρθει 4, χάνει 30 δραχμές εάν έρθει 6 και ούτε κερδίζει ούτε χάνει αν έρθει άλλος αριθμός. Πόσες δραχμές αναμένεται να κερδίσει σ' ένα παιχνίδι;

Θέμα 3

Σ' ένα λαχνό υπάρχουν 200 βραβεία (κέρδη) των 5 χιλιάδων δραχμών, 20 βραβεία των 25 χιλιάδων δραχμών και 5 βραβεία των 100 χιλιάδων δραχμών. Εάν πρόκειται να μοιραστούν 10000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;

Θέμα 4

Προσπαθήσετε μόνοι σας να αιτιολογήσετε γιατί η έννοια την οποία διαπραγματεύεται το κεφάλαιο 5 λέγεται Μαθηματική Ελπίδα.

Απαντήσεις

1. I) Γ
II) Γ
2. 5
3. 0,2

3.5.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή

3.5.6.1 Εισαγωγή

Μία πολύ σημαντική έννοια στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική είναι η έννοια της Μαθηματικής Ελπίδας ή προσδοκώμενης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής. Ιστορικά η ενότητα αυτή έχει μια ιδιαίτερη σημασία καθώς προέκυψε από τα τυχερά παιχνίδια.

Μας δίνεται λοιπόν εδώ η ευκαιρία μιας “επανασύνδεσης” της πιθανοθεωρίας με τις ιστορικές της ρίζες, που θα τοποθετήσει το θέμα μας σ’ ένα κοινωνικό πλαίσιο που θα προκαλέσει και μια κριτική συζήτηση για τις σημερινές εφαρμογές της πιθανοθεωρίας.

Ειδικότεροι μαθησιακοί στόχοι είναι η συγκρότηση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας ως μέτρο θέσης μιας κατανομής και η κατάδειξη της ανάγκης “συμπλήρωσης” της από τη Διασπορά ή την Τυπική απόκλιση προκειμένου να έχουμε και ένα μέτρο του πόσο διασκορπισμένη γύρω από τη μέση τιμή είναι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής.

3.5.6.2 Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας

Παράδειγμα



Αν ρίξουμε ένα κέρμα γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από δύο ενδεχόμενα κεφαλή (Κ) ή γράμματα (Γ). Ο δειγματικός χώρος δηλαδή είναι $\{K, \Gamma\}$.

Αν συμβολίσουμε με X τον αριθμό των κεφαλών

Ποια είναι η πιθανότητα σ’ αυτό το πείραμα το X να είναι ίσο με 1 δηλαδή

$$P_X(1) = P[X=1] =$$

Ποια είναι η πιθανότητα το X να είναι ίσο με 0

$$P_X(0) = P[X=0] =$$

Υπάρχει δυνατότητα για άλλη τιμή του X ;

Απάντηση

$$P_X(1)=1/2$$

$$P_X(0)=1/2$$

Ενώ δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα.

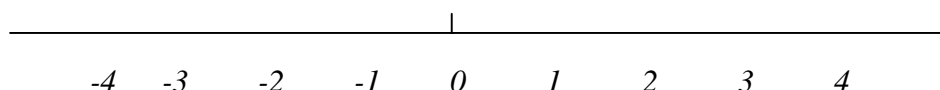
Στο συγκεκριμένο λοιπόν πείραμα τύχης παρατηρούμε ότι η πιθανότητα το X να είναι ίσο με 1 είναι ίδια με την πιθανότητα να έρθει κατά τη ρίψη κεφαλή (K) δηλαδή $P(K)$

Ανάλογα η πιθανότητα το $X=0$ είναι ίδια με $P(\Gamma)$

Δηλαδή

$\Delta.X.$	K	Γ
$X=$	1	0
P	1/2	1/2

Ας θεωρήσουμε τώρα την ευθεία των πραγματικών αριθμών.



και πάνω σ' αυτήν τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής.

Ας φανταστούμε την ευθεία αυτή σαν μία ράβδο χωρίς βάρος η οποία μπορεί να ισορροπήσει ή όχι στηριζόμενη σ' ένα σημείο της σαν να είναι ζυγαριά.

Παράδειγμα

Τοποθετούμε στο τασάκι της ζυγαριάς θέσης 0 βάρος όσο η $P_X(0)$, δηλαδή μισό κιλό και στο τασάκι της θέσης 1 βάρος όσο η $P_X(1)$, δηλαδή μισό κιλό. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ζυγαριά ώστε να ισορροπήσει;

Απάντηση

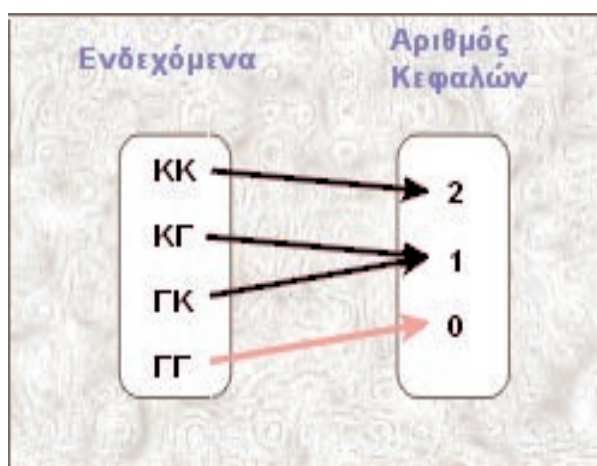
Η ζυγαριά θα ισορροπήσει στο μέσο του διαστήματος από το 0 έως το 1.

Παράδειγμα

Ας αναζητήσουμε τώρα το σημείο ισορροπίας στην περίπτωση που ρίχνουμε το κέρμα 2 φορές. Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ενδεχόμενα ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ. Παριστάνουμε πάλι με X τον αριθμό των κεφαλών.

Οι αντίστοιχες πιθανότητες όπως θυμόμαστε είναι:

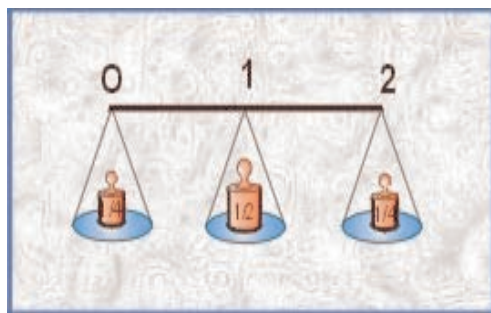
$\Delta.X.$	K K	$K\Gamma,$ ΓK	$\Gamma\Gamma$
$X=\chi$	2	1	0
$P[X=\chi]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Στη θέση 0, στη θέση 1 και στη θέση 2 τοποθετούμε βάρη ανάλογα με τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στους αριθμούς αυτούς σύμφωνα με τον πίνακα. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ζυγαριά ώστε να ισορροπεί; Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας;

Απάντηση

Η ζυγαριά πρέπει να στηριχθεί στο σημείο που αντιστοιχεί ο αριθμός 1.



3.5.6.3 Υπολογισμός της Μαθηματικής Ελπίδας.

Παράδειγμα

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ανάρριξης ενός ζαριού.

Ω	1	2	3	4	5	6
$X =$	1	2	3	4	5	6
$P[X =$	1	1	1	1	1	1
$] =$	/	/	/	/	/	/
	6	6	6	6	6	6

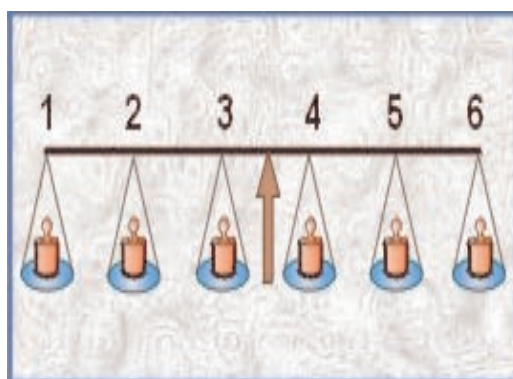
Αν σε κάθε θέση της τυχαίας μεταβλητής, όπως στο παραπάνω παράδειγμα, κρεμάσουμε ένα βάρος ανάλογο με την αντίστοιχη πιθανότητα, δηλαδή $1/6$ του κιλού. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος ώστε να ισορροπεί;

Απάντηση

Η ράβδος πρέπει να στηριχθεί στο μέσο της για να ισορροπεί.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Την αναπαράσταση αυτή όπως και του παραδείγματος 3 θα την λέμε **βαρόγραμμα**



Παράδειγμα

Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας; Ποια νομίζετε ότι είναι η σχέση του με το άθροισμα

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

Απάντηση

Στο σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί ο αριθμός 3,5 και είναι ίσος με το εν λόγω άθροισμα.

Το άθροισμα αυτό λέγεται **Μαθηματική Ελπίδα** για το συγκεκριμένο πείραμα και υπολογίζεται αναλυτικά όπως με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$x \cdot P$	1*1/6	2*1/6	3*1/6	4*1/6	5*1/6	6*1/6

Η Μαθηματική ελπίδα είναι:

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γενικά σε ένα πείραμα τύχης που οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής είναι x_1, x_2, \dots, x_k με αντίστοιχες πιθανότητες p_1, p_2, \dots, p_i

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_k
P	p_1	p_2	p_3	p_4	...	p_i
	$x_1 \cdot p_1$	$x_2 \cdot p_2$	$x_3 \cdot p_3$	$x_4 \cdot p_4$...	$x_k \cdot p_i$

Η Μαθηματική ελπίδα είναι:

$$M.E. = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_k p_i$$

Παράδειγμα

Σε ένα καφεενείο παίζεται ένα παιχνίδι με ζάρια ως εξής: Ο καφετζής πληρώνει στον παίκτη τόσα χιλιάδικα όσα η ένδειξη του ζαριού που ρίχνει ο παίκτης. Ένας παίκτης

πληρώνει 4 χιλιάρικα για να μπει στο παιχνίδι. Αν έχει το δικαίωμα να ρίξει το ζάρι πολλές φορές, έχει ελπίδες να βγει κερδισμένος;

Απάντηση

Όχι. Διότι έχουμε ήδη υπολογίσει ότι το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη είναι 3,5 χιλιάρικα ανά παιχνίδι. (η Μαθηματική Ελπίδα)

Παράδειγμα

Αν ο παίκτης του προηγούμενου παραδείγματος για να μπει στο παιχνίδι πληρώνει 3 χιλιάρικα, τι νομίζετε θα βγει κερδισμένος, θα βγει χαμένος ή ούτε θα κερδίσει ούτε θα χάσει; Ή με πόσα χρήματα νομίζετε ότι πρέπει να μπει στο παιχνίδι ώστε να έχει βάσιμες ελπίδες ότι φεύγοντας θα έχει μαζί του τόσα χρήματα όσα όταν μπήκε στο καφενείο;

Απάντηση

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται ότι θα βγει κερδισμένος και μάλιστα κατά 500 δραχμές. Και για να έχει βάσιμες ελπίδες ότι φεύγοντας θα έχει μαζί του τόσα χρήματα όσα όταν μπήκε στο καφενείο πρέπει να μπει στο παιχνίδι με 3.500 δραχμές.

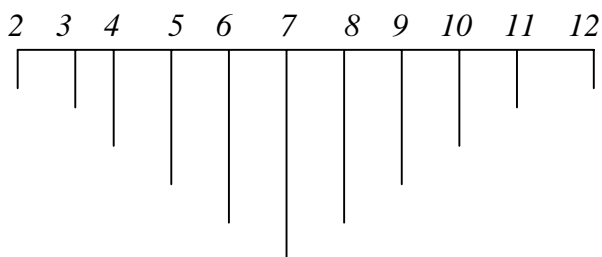
Παράδειγμα

Ρίχνουμε 2 ζάρια μαζί και καταγράφουμε το άθροισμα τους. Η τυχαία μεταβλητή χ είναι το άθροισμα των 2 ενδείξεων. Συμπληρώστε τον πίνακα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Σχεδιάστε την αναπαράσταση με τα βάρη, δηλαδή το βαρόγραμμα. Τοποθετείστε το σημείο ισορροπίας. Αν περιστρέψουμε το βαρόγραμμα κατά 180° γύρω από τον άξονα τι σας θυμίζει το διάγραμμα που προκύπτει;

Απάντηση

χ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$\chi \cdot P$	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	42/36	40/36	36/36	30/36	22/36	12/36

Το αποτέλεσμα της προηγούμενης δραστηριότητας είναι σε βαρόγραμμα.



Η τετμημένη του σημείου ισορροπίας συμπίπτει με την Μαθηματική Ελπίδα, δηλαδή

$$2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Αν περιστρέψουμε το βαρόγραμμα κατά 180° γύρω από τον άξονα μετασχηματίζεται σε ιστόγραμμα



Ασκηση 1

Κοιτάζτε προσεκτικά το παραπάνω ραβδόγραμμα. Ποιό από τα δυνατά αποτελέσματα αναμένεται να εμφανισθεί πιο συχνά;

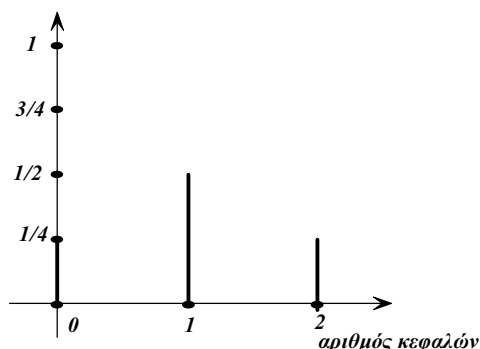
- α) Το 2 ή το 5;
- β) Το 4 ή το 9;
- γ) Το 7 ή το 10;
- δ) Το 4 ή το 10;

Απάντηση

- α) Είναι το 5
- β) Είναι το ίδιο
- γ) Το 7
- δ) Το ίδιο

Ασκηση 2

Στο πείραμα της ανάρριψης ενός κέρματος 2 φορές μας ενδιαφέρει η τυχαία μεταβλητή X που απαριθμεί τον αριθμό των καφαλών. Κατασκευάστε το ιστόγραμμα και υπολογίστε τη Μαθηματική Ελπίδα από τον σχετικό τύπο.

Απάντηση

$\Delta.X.$	KK	$KΓ, ΓΚ$	$ΓΓ$
$X=x$	2	1	0
$P[X=x]$	1/4	1/2	1/4

Έτσι έχουμε:

$$E(X) = 2 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 = 1$$

3.5.6.4 Διασπορά**Παράδειγμα**

Παρατηρήστε τα 2 ιστογράμματα για τα αντίστοιχα πειράματα τύχης που προαναφέραμε. Είναι ενδιαφέρον να ξέρουμε σε ένα πείραμα τύχης πόσο διεσπαρμένες είναι οι τιμές της μεταβλητής γύρω από την τιμή της Μαθηματικής Ελπίδας.

Απάντηση

Στην περίπτωση του κέρματος έχουμε λίγες τιμές κοντά στην τιμή της Μαθηματικής Ελπίδας, ενώ στο πείραμα των 2 ζαριών οι τιμές είναι πολύ περισσότερο διεσπαρμένες γύρω από τη Μαθηματική Ελπίδα.

Ας δούμε πως μπορούμε να μετρήσουμε αυτή τη διασπορά.

Παράδειγμα

Ας επανέλθουμε στο πείραμα της ανάρριψης ενός κέρματος 2 φορές. Συμπληρώστε τον πίνακα όπως στο παράδειγμα 5.3.5. Βρείτε εν συνεχεία τη Μαθηματική Ελπίδα. Σχηματίστε τις διαφορές $ME - x_i$. Πάρτε τώρα τα τετράγωνα των διαφορών. Σχηματίστε το $(ME - x_i)^2 P_i$. Υπολογίστε το άθροισμα.

Απάντηση

$\Delta.X.$	0	1	2	
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$	
$x_i * P_i$	$0*1/4$	$1*1/2$	$2*1/4$	1
$ME - x_i$	1-0	1-1	1-2	

Τα τετράγωνα των διαφορών

$(ME - x_i)^2$	1^2	0^2	$(-1)^2$	
$(ME - x_i)^2 P_i$	$1 \bullet 1/4$	$0 \bullet 1/2$	$1 \bullet 1/4$	$1/2$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός $1/2$ καλείται **διασπορά** και εκφράζει πόσο αποκλίνουν οι τιμές της μεταβλητής γύρω από την ME

Συμπέρασμα

Τα αριθμητικά μας λοιπόν αποτελέσματα είναι σύμφωνα με αυτό που διαισθητικά είχαμε παρατηρήσει από τα ιστογράμματα.

3.5.6.5 Ασκήσεις.

1. Να βρείτε τη διασπορά στο πείραμα της ανάρριψης 2 ζαριών.

2. Σ' ένα παιχνίδι ένας παίκτης ρίχνει ένα ζάρι. Ο παίκτης κερδίζει 20 δραχμ. αν έρθει 2, 40 δραχμ. εάν έρθει 4, χάνει 30 δραχμές εάν έρθει 6 και ούτε κερδίζει ούτε χάνει αν έρθει άλλος αριθμός. Πόσες δραχμές αναμένεται να κερδίσει σ' ένα παιχνίδι.

3. Σ' ένα λαχνό υπάρχουν 200 βραβεία (κέρδη) των 5 χιλιάδων δραχμών, 20 βραβεία των 25 χιλιάδων δραχμών και 5 βραβεία των 100 χιλιάδων δραχμών. Εάν πρόκειται να μοιραστούν 10000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;

4. Υπολογίστε τη διασπορά στα υπόλοιπα παραδείγματα του κεφαλαίου.

5. Τα σωματικά βάρη 5 ανθρώπων είναι 75, 59, 90, 68, 80 κιλά. Να βρείτε τη διασπορά.

6. Ένας μετεωρολόγος μετράει κάθε 3 ώρες τη θερμοκρασία σε μία περιοχή. Οι μετρήσεις σε βαθμούς Κελσίου είναι:

-3 -1 -2 0 4 3 1 2

Να υπολογίσετε τη διασπορά των παραπάνω μετρήσεων.

7. Εάν $P[X=1]=\rho$ και $P[X=0]=\alpha$,

Ν' αποδειχθεί ότι η Μαθηματική Ελπίδα ισούται με ρ .

3.6 Σενάριο 6ης Ενότητας

3.6.1 Περιγραφή

Στην ενότητα αυτή θα γίνει σύνδεση της έννοιας της πιθανότητας με έννοιες και μεθόδους που διδάσκονται οι μαθητές στην Άλγεβρα και στην Αριθμητική, όπως και το τρίγωνο του Pascal. Θα γίνει μελέτη δυωνυμικών πειραμάτων με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης και εξερεύνηση της δυωνυμικής κατανομής.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.6.2 Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι

- α) Σύνδεση της έννοιας της πιθανότητας με έννοιες και μεθόδους που διδάσκονται εν μέρει στην Άλγεβρα και την Αριθμητική, όπως οι ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2 = \dots$, $(\alpha + \beta)^3 = \dots$ και το Τρίγωνο του Pascal.
- β) Εξερεύνηση μιας σημαντικής διακριτής κατανομής, της Διωνυμικής Κατανομής.

3.6.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων.

Χρήση οπτικών αναπαραστάσεων (με κυριότερο παράδειγμα το Τρίγωνο του Pascal). Εισαγωγή πάλι μέσω της οικείας εικόνας της Ρωμαϊκής Κρήνης.

1. Διωνυμική κατανομή
2. Ρωμαϊκή κρήνη
Ανάπτυξη μέχρι 3 δοκιμές,
Ένα μοντέλο μάζας για τη Διωνυμική κατανομή.
3. Από τη ρωμαϊκή κρήνη στο τρίγωνο του Pascal
 - α) Εφαρμογή στις ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha + \beta)^3$.
 - β) Ιδιότητες του τριγώνου του Pascal.
4. Παραδείγματα - Ασκήσεις
5. Άλλα παραδείγματα και εποπτικά μέσα για τη διαισθητική προσέγγιση της δυωνυμικής κατανομής.
Πίνακας Galton.
Το φύλο ενός παιδιού, ρίψη κέρματος κ.ά.
6. Ανακεφαλαίωση
7. Προβλήματα

3.6.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές και ζητάμε να υπολογίσετε την πιθανότητα στις 5 ρίψεις του νομίσματος να έλθουν ακριβώς 2 κεφαλές.

Υπόδειξη

Αν αθροίσω τους αριθμούς στην σειρά της 5^{ης} ρίψης παίρνω το άθροισμα 32. Άρα οι 5 ρίψεις μπορούν να σχηματίσουν 32 διαφορετικά ενδεχόμενα.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(5K)=$;

Απάντηση

$$P(5K)=10/32=5/16$$

Άσκηση 2

Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal να υπολογίσετε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν 3 Κεφαλές για 4 ρίψεις ενός νομίσματος, άρα και ποια η πιθανότητα να έρθουν 3Κ σε 4 ρίψεις;

Απάντηση

Η απάντηση στο 1^ο είναι 4 και στο 2^ο είναι 4/16.

Τρόπος δημιουργίας του τριγώνου του Pascal

Το τρίγωνο του Pascal εκτός από τις πιθανότητες έχει και πολλές άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Ας δούμε όμως πρώτα και έναν άλλο τρόπο να δημιουργούμε αυτό το τρίγωνο εκτός από τη ρωμαϊκή κρήνη



Όπως βλέπουμε στην οθόνη η 5^η σειρά δημιουργείται από την 4^η αθροίζοντας τους όρους της 4^{ης} σειράς ανά 2.

Άσκηση 3

Να συμπληρωθούν τα κενά στην 6^η σειρά: $\alpha=$; $\beta=$; $\gamma=$; $\delta=$;

Απάντηση

$$\alpha=5, \beta=10, \gamma=10, \delta=5$$

Παρατήρηση

Σχηματίζουμε το τρίγωνο του Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Το τρίγωνο του Pascal έχει άμεση σχέση με τα αναπτύγματα των δυνάμεων $(\alpha + \beta)^0$, $(\alpha + \beta)^1$, $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha + \beta)^3$, κ.λ.π.

Παρατηρώντας τους συντελεστές και τα αναπτύγματα βλέπουμε ότι σχηματίζουν το τρίγωνο του Pascal.

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)^0 &= 1 \\
 (\alpha + \beta)^1 &= 1\alpha + 1\beta \\
 (\alpha + \beta)^2 &= 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2 \\
 (\alpha + \beta)^3 &= 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3
 \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^2$ έχει συντελεστές 1,2,1, δηλαδή τους αριθμούς της 3^{ης} γραμμής. Το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^3$ έχει συντελεστές 1,3,3,1, δηλαδή τους αριθμούς της 4^{ης} γραμμής.

Άσκηση 4

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για το ανάπτυγμα οποιασδήποτε δύναμης του $(\alpha + \beta)$. Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha + \beta)^4$.

$(\alpha + \beta)^0 = 1$ $(\alpha + \beta)^1 = 1\alpha + 1\beta$ $(\alpha + \beta)^2 = 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2$ $(\alpha + \beta)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$	$(\alpha + \beta)^4 = 1\alpha^4 + \chi\alpha^3\beta + \psi\alpha^2\beta^2 + \zeta\alpha\beta^3 + 1\beta^4$ $\chi=;$ $\psi=;$ $\zeta=;$
--	---

Απάντηση

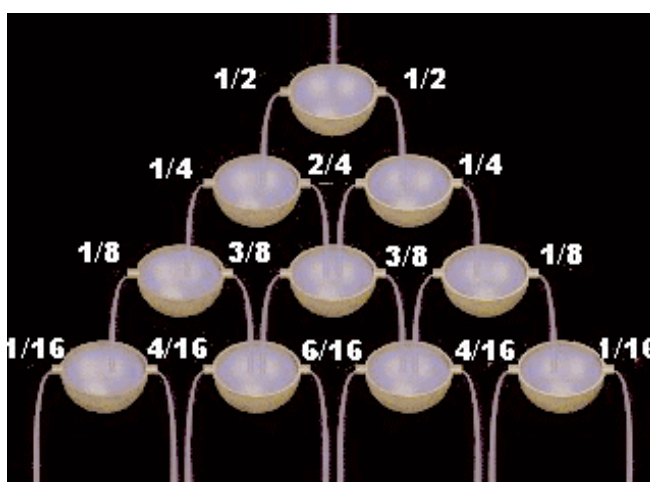
$$X=4$$

$$\Psi=6$$

$$Z=4$$

Άσκηση 5

Αν υποθέσουμε ότι τα 2 φύλα έχουν την ίδια πιθανότητα κατά τη γέννηση ενός παιδιού να υπολογιστούν οι πιθανότητες να γεννηθούν 0 αγόρια, 1 αγόρι, 2 αγόρια και 3 αγόρια σε οικογένεια που έχει 4 παιδιά.



Η πιθανότητα $P(0)$ σε μια οικογένεια με 4 παιδιά βρίσκεται με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης:

$$0 \text{ αγόρια } P(0)=1/16$$

$$1 \text{ αγόρι } P(1)=4/16$$

$$2 \text{ αγόρια } P(2)=6/16$$

$$3 \text{ αγόρια } P(3)=4/16$$

Άσκηση 6

Χρησιμοποιώντας τη Ρωμαϊκή κρήνη να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει μια τριμελής οικογένεια

$$1^\circ : 1 \text{ αγόρι } P(1)=;$$

$$2^\circ : 3 \text{ αγόρια } P(3)=;$$

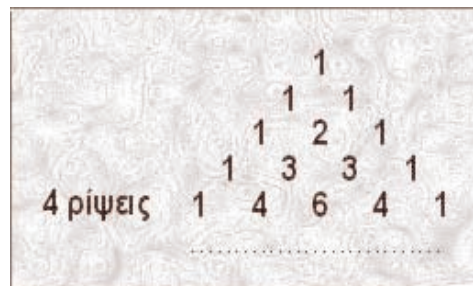
Απάντηση

$$P(1)=3/8$$

$$P(2)=1/8$$

Άσκηση 7

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν ακριβώς 4 Κεφαλές για 4 ρίψεις ενός νομίσματος; Για την επίλυση της άσκησης να χρησιμοποιήσετε το τρίγωνο του Pascal.

**Απάντηση**

Οι τρόποι είναι 4.

Άσκηση 8

Χρησιμοποιώντας την 3^η σειρά από κούπες της ρωμαϊκής κρήνης να υπολογίσετε μετά από 3 αναρρίψεις ενός νομίσματος τις πιθανότητες $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$



$$P(0)=;$$

$$P(1)=;$$

$$P(2)=;$$

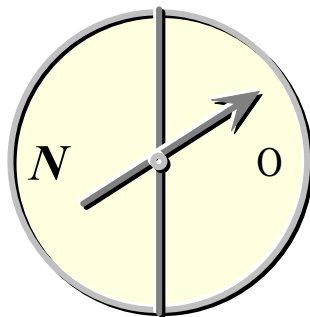
$$P(3)=;$$

Απάντηση

$$P(0)=1/8, \quad P(1)=3/8, \quad P(2)=3/8, \quad P(3)=1/8$$

Άσκηση 9

Ας θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε τον τροχό του **ναι -όχι** 5 φορές. Η 5^η σειρά από τις κούμπες της ρωμαϊκής κρήνης ή η 5^η σειρά από το τρίγωνο του Pascal δίνουν ως δυνατά 32 διαφορετικά αποτελέσματα:



Βρείτε την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο

1. 2 φορές ναι $P(2)=;$
2. 4 φορές ναι $P(4)=;$
3. 5 φορές ναι $P(5)=;$

Υπόδειξη:

5^η σειρά 5 περιστροφές $1/32, 5/32, 10/32, 10/32, 5/32, 1/32$

Απάντηση

$P(2)=10/32, P(4)=4/32, P(5)=5/32$

Άσκηση 10

Σε μια τράπουλα μισές κάρτες είναι κόκκινες και οι υπόλοιπες είναι μαύρες. Κόβουμε την τράπουλα 4 φορές και από το τρίγωνο του Pascal για την 4^η σειρά πληροφορούμαστε ότι υπάρχουν 16 πιθανά αποτελέσματα για τα 4 «κοψίματα». Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(0), P(2), P(3)$.

Υπόδειξη

Αν σχηματίσουμε το τρίγωνο του Pascal μέχρι την 5^η σειρά θα δούμε ότι η 5^η σειρά είναι: 1 5 10 10 5 1

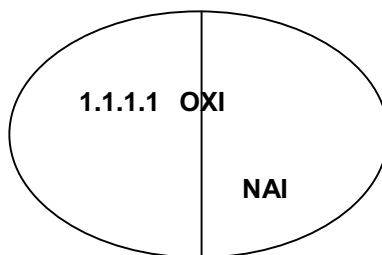
Απάντηση

$P(0)=1/16, P(2)=6/16, P(3)=4/16$

3.6.5 Φύλλο Εργασίας

Θέμα 1

Ο ΤΡΟΧΟΣ ΤΗΣ ΤΥΧΗΣ



- I.) Ας θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε τον τροχό του ναι-όχι 5 φορές. Η 5^η σειρά από τις κούπες της ρωμαϊκής κρήνης ή η 5^η σειρά από το τρίγωνο του Pascal δίνουν ως πιθανά 32 διαφορετικά αποτελέσματα

1/32, 5/32, 10/32, 10/32, 5/32, 1/32

Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: "2 φορές ναι"

- A. 10/32
 - B. 5/32
 - Γ. 6/32
 - Δ. 0
- II) Στον παραπάνω τροχό τύχης 4 φορές "ναι"
- A. 4/32
 - B. 5/32
 - Γ. 6/32
 - Δ. 0

Θέμα 2

Σχεδιάστε μία Ρωμαϊκή κρήνη και υπολογίστε τους συντελεστές του αναπτύγματος

$$(α+β)^4$$

$$(α+β)^7$$

Ποιους άλλους τρόπους μπορείτε να βρείτε για να υπολογίσετε τις παραπάνω δυνάμεις;

Θέμα 3

Σχεδιάστε δικά σας σχήματα αν μπορείτε και εξάγετε ανάλογα συμπεράσματα με αυτά του Κεφαλαίου 4.

Θέμα 4

Προσθέστε τους αριθμούς κάθε γραμμής στο τρίγωνο Pascal. Διακρίνετε κάποια κανονικότητα;

Θέμα 5

Τι παρατηρείτε για τους αριθμούς που βρίσκονται στη 3^η διαγώνιο;

Απαντήσεις

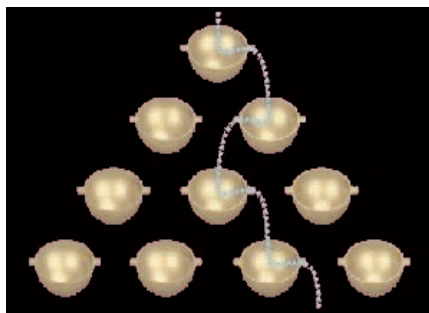
1. I) B
II) B
2. 1,4,6,4,1
1,7,21,35,35,21,7,1
4. Είναι τριγωνικοί αριθμοί.

3.6.6 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή**3.6.6.1 Εισαγωγή**

Στην ενότητα αυτή θα γίνει σύνδεση της έννοιας της πιθανότητας με έννοιες και μεθόδους που διδάσκονται οι μαθητές στην Άλγεβρα και στην Αριθμητική, όπως και το τρίγωνο του Pascal. Θα γίνει μελέτη δυωνυμικών πειραμάτων με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης και εξερεύνηση της δυωνυμικής κατανομής.

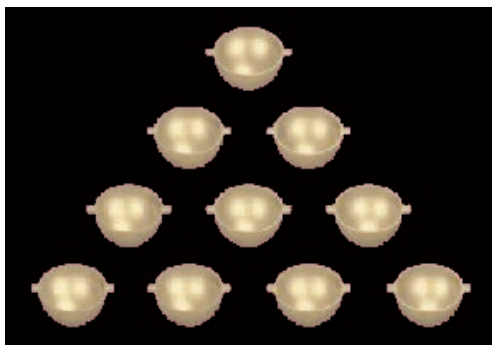
3.6.6.2 Δυωνυμικά πειράματα

Μελέτη δυωνυμικών πειραμάτων με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης

Παράδειγμα

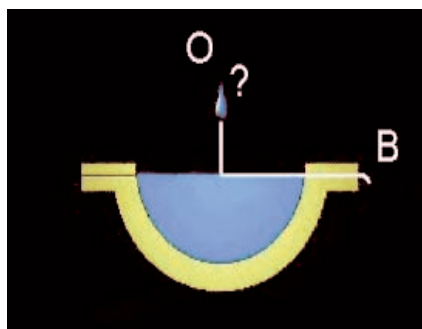
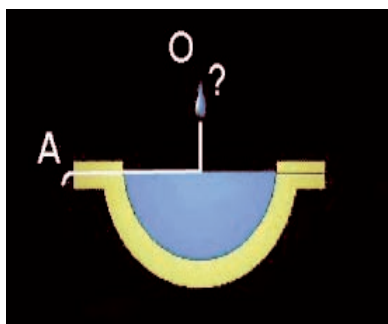
Θεωρούμε μια Ρωμαϊκή κρήνη με 4 σειρές κούπες. Παρατηρώντας την ξανά ως παρακολουθήσουμε τη διαδρομή ενός μορίου νερού ξεκινώντας από το σημείο O και φτάνοντας μέχρι την 4^η σειρά.

Σχεδιάστε μια οποιαδήποτε δική σας διαδρομή

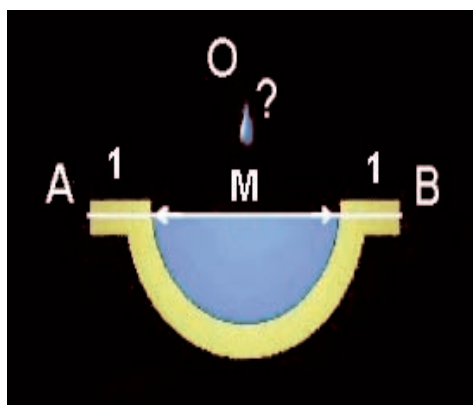
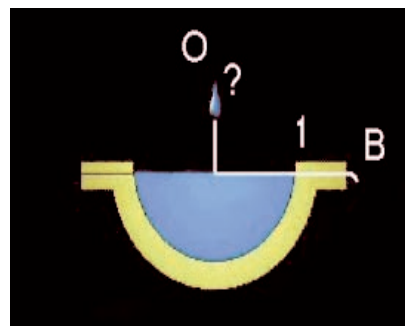
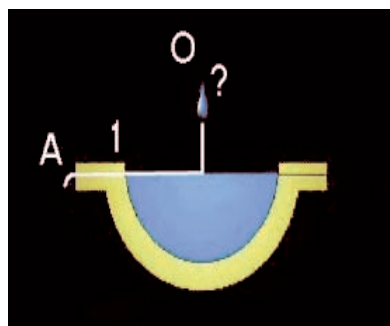


Το τυχαίο πείραμα της ρωμαϊκής κρήνης είναι ένα πολύ θεαματικό μοντέλο μάζας για πειράματα με 2 δυνατά αποτελέσματα, τα οποία ονομάζονται Δυωνυμικά Πειράματα

Ας δούμε όμως σταδιακά τη διαδρομή του μορίου



Απομονώνουμε μια κούπα από τη Ρωμαϊκή κρήνη και μια σταγόνα που θα μπορούσε να αναρωτιέται πού να πάει, προς το *A* ή προς το *B*; Δηλαδή υπάρχουν 2 ακριβώς ισοπίθανες διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το μόριο του νερού: τη διαδρομή *OMA* ή τη διαδρομή *OMB*.



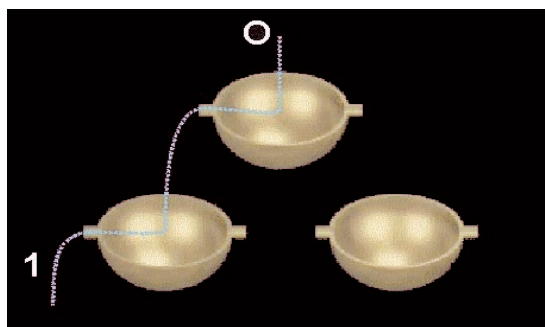
Άρα το πείραμα τύχης της διαδρομής κάθε μορίου νερού είναι ένα τυχαίο πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Το πείραμα αυτό είναι αντίστοιχο με το στρίψιμο ενός νομίσματος που και αυτό είναι ένα Δυωνυμικό πείραμα.

Ορισμός:

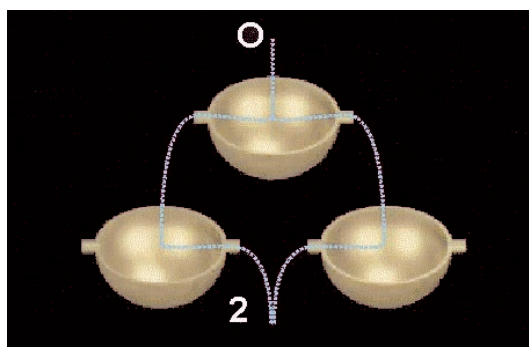
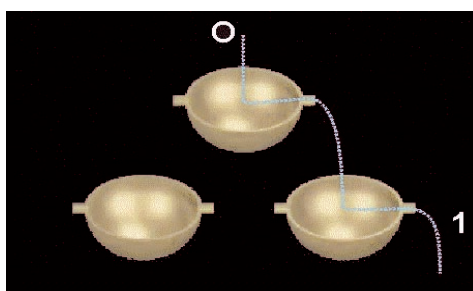
Δυναμικά πειράματα είναι τα πειράματα με δύο δυνατά αποτελέσματα.

Ας προχωρήσουμε τώρα και στη δεύτερη σειρά με τις κούπες. Μπορούμε να παρατηρήσουμε 4 διαφορετικές ενός μορίου νερού για να φτάσει από το O σε εκροή από τις κούπες της 2^{ης} σειράς.

Μια διαδρομή μέχρι το σημείο που είναι ο αριθμός 1.



Άλλες 2 διαδρομές για το σημείο ανάμεσα στις 2 κούπες
Και η 4^η διαδρομή μέχρι το σημείο που είναι ο αριθμός 1

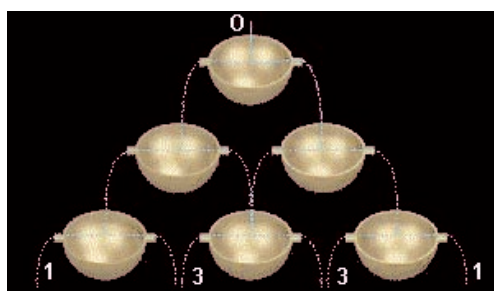


Δηλαδή οι 4 διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το μόριο είναι αυτές που αναλυτικά φαίνονται στο σχήμα.

Αν προσθέσουμε άλλη μια σειρά κούπες παρατηρούμε ότι οι διαφορετικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένα μόριο νερού για να φτάσει στις εκροές της 3^{ης} σειράς είναι 8. Αναλυτικά είναι όπως φαίνονται στο σχήμα

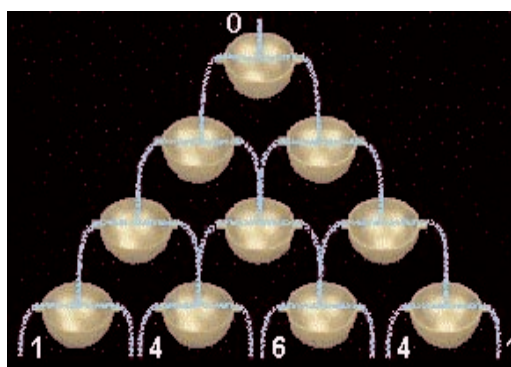
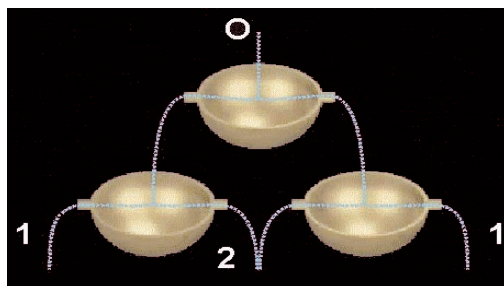
Δηλαδή οι πιθανές διαδρομές ενός μορίου νερού είναι $1+3+3+1=8$.

Με την ίδια λογική συμπληρώνονται οι αριθμοί που φαίνονται στην 4^η σειρά και που δείχνουν τον αριθμό των διαφορετικών διαδρομών που αντιστοιχούν σε κάθε θέση



στην εκροή της 4^{ης} σειράς.

Ρωμαϊκή κρήνη με 4 σειρές



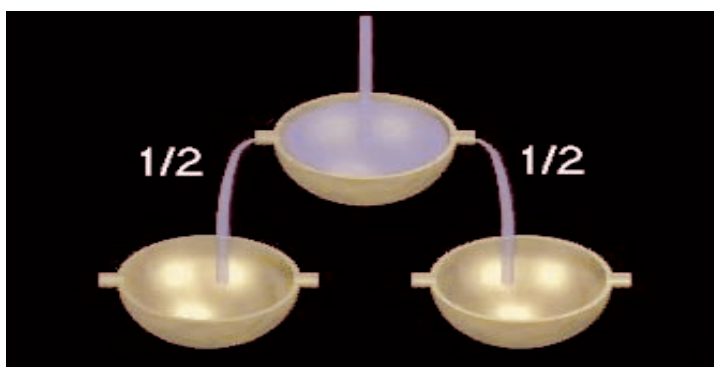
Δηλαδή οι πιθανές διαδρομές ενός μορίου είναι 16 ($1+4+6+4+1=16$)

Συμπέρασμα

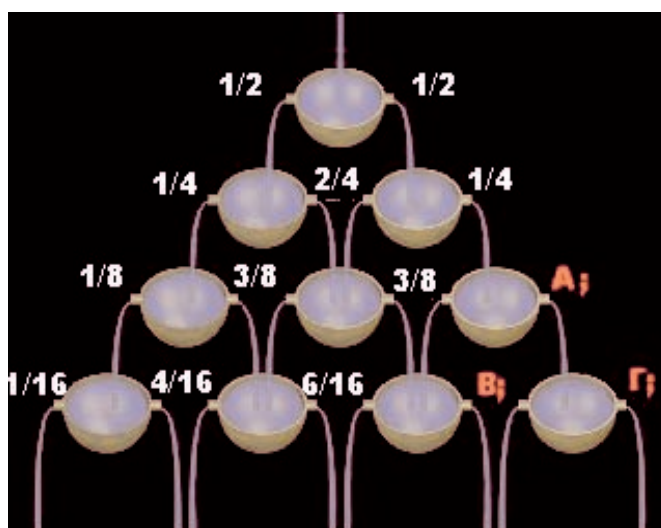
Η ρωμαϊκή κρήνη είναι ένα φυσικό μοντέλο μάζας που στην ουσία περιγράφει ένα πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Λόγω της συμμετρίας που έχουν οι κούπες, μισή μάζα μορίων εκρέει από τη μία μεριά και μισή από την άλλη. Επειδή υπάρχει άπειρος αριθμός μορίων είναι σαν να επαναλαμβάνουμε το τυχαίο πείραμα άπειρες φορές. Έτσι η μάζα του νερού που μοιράζεται μας δίνει την πιθανότητα ενός συγκεκριμένου μορίου να βγει από τη μία ή την άλλη εκροή.

Παράδειγμα

Ας ξαναγυρίσουμε στη Ρωμαϊκή κρήνη με 3 κούπες όπου η αρχική μάζα του νερού που ισούται με 1 μοιράζεται σε $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$ έτσι ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$



Με τον ίδιο τρόπο ερμηνεύονται και οι πιθανότητες για τις υπόλοιπες σειρές, όπως φαίνεται στη Ρωμαϊκή κρήνη που ακολουθεί.



Ομοίως στην 3^η σειρά κ.λ.π.

Ασκηση

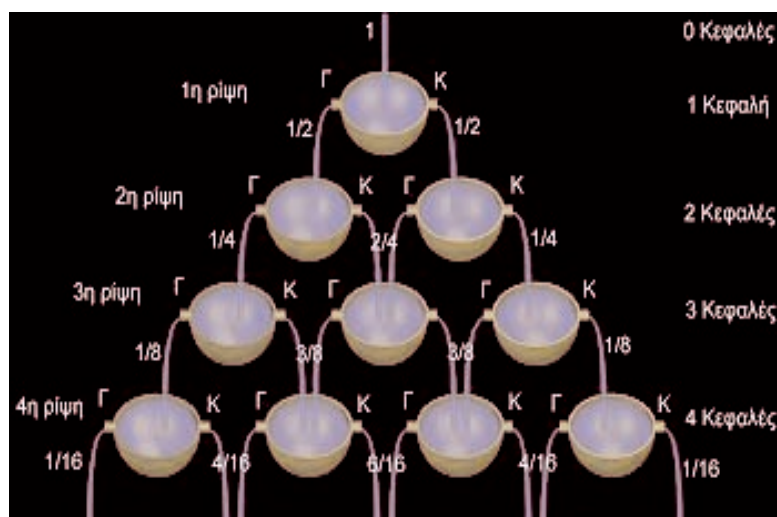
Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά; $A=$; $B=$; $\Gamma=$;

Απάντηση

$A=1/8$, $B=4/16$, $\Gamma=1/16$

3.6.6.3 Τρίγωνο του Pascal

Η Ρωμαϊκή κρήνη μπορεί να χρησιμεύσει σαν μοντέλο για τη μελέτη και άλλων δυνωμικών πειραμάτων. Έτσι λοιπόν αν σε μία κούπα ονομάσουμε τη δεξιά εκροή K (κεφαλή) και την αριστερή Γ (γράμμα), φαίνεται ότι το πείραμα τύχης κάθε μορίου νερού αντιστοιχεί στο στρίψιμο ενός νομίσματος.



Ας δούμε πως υπολογίζουμε την πιθανότητα να έχουμε 1 επιτυχία (Κεφαλή) σε 2 ρίψεις. Οι διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένα συγκεκριμένο μόριο νερού από το σημείο Γ της 1^{ης} κούπας μέχρι τις κούπες της 2^{ης} σειράς είναι 4: 1^η από το Γ στο Γ , 2^η από το Γ στο K , 3^η από το K στο Γ και 4^η από το K στο K . Από αυτές τις διαδρομές 2 είναι που περνάνε από το ζητούμενο σημείο $\Gamma \rightarrow K$ και $K \rightarrow \Gamma$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα, που είναι ίση με τις 2 μάζες νερού που αντιστοιχούν στις 2 αυτές διαδρομές, είναι $2/4$.

Παρατηρώντας τη ρωμαϊκή κρήνη με τις πιθανότητες βλέπουμε ότι:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Από τους αριθμητές των κλασμάτων που παριστάνουν πιθανότητες οδηγούμαστε σε ένα τρίγωνο γνωστό σαν τρίγωνο του Pascal που έχει πολλές εφαρμογές στις πιθανότητες και αλλού.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+2+1}{4} = 1 \quad \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1+3+3+1}{8} = 1$$



Τρίγωνο του Pascal

Ασκηση

Αν ρίξουμε ένα νόμισμα 4 φορές, ποιά είναι τα δυνατά αποτελέσματα και με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να έρθουν ακριβώς 2 κεφαλές;

Απάντηση

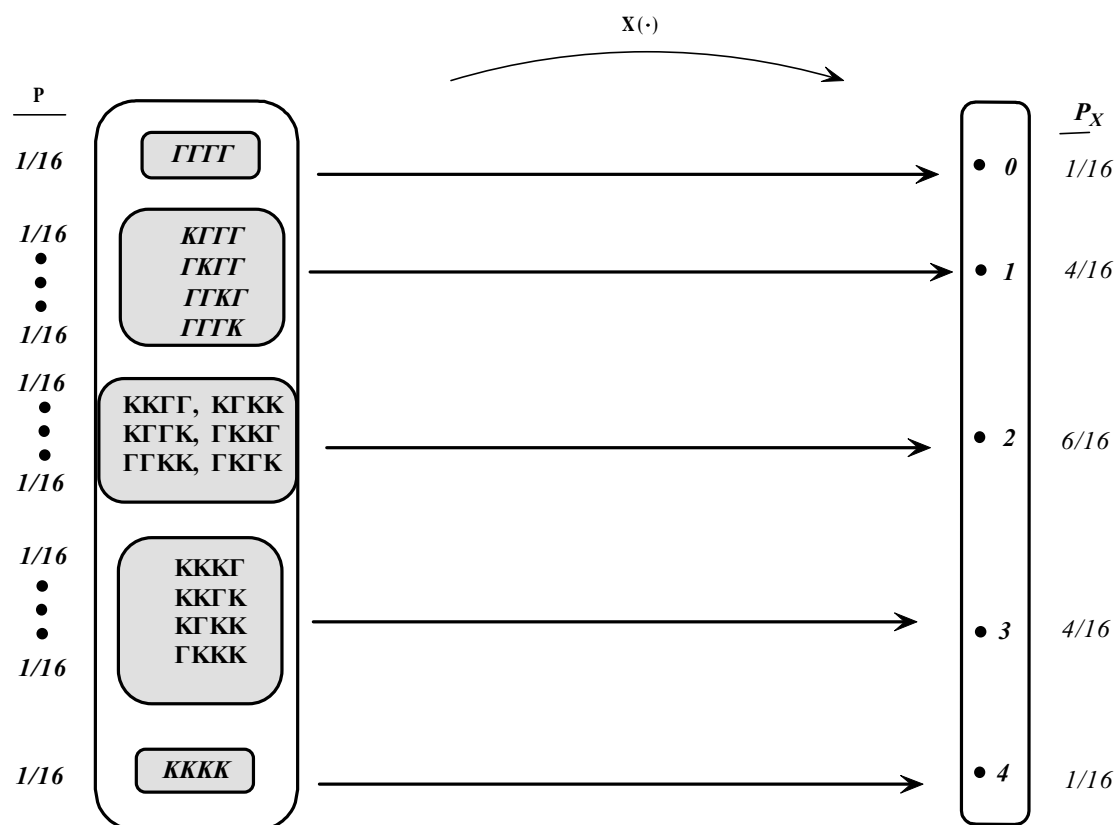
Ας λύσουμε αυτό το πρόβλημα με 2 διαφορετικούς τρόπους. Στην 1^η λύση θα φτιάξουμε έναν πίνακα με τα ενδεχόμενα και στη 2^η λύση θα χρησιμοποιήσουμε το τρίγωνο του Pascal.

0 κεφαλές	1 κεφαλή	2 κεφαλές	3 κεφαλές	4 κεφαλές
ΓΓΓΓ	ΓΓΓΚ	ΓΓΚΚ	ΚΚΚΓ	ΚΚΚΚ
	ΓΓΚΓ	ΓΚΓΚ	ΚΚΓΚ	
	ΓΚΓΓ	ΓΚΚΓ	ΚΓΚΚ	
	ΚΓΓΓ	ΚΓΓΚ	ΓΚΚΚ	
		ΚΓΚΓ		
		ΚΚΓΓ		
1 ενδεχόμενο	4 ενδεχόμενα	6 ενδεχόμενα	4 ενδεχόμενα	1 ενδεχόμενο

Από τα 16 ενδεχόμενα μόνο τα 6 έχουν 2 κεφαλές. Τα νούμερα 1,4,6,4,1 είναι όπως ακριβώς εμφανίζονται στο τρίγωνο του Pascal στην αντίστοιχη γραμμή.

3.6.6.4 Κατανομή πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής σε Δυωνυμικά πειράματα

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X που στέλνει τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός νομίσματος 4 φορές στον αριθμό που δείχνει τις κεφαλές που ήρθαν. Έτσι λοιπόν στο ενδεχόμενο ΓΤΤΓ αντιστοιχεί η τιμή 0, ενώ στο ΓΚΚΓ η τιμή 2 κ.λ.π.



Όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ΓΤΤΓ, ..., ΚΚΚΚ έχουν ίση πιθανότητα ίση με $1/16$. Έτσι π.χ. $P_X[X=1]=4/16$, $P_X[X=2]=6/16$ κ.λ.π.

Ορισμός

Σε πειράματα τύχης όπως η ρίψη ενός νομίσματος που:

- 1) Κάθε ρίψη έχει 2 δυνατά αποτελέσματα “Κ” ή “Τ”,
- 2) Για κάθε ρίψη $P(K) = 1 - P(T)$ και
- 3) Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες

Η κατανομή πιθανότητας της X , P_X λέγεται **δυωνυμική κατανομή**.

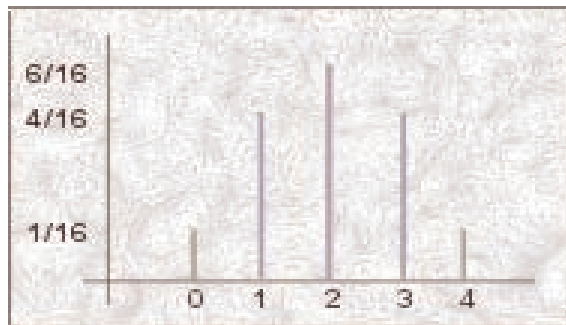
Περιγραφή της κατανομής της πιθανότητας του πειράματος:

α) με έναν πίνακα

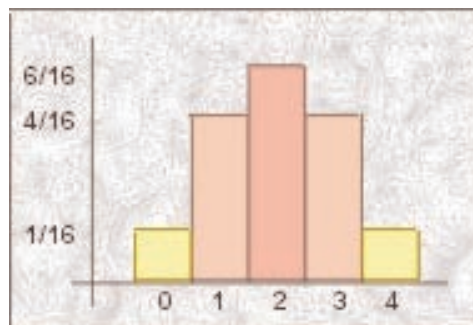
Τιμές τυχ. μεταβλητής	0	1	2	3	4
Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Επίσης μπορούμε να περιγράψουμε την κατανομή της πιθανότητας του πειράματος της ρίψης ενός νομίσματος 4 φορές που είναι μια δυωνυμική κατανομή και με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα:

β) Ραβδόγραμμα

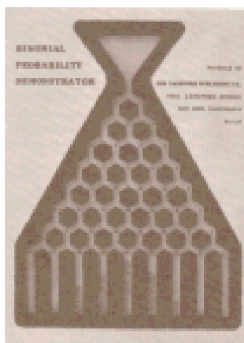


γ) Ιστόγραμμα



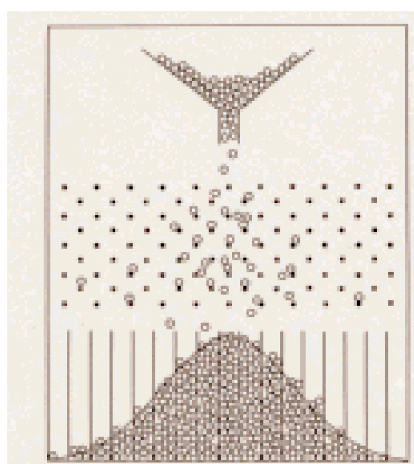
3.6.6.5 Πειράματα Δυωνυμικής Κατανομής

Ας παρακολουθήσουμε δύο πειράματα για την επίδειξη της Δυωνυμικής κατανομής



Μηχανή επίδειξης Διωνυμικής κατανομής

Στην πρώτη μηχανή έχουν ριχτεί 256 σφαίρες. Η πιθανότητα κάθε σφαίρας να πάει δεξιά ή αριστερά είναι $\frac{1}{2}$



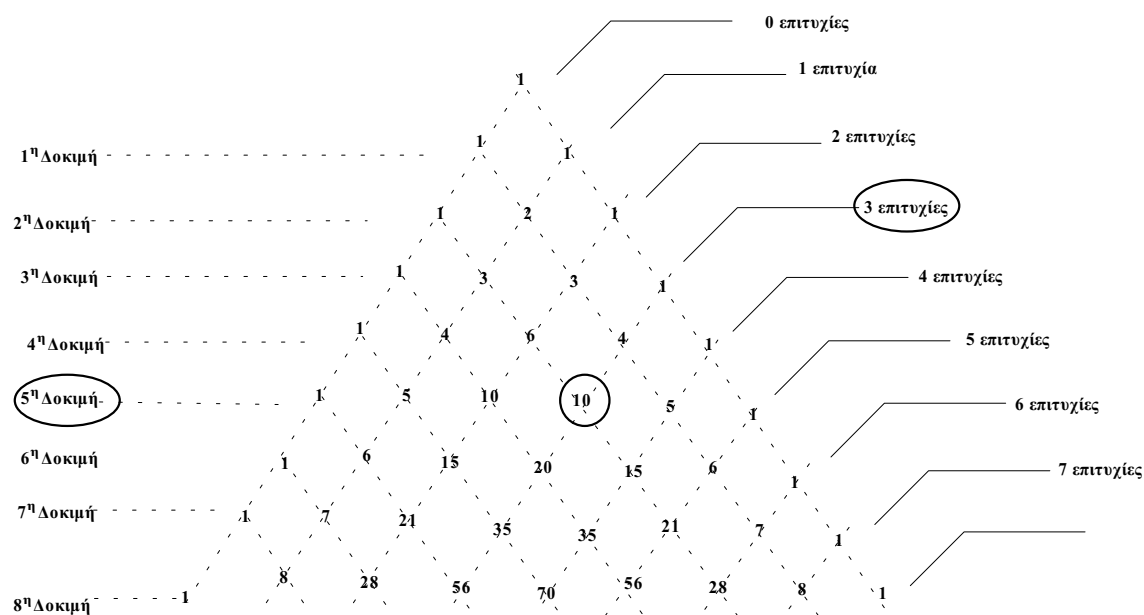
Πίνακας του Galton

Στον πίνακα που παρακολουθούμε οι μπίλιες είναι πολλές και τα διαμερίσματα στενά έτσι που οι μπίλιες να δημιουργούν περίπου μια καμπύλη που λέγεται κανονική κατανομή

3.6.6.6 Εφαρμογές του τριγώνου του Pascal

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 1 φορά, 2 φορές, 3 φορές..... και καταγράφουμε τον αριθμό των κεφαλών που είναι δυνατόν να εμφανιστούν στο σύνολο των ρίψεων, ενώ συγχρόνως βλέπουμε πως μπορούμε να βρούμε τις ίδιες τιμές από το τρίγωνο του Pascal.



Για παράδειγμα στην περίπτωση που στρίβουμε ένα νόμισμα έχουμε:

0 ρίψεις	1	0 κεφαλές
1 ρίψη	1 1	1 κεφαλή
2 ρίψεις	1 2 1	2 κεφαλές
3 ρίψεις	1 3 3 1	3 κεφαλές
4 ρίψεις	1 4 6 4 1	4 κεφαλές
5 ρίψεις	1 5 10 10 5 1	5 κεφαλές

Από τα 16 δυνατά αποτελέσματα, 6 θα έχουν ακριβώς 2 κεφαλές

Το άθροισμα $1+4+6+4+1=16$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να πέσει ένα νόμισμα σε 4 ρίψεις.

Παρατηρώντας το σημείο που συναντιούνται οι δύο γραμμές – η μία με τις 4 ρίψεις και η άλλη με τις 2 κεφαλές – που είναι ο αριθμός 6, παίρνουμε την πληροφορία ότι από τα 16 πιθανά αποτελέσματα 6 θα έχουν ακριβώς 2 κεφαλές. Άρα η πιθανότητα να έχω 2 Κ σε 4 ρίψεις είναι $6/16$.

Άσκηση 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές και ζητάμε να υπολογίσετε την πιθανότητα στις 5 ρίψεις του νομίσματος να έλθουν ακριβώς 2 κεφαλές.

Υπόδειξη

Αν αθροίσω τους αριθμούς στην σειρά της 5^{ης} ρίψης παίρνω το άθροισμα 32. Άρα οι 5 ρίψεις μπορούν να σχηματίσουν 32 διαφορετικά ενδεχόμενα.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(5K)=$;

Απάντηση

$$P(5K)=10/32=5/16$$

Ασκηση 2

Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal να υπολογίσετε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν 3 Κεφαλές για 4 ρίψεις ενός νομίσματος, άρα και ποια η πιθανότητα να έρθουν 3Κ σε 4 ρίψεις;

Απάντηση

Η απάντηση στο 1^ο είναι 4 και στο 2^ο είναι 4/16.

Τρόπος δημιουργίας του τριγώνου του Pascal

Το τρίγωνο του Pascal εκτός από τις πιθανότητες έχει και πολλές άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Ας δούμε όμως πρώτα και έναν άλλο τρόπο να δημιουργούμε αυτό το τρίγωνο εκτός από τη ρωμαϊκή κρήνη



Όπως βλέπουμε στην οθόνη η 5^η σειρά δημιουργείται από την 4^η αθροίζοντας τους όρους της 4^{ης} σειράς ανά 2.

Ασκηση 3

Να συμπληρωθούν τα κενά στην 6^η σειρά: $\alpha=$; $\beta=$; $\gamma=$; $\delta=$;

Απάντηση

$$\alpha=5, \beta=10, \gamma=10, \delta=5$$

Παρατήρηση

Σχηματίζουμε το τρίγωνο του Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Το τρίγωνο του Pascal έχει άμεση σχέση με τα αναπτύγματα των δυνάμεων $(\alpha + \beta)^0$, $(\alpha + \beta)^1$, $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha + \beta)^3$, κ.λ.π.

Παρατηρώντας τους συντελεστές και τα αναπτύγματα βλέπουμε ότι σχηματίζουν το τρίγωνο του Pascal.

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)^0 &= 1 \\
 (\alpha + \beta)^1 &= 1\alpha + 1\beta \\
 (\alpha + \beta)^2 &= 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2 \\
 (\alpha + \beta)^3 &= 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3
 \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^2$ έχει συντελεστές 1,2,1, δηλαδή τους αριθμούς της 3^{ης} γραμμής. Το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^3$ έχει συντελεστές 1,3,3,1, δηλαδή τους αριθμούς της 4^{ης} γραμμής.

Ασκηση 4

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για το ανάπτυγμα οποιασδήποτε δύναμης του $(\alpha + \beta)$. Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha + \beta)^4$.

$(\alpha + \beta)^0 = 1$ $(\alpha + \beta)^1 = 1\alpha + 1\beta$ $(\alpha + \beta)^2 = 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2$ $(\alpha + \beta)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$	$(\alpha + \beta)^4 = 1\alpha^4 + \chi\alpha^3\beta + \psi\alpha^2\beta^2 + \zeta\alpha\beta^3 + 1\beta^4$ $\chi = ?$ $\psi = ?$ $\zeta = ?$
--	---

Απάντηση

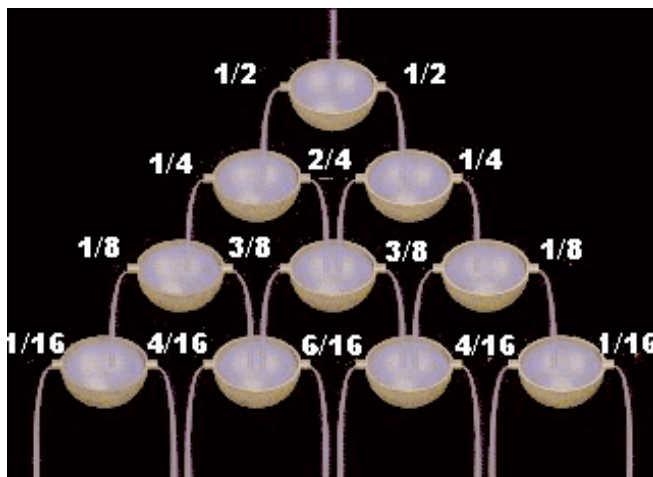
$$X=4$$

$$\Psi=6$$

$$Z=4$$

Ασκηση 5

Αν υποθέσουμε ότι τα 2 φύλα έχουν την ίδια πιθανότητα κατά τη γέννηση ενός παιδιού να υπολογιστούν οι πιθανότητες να γεννηθούν 0 αγόρια, 1 αγόρι, 2 αγόρια και 3 αγόρια σε οικογένεια που έχει 4 παιδιά.



Η πιθανότητα $P(0)$ σε μια οικογένεια με 4 παιδιά βρίσκεται με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης:

$$0 \text{ αγόρια } P(0)=1/2$$

$$1 \text{ αγόρι } P(1)=4/16$$

$$2 \text{ αγόρια } P(2)=6/16$$

$$3 \text{ αγόρια } P(3)=4/16$$

Ασκηση 6

Χρησιμοποιώντας τη Ρωμαϊκή κρήνη να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει μια τριμελής οικογένεια

$$1^o : 1 \text{ αγόρι } P(1)=;$$

$$2^o : 3 \text{ αγόρια } P(3)=;$$

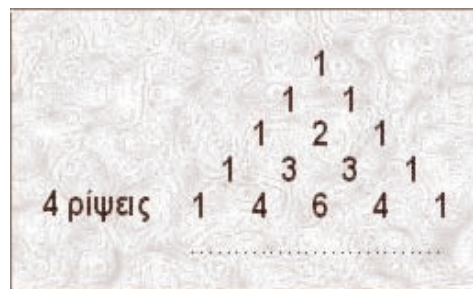
Απάντηση

$$P(1)=3/8$$

$$P(2)=1/8$$

Ασκηση 7

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν ακριβώς 4 Κεφαλές για 4 ρίψεις ενός νομίσματος; Για την επίλυση της άσκησης να χρησιμοποιήσετε το τρίγωνο του Pascal.

**Απάντηση**

Οι τρόποι είναι 4.

Ασκηση 8

Χρησιμοποιώντας την 3^η σειρά από κόμπες της ρωμαϊκής κρήνης να υπολογίσετε μετά από 3 αναρρίψεις ενός νομίσματος τις πιθανότητες $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$



$$P(0)=;$$

$$P(1)=;$$

$$P(2)=;$$

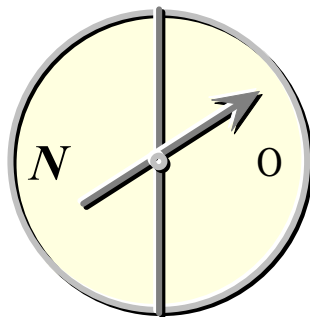
$$P(3)=;$$

Απάντηση

$$P(0)=1/8, \quad P(1)=3/8, \quad P(2)=3/8, \quad P(3)=1/8$$

Ασκηση 9

Ας θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε τον τροχό του **ναι -όχι** 5 φορές. Η 5^η σειρά από τις κούμπες της ρωμαϊκής κρήνης ή η 5^η σειρά από το τρίγωνο του Pascal δίνουν ως δυνατά 32 διαφορετικά αποτελέσματα:



Βρείτε την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο

1. 2 φορές ναι $P(2)=;$
2. 4 φορές ναι $P(4)=;$
3. 5 φορές ναι $P(5)=;$

Υπόδειξη:

5^η σειρά 5 περιστροφές $1/32, 5/32, 10/32, 10/32, 5/32, 1/32$

Απάντηση

$P(2)=10/32, P(4)=4/32, P(5)=5/32$

Ασκηση 10

Σε μια τράπουλα μισές κάρτες είναι κόκκινες και οι υπόλοιπες είναι μαύρες. Κόβουμε την τράπουλα 4 φορές και από το τρίγωνο του Pascal για την 4^η σειρά πληροφορούμαστε ότι υπάρχουν 16 πιθανά αποτελέσματα για τα 4 «κοψίματα». Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(0), P(2), P(3)$.

Υπόδειξη

Αν σχηματίσουμε το τρίγωνο του Pascal μέχρι την 5^η σειρά θα δούμε ότι η 5^η σειρά είναι: 1 5 10 10 5 1

Απάντηση

$P(0)=1/16, P(2)=6/16, P(3)=4/16$

3.6.6.7 Ιδιότητες του τριγώνου του Pascal

Ας δούμε μερικές από τις πολλές ιδιότητες του τριγώνου του Pascal. Το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή είναι ίσο με μια δύναμη του 2. Για την ακρίβεια το άθροισμα της νιοστής γραμμής είναι 2^{n-1}

$$1=2^0$$

$$1+1=2^1$$

$$1+2+1=2^2$$

$$1+3+3+1=2^3$$

$$1+4+6+4+1=2^4$$

Η πρόσθεση των αριθμών του τριγώνου όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα δίνει την ακολουθία αριθμών 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,... γνωστή με το όνομα ακολουθία Fibonacci.

3.7 Σενάριο 7ης Ενότητας

3.7.1 Περιγραφή

Στο κεφάλαιο αυτό επιδιώκεται μια συστηματική εισαγωγή του μαθητή σε βασικές έννοιες της Στατιστικής. Είναι από όλους παραδεκτό ότι η σημερινή κοινωνική πραγματικότητα απαιτεί οι αποτελεσματικοί πολίτες να μπορούν να ερμηνεύουν στατιστικά δεδομένα.

Πολλές φορές θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για μια μεγάλη ομάδα ατόμων ή αντικειμένων. Αντί να μελετήσουμε ολόκληρη την ομάδα, τον πληθυσμό όπως λέμε, που είναι δύσκολο ή αδύνατο και κυρίως αντιοικονομικό, μπορούμε να εξετάσουμε ένα μικρό αντιπροσωπευτικό μέρος του πληθυσμού δηλαδή ένα δείγμα. Επειδή το δείγμα έχει ληφθεί με αντιπροσωπευτικό τρόπο, τότε τα συμπεράσματα που εξάγουμε από το δείγμα, γενικεύονται για όλον τον πληθυσμό.

Η εισαγωγή και η μελέτη της βασικής ορολογίας γίνεται μέσω παραδειγμάτων για τη καλύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της Στατιστικής από μικρούς μαθητές.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.7.2 Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι

Μια διαισθητική εισαγωγή των μαθητών στις βασικές έννοιες και τη μεθοδολογία της Στατιστικής.

3.7.3 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης του στόχου

Το βάρος θα πέσει εξίσου στην κριτική συζήτηση των όρων και στη χρήση πολλαπλών και κατάλληλα «συντονισμένων» εικονικών αναπαραστάσεων. Εικονογράμματα, ραβδογράμματα, ιστογράμματα, κυκλικά διαγράμματα κ.ά. εμφανίζουν μερικές φορές κάποια «ασυμφωνία» μεταξύ τους, που έχει ως συνέπεια μια εννοιολογική σύγχυση στο μαθητή. Ακόμα η προσκόλληση σε ένα και μοναδικό σύστημα αναπαράστασης έχει ως πιθανότερη συνέπεια την ταύτιση μεταξύ σημαίνοντος και σημαινόμενου.

1. Στατιστική

Περιγραφή της επιστήμης της στατιστικής με παραδείγματα - Εικονογράμματα - Ραβδογράμματα - Κυκλικά διαγράμματα - Χρονογράμματα.

2. Απογραφή - Άτομα - Πληθυσμός

3. Στατιστικό δείγμα - Στατιστική. Ετυμολογική προσέγγιση των όρων με ταυτόχρονη χρήση διαγραμμάτων και πινάκων.

4. Συχνότητα παρατήρησης - Σχετική συχνότητα - Πίνακας Συχνοτήτων, για εξαγωγή συμπερασμάτων από τα ανωτέρω παραδείγματα ή και από άλλα.

5. Ραβδογράμματα - Ιστογράμματα - Κυκλικά διαγράμματα - Χρονογράμματα

6. Ανακεφαλαίωση

Ερωτήσεις Πολ/πλών επιλογών - Αντιστοιχίσεις - Γέμισμα κενών -

Σχηματισμός ραβδογραμμάτων - ιστογραμμάτων κ.λ.π.
ή από δεδομένα ραβδογράμματα εξαγωγή συμπερασμάτων -
Ασκήσεις - Προβλήματα.

3.7.4 Ασκήσεις για το σπίτι

1. Σε ένα γυμνάσιο των Πατρών υπηρετούν οι εξής καθηγητές.

φιλόλογος, μαθηματικός, βιολόγος, γυμναστής, γαλλικών, φυσικός, φιλόλογος,
γυμναστής, θεολόγος, αγγλικών, μαθηματικών, γυμναστής, φιλόλογος, μουσικός,
φυσικός, φιλόλογος, φιλόλογος, γαλλικών, γαλλικών, φιλόλογος, θεολόγος, φυσικός.

Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων του προσωπικού του Γυμνασίου.

2. Οι 18 ομάδες της Β' Εθνικής σημείωσαν μία Κυριακή τα παρακάτω τέρματα.

3 1 0 2 4 2 3 2 1
2 1 0 3 1 3 2 0 1

Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

3. Ο πίνακας παρουσιάζει την παραγωγή ενός εργοστασίου παραγωγής τηλεοράσεων κατά την πενταετία 1990-1995.

Έτος	Αριθμός συσκευών
1990	65000
1991	70000
1992	75000
1993	50000
1994	80000
1995	60000

Να παρουσιάσετε τη παραγωγή του εργοστασίου σε ραβδόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

4. Οι 30 υπάλληλοι του Μαθηματικού Τμήματος έχουν τις παρακάτω ηλικίες σε έτη.

35 46 36 47 47 45 40 38 39 26 29 33 34 45 42
7 28 29 37 33 44 35 37 37 56 61 29 29 44 43

Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε κλάσεις του ίδιου πλάτους, να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και κατόπιν να κάνετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

5. Σε ένα αγώνα σκοποβολής πήραν μέρος 20 σκοπευτές που σημείωσαν τις εξής επιτυχίες:

147 156 144 195 168 185 166 148 174 175
186 166 143 192 163 174 155 150 177 161

Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις και να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

6. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα μίας οικογένειας που ανέρχονται σε 280000 δραχμές. Να βρείτε πόσα ξοδεύει η οικογένεια για φροντιστήρια, αν η γωνία του κυκλικού τομέα φροντιστήρια είναι 120°

7) Οι παρακάτω αριθμοί αντιπροσωπεύουν το πλήθος των επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 20 αυτοκίνητα.

4 5 6 6 4 5 4 4 5 6
4 4 5 4 5 5 6 6 4 5

α) Να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες και σχετικές συχνότητες.

β) Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που μπορεί να μεταφέρει:

ι) τουλάχιστον 5 επιβάτες

ii) το πολύ 4 επιβάτες

iii) 4 ή 5 επιβάτες.

8) Να συμπληρωθεί ο πίνακας που παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α' τάξης ενός Λυκείου.

Μαθήματα	Συχνότητα n	Σχετική συχνότητα
Αρχαία Ελληνικά	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		

9) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να κατασκευάσετε χρονόγραμμα που να δείχνει την εξέλιξη της εγκληματικότητας από το 1992 έως το 1999.

Έτος	Συχνότητα
1992	27
1993	35
1994	29
1995	29
1996	45
1997	208
1998	101
1999	110

Ποιες τάσεις παρατηρείτε στο χρονόγραμμα;

3.7.5 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή

3.7.5.1 Ιστορική Αναδρομή.

Απλές μορφές Στατιστικής έχουν χρησιμοποιηθεί από πολύ παλιά. Οι Βαβυλώνιοι το 3000 π.χ. χρησιμοποιούσαν μικρά πλακίδια για να καταγράψουν είτε αγροτικές παραγωγές, είτε εμπορικές συναλλαγές. Παρόμοιες καταγραφές αναβρίσκονται επίσης στην αρχαία Αίγυπτο, και στη Κίνα το 2000 π.χ. Οι αρχαίοι Έλληνες διεξήγαγαν απογραφές που χρησιμοποιούνταν για φορολογία από το 594 π.χ. Κατα την διάρκεια του μεσαίωνα γνωρίζουμε επίσης αρκετές απογραφές που έγιναν από διάφορα πρόσωπα. Το γεγονός όμως που έπαιξε βασικό ρόλο για την ανάπτυξη της στατιστικής, ήταν η καφαλαιοκρατική ανάπτυξη της Αγγλίας στον 18-19 αιώνα. Υπήρχε η πιεστική ανάγκη για την ασφάλιση των πλοίων που έφερναν μπαχαρικά και άλλα εμπορεύματα

από τις Ινδίες. Για των υπολογισμό των ασφαλίσεων χρησιμοποιήθηκε βεβαίως και η πιθανότητα και η Στατιστική. Από την άλλη μεριά άτομα όπως οι Φίσερ, Πήρσον, και άλλοι έπαιξαν κύριο ρόλο στην ανάπτυξη της Στατιστικής. Η ετημολογία της λέξης Στατιστική προέρχεται από την λατινική λέξη “status” που εκφράζει κύρια την κρατική εξουσία. Η Στατιστική λοιπόν ήταν πάντοτε βοηθός του «κράτους».

3.7.5.2 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επιδιώκεται μια συστηματική εισαγωγή του μαθητή σε βασικές έννοιες της Στατιστικής. Είναι από όλους παραδεκτό ότι η σημερινή κοινωνική πραγματικότητα απαιτεί οι αποτελεσματικοί πολίτες να μπορούν να ερμηνεύουν στατιστικά δεδομένα.

Πολλές φορές θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για μια μεγάλη ομάδα ατόμων ή αντικειμένων. Αντί να μελετήσουμε ολόκληρη την ομάδα, τον πληθυσμό όπως λέμε, που είναι δύσκολο ή αδύνατο και κυρίως αντιοικονομικό, μπορούμε να ζετάσουμε ένα μικρό αντιπροσωπευτικό μέρος του πληθυσμού δηλαδή ένα δείγμα. Επειδή το δείγμα έχει ληφθεί με αντιπροσωπευτικό τρόπο, τότε τα συμπεράσματα που εξάγουμε από το δείγμα, γενικεύονται για όλον τον πληθυσμό.

Η εισαγωγή και η μελέτη της βασικής ορολογίας γίνεται μέσω παραδειγμάτων για τη καλύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της Στατιστικής από μικρούς μαθητές.

3.7.5.3 Ταξινομώντας Δεδομένα .

Παράδειγμα

Μία Βιοτεχνία ενδιαφέρεται να κατασκευάσει 1000 ζευγάρια παπούτσια. Πόσα ζευγάρια όμως πρέπει να κατασκευάσει από κάθε νούμερο ώστε να πουληθούν όλα; Είναι φανερό ότι η διεύθυνση παραγωγής της βιοτεχνίας θα πρέπει να γνωρίζει το ποσοστό των ανθρώπων που φορούν ένα συγκεκριμένο νούμερο. Είναι όμως αδύνατο να εξετάσει όλον τον πληθυσμό για να μάθει το νούμερο τους. Επιλέγει λοιπόν τυχαία 50 άτομα και καταγράφει τα νούμερα των παπουτσιών τους. Επειδή τα άτομα επιλέχθηκαν με τυχαίο τρόπο, θεωρούμε ότι το δείγμα αυτό είναι αντιπροσωπευτικό και επομένως τα ποσοστά των ανθρώπων που φορούν τα διάφορα νούμερα, έχουν αντανakλασθεί μέσα στο δείγμα μας.

Να τα αποτελέσματα του δείγματος:

Αριθμός παπουτσιών	Αριθμός ανθρώπων
37	1
40	2
41	3
39	4
	5

Ο τρόπος που παρουσιάζεται η πληροφορία στον παραπάνω πίνακα δεν ευνοεί την εξαγωγή συμπερασμάτων. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη τα δεδομένα στον πίνακα να παρουσιασθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε τα ποσοστά των ανθρώπων που φορούν κάποιο συγκεκριμένο νούμερο να είναι φανερά.

Νούμερο παπουτσιών	Αριθμός ζευγών
38	2
39	4
40	10
41	15
42	9
43	6
44	4

Έτσι συμπεραίνουμε:

2 στους 50 φορούν	38 νούμερο
4 στους 50 φορούν	39 νούμερο
10 στους 50 φορούν	40 νούμερο
15 στους 50 φορούν	41 νούμερο
9 στους 50 φορούν	42 νούμερο
6 στους 50 φορούν	43 νούμερο
4 στους 50 φορούν	44 νούμερο

Με την ίδια αναλογία λοιπόν, η βιοτεχνία μπορεί να παράγει τα υποδήματα της, έχοντας μεγάλες πιθανότητες, να μην μείνουν απούλητα.

Παράδειγμα

Μια άλλη βιοτεχνία παράγει στρατιωτικές στολές. Πρέπει λοιπόν να γνωρίζει πως κυμαίνεται το ύψος των στρατιωτών. Για το σκοπό αυτό απευθύνεται σε ένα κέντρο νεοσύλλεκτων και ζητά πληροφορίες. Ο αξιωματικός υπηρεσίας δίνει την κατάσταση των 100 πρώτων στρατιωτών.

Στρατιώτες	Ύψος
1 ^{ος}	1,65
2 ^{ος}	1,67
3 ^{ος}	...
4 ^{ος}	...
.....	...
....	...
....	

Επειδή η διεύθυνση παραγωγής δυσκολεύεται να βγάλει συμπεράσματα σας ζητά να ομαδοποιήσετε τον πίνακα ως εξής:

Πόσοι στρατιώτες είναι μεταξύ (1,55-1,60), (1,60-1,65), (1,65-1,70), (1,65-1,70), (1,70-1,75), (1,75-1,80), (1,85-1,90) και πόσοι εκτός αυτών των διαστημάτων;

Ύψος	Αριθμός στρατιωτών
1,55-1,60	5
1,60-1,65	15
1,65-1,70	15
1,70-1,75	20
1,75-1,80	25
1,80-1,85	15
1,85-1,90	5

ΟΡΙΣΜΟΣ

Από τα παραδείγματα που μέχρι τώρα είδαμε γίνεται φανερό ότι έχουμε τη δυνατότητα να εξετάζουμε και να μελετάμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό τους ή μια ιδιότητα τους, όπως το νούμερο των παπουτσιών τι ψηφίζει κάποιος, τι ύψος έχει, κ.λ.π.

Το χαρακτηριστικό αυτό ή η ιδιότητα αυτή είναι **μια τυχαία μεταβλητή**

Τα δε δεδομένα είναι στην ουσία τιμές που παίρνει η Τυχαία μεταβλητή αυτή.

Ασκηση 1

Στα παραδείγματα που είδαμε πιο πάνω, ποιο από τα χαρακτηριστικά ή τις ιδιότητες είναι οι τυχαίες μεταβλητές; Συμπληρώστε το σωστό.

Ποιές από τις παρακάτω είναι τυχαίες μεταβλητές:

Το ύψος των στρατιωτών;

Ο αριθμός των στρατιωτών στο δείγμα;

Ο αριθμός των ζευγών;

Το νούμερο των παπουτσιών;

Απάντηση

α) Το ύψος των στρατιωτών *ΝΑΙ*.

β) Ο αριθμός των στρατιωτών στο δείγμα *ΟΧΙ*

γ) *ΟΧΙ*

δ) *ΝΑΙ*

3.7.5.4 Διαγράμματα.

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΧΡΟΝΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Όπως είδαμε πιο πάνω ο τρόπος παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων έχει τεράστια σημασία, αφού η πληροφορία που αναδύεται μέσα από τα δεδομένα εξαρτάται από τον τρόπο που τα παρουσιάζουμε. Ο γραφικός τρόπος παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων είναι σπουδαίος, γιατί η σχετική πληροφορία συλλαμβάνεται εύκολα από το μάτι. Οι μέθοδοι παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων λέγεται και περιγραφική Στατιστική.

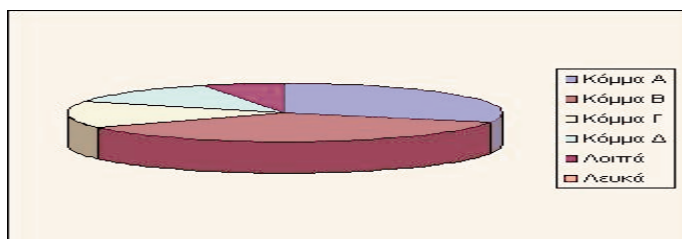
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις βασικές μεθόδους γραφικής παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι παρουσίασης των δεδομένων.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα: Κυκλικό Διάγραμμα

Στην περίπτωση των Εθνικών εκλογών στην Ελλάδα του 2000 είχαμε τα εξής αποτελέσματα:



Παράδειγμα: Εικονόγραμμα

Η κυκλοφορία των αυτοκινήτων από το 1992 μέχρι το 1995 ήταν:

Το 1992 κυκλοφόρησαν 150.000

Το 1993 κυκλοφόρησαν 80.000

Το 1994 κυκλοφόρησαν 90.000

Το 1995 κυκλοφόρησαν 100.000

Παράδειγμα: Χρονόγραμμα

Παρακολουθούμε, καταγράφουμε και αναπαριστούμε τις γεννήσεις στην πόλη του Αγρινίου από το 1900 έως το 1999

Ασκηση 1

- α) Πώς μπορούμε να ονομάσουμε το παραπάνω διάγραμμα;

- β) Ποια χρονολογία γεννήθηκαν τα λιγότερα παιδιά;

1920 1930 1940 1960 1980

- γ) Ποια χρονολογία γεννήθηκαν τα περισσότερα;

1920 1960 1980 1999

- δ) Πόσα παιδιά γεννήθηκαν το:

1930 1950 1980 1960 1900

- ε) Γιατί νομίζετε ότι το 1940 είχαμε μεγάλη μείωση γεννήσεων;

Απάντηση

- α) Το παραπάνω διάγραμμα το ονομάζουμε *χρονόγραμμα*.

- β) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το 1940.

- γ) Τα περισσότερα το 1999.

- δ) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το 1930 γεννήθηκαν 640

1950 50

1951 70

1952 80

1953 20

- ε) Διότι το 1940 γίνονταν πόλεμος και ο ανδρικός πληθυσμός έλειπε στο βουνό.

Ασκηση 2

Μια ομάδα μπάσκετ πέτυχε σ'ένα αγώνα 15 βολές που δίνουν από ένα πόντο, 30 δίποντα και 16 τρίποντα.

Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

Απάντηση

15 μονόποντες. Στο κυκλικό διάγραμμα αναλογεί $15/123 \cdot 360 = 44$

$30 \cdot 2 = 60$. Στο κυκλικό διάγραμμα αναλογεί $60/123 \cdot 360 = 175$

$16 \cdot 3 = 48$ Στο κυκλικό διάγραμμα αναλογεί $48/123 \cdot 360 = 141$

Άρα το κυκλικό διάγραμμα είναι:

3.7.5.5 Απογραφή – Άτομα – Πληθυσμός – Συχνότητα.**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Βλέπουμε ότι με τη μέχρι τώρα εξέταση των στοιχείων ενός συνόλου έχει προκύψει ένα πλήθος πληροφοριών ή μετρήσεων, που για να αξιοποιηθούν, πρέπει να παρουσιασθούν κατάλληλα. Με τη συλλογή, επεξεργασία και την εξαγωγή συμπερασμάτων από τέτοιες πληροφορίες ή μετρήσεις ασχολείται ένας κλάδος των Μαθηματικών που λέγεται **ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα της βιοτεχνίας παπουτσιών και ας υποθέσουμε ότι η βιοτεχνία ήθελε να κατασκευάσει 1000 ζευγάρια παπούτσια για τους 1000 κατοίκους ενός χωριού. Πρέπει λοιπόν να γνωρίζει τι νούμερο παπούτσι φοράει καθένας από τους κατοίκους του χωριού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν εξέταζε, για το σκοπό αυτό όλον τον πληθυσμό του χωριού, τότε θα έκανε **απογραφή**.

Όμως αυτό είναι πρακτικά δύσκολο και αντιοικονομικό.

Γι' αυτό επιλέγει κατάλληλα ένα μέρος του πληθυσμού, δηλαδή 50 άτομα, το οποίο φροντίζουμε να είναι **αντιπροσωπευτικό**, να αντανakλά δηλαδή τα πραγματικά ποσοστά των ανθρώπων που φορούν ένα συγκεκριμένο νούμερο.

Παράδειγμα

<i>Κόκκινο</i>	<i>4</i>
<i>Πράσινο</i>	<i>8</i>
<i>Κίτρινο</i>	<i>8</i>
<i>Μπλε</i>	<i>12</i>
<i>Άσπρο</i>	<i>16</i>
<i>Μαύρο</i>	<i>28</i>

Τα στατιστικά συμπεράσματα που θα εξαχθούν απ' αυτό το δείγμα είναι σωστά και για όλο τον πληθυσμό;

Απάντηση

Όχι διότι το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό.

Στη βιοτεχνία είχαμε τον πίνακα.

<i>Νούμερο παπουτσιών</i>	<i>Αριθμός ζευγών</i>
<i>38</i>	<i>2</i>
<i>39</i>	<i>4</i>
<i>40</i>	<i>10</i>
<i>41</i>	<i>15</i>
<i>42</i>	<i>9</i>
<i>43</i>	<i>6</i>
<i>44</i>	<i>4</i>

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός 2 καλείται **συχνότητα του αριθμού** (δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής) 38, ο αριθμός 4 του αριθμού 39, κ.λ.π.

Οι αριθμοί 38,39, ...,44 είναι στην ουσία τιμές της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής.

Παράδειγμα

Ποιες είναι οι συχνότητες των αριθμών ;

40 41 42 43

Απάντηση

Η συχνότητα του 40 είναι	10
41	15
42	9
43	6

Αυτό όμως που ενδιαφέρει την βιοτεχνία, δεν είναι οι συχνότητες των διαφόρων νούμερων παπουτσιών, αλλά το ποσοστό των ανθρώπων που φορούν κάποιο συγκεκριμένο νούμερο.

Η παραγωγή της βιοτεχνίας θα πρέπει να ακολουθεί τα ίδια ποσοστά.

Η έννοια του ποσοστού συμπίπτει με την έννοια της σχετικής συχνότητας.

3.7.5.6 Συχνότητα, Σχετική συχνότητα**Παράδειγμα**

Πόσο είναι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα; Πόσο ποσοστό του δείγματος φορούν νούμερο 38;

Απάντηση

Το άθροισμα είναι 50

Το ποσοστό είναι $2/50 = 0,04$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτό το λέμε **σχετική συχνότητα** του αριθμού 38.

Παράδειγμα

Συμπληρώστε τον υπόλοιπο παραπάνω πίνακα

Απάντηση

X	N	Σχετική συχνότητα
38	2	0.04
39	4	0,08
40	10	0,2
41	15	0,3
42	9	0,18
43	6	0,12
44	4	0,08
	50	

Όπως βλέπουμε η σχετική συχνότητα μιας τιμής είναι ένας αριθμός μεταξύ μηδέν και ένα, το δε άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων είναι 1.

Παράδειγμα

Η σχετική συχνότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας

Πόσο άθροισμα έχουν οι σχετικές συχνότητες;

Απάντηση

Η σχετική συχνότητα είναι μικρότερη της μονάδας

Όλες οι σχετικές συχνότητες έχουν άθροισμα 1.

3.7.5.7 Πολύγωνο συχνοτήτων, διάγραμμα συχνοτήτων

Ας πάρουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και ας βάλουμε στον άξονα Ox τις τιμές της μεταβλητής που δείχνει το νούμερο των παπουτσιών και στο άξονα Oy τις συχνότητες τους. Εν συνεχεία ενώνουμε τις κορυφές.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτή η τεθλασμένη γραμμή καλείται **πολύγωνο συχνοτήτων** ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα που παριστάνουν τις τεταγμένες, **διάγραμμα συχνοτήτων**

3.7.5.8 Ασκήσεις για το σπίτι

1. Σε ένα γυμνάσιο των Πατρών υπηρετούν οι εξής καθηγητές.

φιλόλογος, μαθηματικός, βιολόγος, γυμναστής, γαλλικών, φυσικός, φιλόλογος, γυμναστής, θεολόγος, αγγλικών, μαθηματικών, γυμναστής, φιλόλογος, μουσικός, φυσικός, φιλόλογος, φιλόλογος, γαλλικών, γαλλικών, φιλόλογος, θεολόγος, φυσικός.

Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων του προσωπικού του Γυμνασίου.

2. Οι 18 ομάδες της Β' Εθνικής σημείωσαν μία Κυριακή τα παρακάτω τέρματα.

3 1 0 2 4 2 3 2 1
2 1 0 3 1 3 2 0 1

Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

3. Ο πίνακας παρουσιάζει την παραγωγή ενός εργοστασίου παραγωγής τηλεοράσεων κατά την πενταετία 1990-1995.

Έτος	Αριθμός συσκευών
1990	65000
1991	70000
1992	75000
1993	50000
1994	80000
1995	60000

Να παρουσιάσετε τη παραγωγή του εργοστασίου σε ραβδόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

4. Οι 30 υπάλληλοι του Μαθηματικού Τμήματος έχουν τις παρακάτω ηλικίες σε έτη.

35 46 36 47 47 45 40 38 39 26 29 33 34 45 42
7 28 29 37 33 44 35 37 37 56 61 29 29 44 43

Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε κλάσεις του ίδιου πλάτους, να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και κατόπιν να κάνετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

5. Σε ένα αγώνα σκοποβολής πήραν μέρος 20 σκοπευτές που σημείωσαν τις εξής επιτυχίες:

147 156 144 195 168 185 166 148 174 175
186 166 143 192 163 174 155 150 177 161

Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις και να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

6. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα μίας οικογένειας που ανέρχονται σε 280000 δραχμές. Να βρείτε πόσα ξοδεύει η οικογένεια για φροντιστήρια, αν η γωνία του κυκλικού τομέα φροντιστήρια είναι 120°

7) Οι παρακάτω αριθμοί αντιπροσωπεύουν το πλήθος των επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 20 αυτοκίνητα.

4 5 6 6 4 5 4 4 5 6
4 4 5 4 5 5 6 6 4 5

α) Να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες και σχετικές συχνότητες.

β) Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που μπορεί να μεταφέρει:

ι) τουλάχιστον 5 επιβάτες

ii) το πολύ 4 επιβάτες

iii) 4 ή 5 επιβάτες.

8) Να συμπληρωθεί ο πίνακας που παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α' τάξης ενός Λυκείου.

Μαθήματα	Συχνότητα ν	Σχετική συχνότητα
Αρχαία Ελληνικά	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		

9) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να κατασκευάσετε χρονόγραμμα που να δείχνει την εξέλιξη της εγκληματικότητας από το 1992 έως το 1999.

Έτος	Συχνότητα
1992	27
1993	35
1994	29
1995	29
1996	45
1997	208
1998	101
1999	110

Ποιες τάσεις παρατηρείτε στο χρονόγραμμα;

3.8 Σενάριο 8ης Ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε μία βαθμιαία εξοικείωση των μαθητών με τις ειδικότερες μεθόδους και έννοιες της Στατιστικής.

Ιδιαίτερα θα επικεντρωθούμε στη συγκρότηση της έννοιας της αθροιστικής συχνότητας.

Να διατεθεί μια ώρα διδασκαλίας.

3.8.1 Διδακτικοί & μαθησιακοί στόχοι

- α) Βαθμιαία εξοικείωση των μαθητών με τις ειδικότερες μεθόδους της Στατιστικής.
- β) Συγκρότηση της έννοιας της αθροιστικής συχνότητας.

3.8.2 Διδακτικά μέσα & τρόποι επίτευξης των στόχων

Όπως στο Σενάριο της 7^{ης} Ενότητας.

1. Αθροιστική συχνότητα
2. Πίνακες κατανομών συχνοτήτων
Θέση προβλήματος και εξαγωγή της έννοιας της αθροιστικής συχνότητας μη ομαδοποιημένης κατανομής.
3. Αθροιστική συχνότητα ομαδοποιημένης κατανομής
4. Σχεδιασμός πολυγώνου αθροιστικών συχνοτήτων
5. Μέτρα Θέσης και διασποράς
6. Μέση τιμή
Μέσω πινάκων και παραδειγμάτων σε ομαδοποιημένες και μη κατανομές.
7. Δειγματική διασπορά
 - Υπολογισμός μέσω πινάκων,
 - Ανάδειξη με τη χρήση διαγραμμάτων.
 - Ασκήσεις με διαφόρων ειδών διαγράμματα.
 - Ασκήσεις πολ/πλών επιλογών - Γέμισμα κενών - Αντιστοιχίσεις -
 - Ασκήσεις - Προβλήματα.
 - Αξιοποίηση στατιστικών δεδομένων σε δείγματα του πληθυσμού της χώρας (π.χ. κάπνισμα, οικονομία κ.ά.)

3.8.3 Ασκήσεις

1. Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα να κάνετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

2. Με βάση τα συνολικά αποτελέσματα των εκλογών 2000 για τα κόμματα να βρείτε την σχετική συχνότητα και την αθροιστική συχνότητα για κάθε κόμμα.

3. α) Αν οι αθροιστικές συχνότητες των τιμών x_1, x_2 είναι 30 και 55 τότε η συχνότητα της τιμής..... είναι 25.

β) Αν οι αθροιστικές συχνότητες των τιμών x_1, x_2 είναι 39 και 69 αντίστοιχα τότε η συχνότητα της τιμής x_2 είναι

4. Όταν ρίχνουμε τρία ζάρια το άθροισμά τους μπορεί να είναι από 3 μέχρι 18. Οι παρατηρήσεις δείχνουν τα αθροίσματα από το ρίξιμο των τριών ζαριών.

5 4 9 11 17 5 6 18 11 12 12 13 14
 9 16 12 10 5 3 4 5 12 17 13 18 9
 15 11 12 13 14 4 5 6 9 8 7 11 12 10

Να τα ομαδοποιήσετε σε 6 κλάσεις.

Να συμπληρωθεί ο πίνακας με τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες.

5. Να βρείτε την αθροιστική συχνότητα και τη σχετική αθροιστική συχνότητα και το πολύγωνο συχνοτήτων στο παράδειγμα με τα αποτελέσματα των εκλογών του 1996.

6. Σε όλες τις ασκήσεις της προηγούμενης παραγράφου 7 να βρείτε την αθροιστική συχνότητα και τη σχετική αθροιστική συχνότητα και το πολύγωνο συχνοτήτων όπου μπορείτε.

7. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή X .

Μεταβλητή X	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα
X_1			100	
X_2				0,5
X_3	250	0,5		

8. Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές χ_1, χ_2, χ_3

με $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$. Οι αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες είναι :

$N_1 = 30, N_2 = 70, N_3 = 120$. Τότε η σχετική συχνότητα της τιμής χ_1 είναι.

A:30% B : 60% Γ:90% Δ:25% Ε:50%.

9) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό δωματίων των διαμερισμάτων μίας πολυκατοικίας. Αφού συμπληρώσετε τον πίνακα να βρείτε
α) πόσα διαμερίσματα έχουν λιγότερα από 4 δωμάτια. β) πόσα έχουν τουλάχιστον 4 δωμάτια γ) πόσα έχουν το πολύ 2 δωμάτια.

Δωμάτια	Διαμερίσματα	Αθροιστική συχνότητα
1	2	13
2	4	
3		
4		
5	4	
6	2	
	35	

10) Στη περίπτωση ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες n_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως οι λεγόμενες και οι

οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχο των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής χ_i .

3.8.4 Φύλλο Εργασίας

Θέμα 1

1) Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές χ_1, χ_2, χ_3 με σχετικές συχνότητες f_3, f_1, f_2 αντίστοιχα. Αν $f_1 = 2f_2$ και $f_3 = 40\%$ τότε $f_1 =$

A. 10%

B. 60%

Γ. 35%

Δ. 70%

Ε. 20%

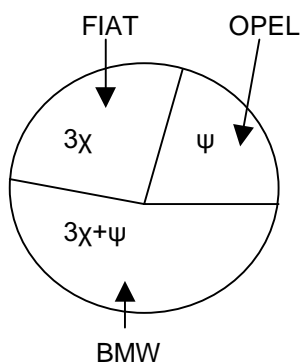
- II) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα και να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΕΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ - ΤΑΞΗ Β΄ - ΤΜΗΜΑ 3^ο

Αποτελέσματα	Μαθητές	%
Άριστα	2	
Πολύ καλά	9	
Καλά	14	
Μέτρια		25
Απορρίπτεται		
Σύνολο:	35	

Θέμα 2

Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τις προτιμήσεις 270 ανδρών προς 3 διαφορετικά αυτοκίνητα. Αν $3\chi + \psi = 150$ τότε να βρείτε το ποσοστό των ανδρών που προτιμά καθένα από τα αυτοκίνητα και να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



Θέμα 3

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την παραγωγή ενός εργοστασίου παραγωγής τηλεοράσεων κατά την πενταετία 1990-1995. Παρουσιάστε την παραγωγή του εργοστασίου σε ραβδόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Έτος	Αριθμός συσκευών
1990	65000
1991	70000
1992	75000
1993	50000
1994	80000
1995	60000

Θέμα 4

Δημιουργήστε εικονοδιαγράμματα που να αναπαριστούν μέτρηση αυτοκινήτων, ζώων, τηλεοράσεων κ.λ.π. σε δικά σας παραδείγματα.

Θέμα 5

Αναγράψτε όσα ιστορικά στοιχεία μπορείτε να βρείτε για τη Στατιστική. Να φέρετε εικόνες και πίνακες από εφημερίδες, από το Internet, από περιοδικά που να έχουν σχέση με προβλήματα Στατιστικής.

Θέμα 6

Δημιουργήστε δικά σας προβλήματα βρίσκοντας παραδείγματα από τη ζωή, δηλαδή από εκλογές, φάρμακα, δημοσκοπήσεις κ.λ.π.

Θέμα 7

Σχεδιάστε μόνοι σας στον υπολογιστή ραβδογράμματα, πιτοδιαγράμματα και ότι άλλο μπορείτε, παρμένα από τα παραπάνω προβλήματα.

3.8.5 Αντίστοιχη Ενότητα στο Εγχειρίδιο Μαθητή**3.8.5.1 Εισαγωγή.**

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε μία βαθμιαία εξοικείωση των μαθητών με τις ειδικότερες μεθόδους και έννοιες της Στατιστικής.

Ιδιαίτερα θα επικεντρωθούμε στη συγκρότηση της έννοιας της αθροιστικής συχνότητας.

3.8.5.2 Αθροιστική Συχνότητα.

Στον πίνακα της βιοτεχνίας που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ορίσαμε τη συχνότητα και τη σχετική συχνότητα.

X	ν	Σχετική συχνότητα
38	2	0.04
39	4	0,08
40	10	0.2
41	15	0,3
42	9	1,8
43	6	1,2
44	4	0,08
	50	1

Όταν όμως θέλουμε να βγάζουμε συγκεντρωτικά αποτελέσματα, τι κάνουμε;

Παράδειγμα

Πόσοι άνθρωποι φορούν παπούτσια έως 40 νούμερο στον παραπάνω πίνακα;

Απάντηση

$$2+4+10=16$$

X	n	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα
38	2	0.04	
39	4	0.08	
40	10	0.2	16
41	15	0.3	
42	9	0.18	
43	6	0.12	
44	4	0.08	
	50	1	

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός 16 καλείται **αθροιστική συχνότητα** στο 40

Παράδειγμα

Συμπληρώστε τον υπόλοιπο πίνακα Αθροιστικών Συχνοτήτων

Απάντηση

X	n	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα
38	2	0.04	2
39	4	0.08	6
40	10	0.2	16
41	15	0.3	31
42	9	0.18	40
43	6	0.12	46
44	4	0.08	50
	50	1	

3.8.5.3 Σχετική Συχνότητα.**Παράδειγμα**

Πόσο επί τοις εκατό (%) φορούν μέχρι το νούμερο 40;

Πόσο ποσοστό επί τοις % φορούν παπούτσια μέχρι 40 νούμερο, αφού στους 50 φορούν μόνο 16;

Απάντηση

32% ή 0,32.

Ο αριθμός αυτός καλείται σχετική αθροιστική συχνότητα

Παράδειγμα

Συμπληρώστε τον υπόλοιπο πίνακα των Αθροιστικών Σχετικών Συχνοτήτων

Απάντηση

<i>X</i>	<i>n</i>	<i>Σχετική συχνότητα</i>	<i>Αθροιστική συχνότητα</i>	<i>Σχετική Αθροιστική Συχνότητα</i>
38	2	0.04	2	0.04
39	4	0.08	6	0.12
40	10	0.2	16	0.32
41	15	0.3	31	0.62
42	9	0.18	40	0.8
43	6	0.12	46	0.92
44	4	0.08	50	1
	50	1		

Παράδειγμα

Τι παρατηρείτε για τις αθροιστικές συχνότητες της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής;

Απάντηση

Η μικρότερη είναι ίση με τη σχετική συχνότητα και η μεγαλύτερη με το 1.

Ας επιστρέψουμε στην ιστορία με τους στρατιώτες και τη βιοτεχνία που ράβει τις φόρμες τους και στον σχετικό πίνακα.

<i>Ύψος</i>	<i>Αριθμός στρατιωτών</i>	<i>Σχετική συχνότητα</i>	<i>Αθροιστική συχνότητα</i>	<i>Σχετική αθροιστική συχνότητα</i>
1,55-1,60	5			
1,60-1,65	15			
1,65-1,70	15			
1,70-1,75	20			
1,75-1,80	25			
1,80-1,85	15			
1,85-1,90	5			

Ασκηση 1

Συμπληρώστε τις κενές στήλες του παραπάνω πίνακα

Απάντηση

Ύψος	Αριθμός στρατιωτών	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική συχνότητα
1,55-1,60	5	0,5	5	0,5
1,60-1,65	15	0,15	20	0,20
1,65-1,70	15	0,15	35	0,35
1,70-1,75	20	0,2	55	0,55
1,75-1,80	25	0,25	80	0,8
1,80-1,85	15	0,15	95	0,95
1,85-1,90	5	0,5	100	1

Ασκηση 2

Το άθροισμα όλων των αθροιστικών συχνοτήτων (επί τοις εκατό) των τιμών μιας μεταβλητής είναι ίσο με 1.

Σ

Λ

Απάντηση

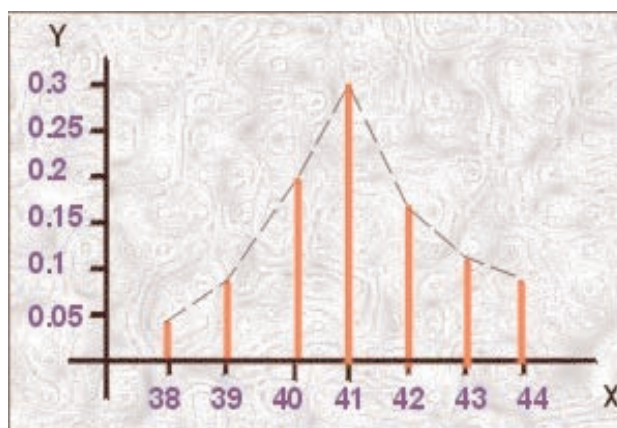
Σωστό

Παράδειγμα

Από τον παραπάνω συμπληρωμένο πίνακα των αθροιστικών συχνοτήτων της καρτέλας 6-7 κατασκευάστε μόνοι σας το διάγραμμα. Εν συνεχεία ενώστε τις κορυφές του διαγράμματος

Απάντηση

Το πολύγωνο Αθροιστικών Συχνοτήτων



ΟΡΙΣΜΟΣ

*Την πολυγωνική γραμμή που σχηματίζεται την ονομάζουμε **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων***

3.8.5.4 Ασκήσεις

1. Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα να κάνετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

2. Με βάση τα συνολικά αποτελέσματα των εκλογών 2000 για τα κόμματα να βρείτε την σχετική συχνότητα και την αθροιστική συχνότητα για κάθε κόμμα.

3. α) Αν οι αθροιστικές συχνότητες των τιμών χ_1, χ_2 είναι 30 και 55 τότε η συχνότητα της τιμής..... είναι 25.

β) Αν οι αθροιστικές συχνότητες των τιμών χ_1, χ_2 είναι 39 και 69 αντίστοιχα τότε η συχνότητα της τιμής χ_2 είναι

4. Όταν ρίχνουμε τρία ζάρια το άθροισμά τους μπορεί να είναι από 3 μέχρι 18. Οι παρατηρήσεις δείχνουν τα αθροίσματα από το ρίξιμο των τριών ζαριών.

5 4 9 11 17 5 6 18 11 12 12 13 14
 9 16 12 10 5 3 4 5 12 17 13 18 9
 15 11 12 13 14 4 5 6 9 8 7 11 12 10

Να τα ομαδοποιήσετε σε 6 κλάσεις.

Να συμπληρωθεί ο πίνακας με τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες.

5. Να βρείτε την αθροιστική συχνότητα και τη σχετική αθροιστική συχνότητα και το πολύγωνο συχνοτήτων στο παράδειγμα με τα αποτελέσματα των εκλογών του 1996.

6. Σε όλες τις ασκήσεις της προηγούμενης παραγράφου 7 να βρείτε την αθροιστική συχνότητα και τη σχετική αθροιστική συχνότητα και το πολύγωνο συχνοτήτων όπου μπορείτε.

7. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή X .

Μεταβλητή X	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα
X_1			100	
X_2				0,5
X_3	250	0,5		

8. Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές χ_1, χ_2, χ_3

με $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$. Οι αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες είναι :

$N_1 = 30, N_2 = 70, N_3 = 120$. Τότε η σχετική συχνότητα της τιμής χ_1

Είναι.

A:30% B : 60% Γ:90% Δ:25% Ε:50%.

9) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό δωματίων των διαμερισμάτων μίας πολυκατοικίας. Αφού συμπληρώσετε τον πίνακα να βρείτε
α) πόσα διαμερίσματα έχουν λιγότερα από 4 δωμάτια. Β) πόσα έχουν τουλάχιστον 4 δωμάτια γ) πόσα έχουν το πολύ 2 δωμάτια.

Δωμάτια	Διαμερίσματα	Αθροιστική συχνότητα
1	2	13
2	4	
3		
4		
5	4	
6	2	
	35	

10) Στη περίπτωση ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες n_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως οι λεγόμενες και οι

οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχο των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής χ_i .

4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

[0] J. Alarcon (1982) J' apprehension des situations probabilistes chez les élèves de 12-14 ans, Thèse, Université de Strasbourg.

[1] Barnet, V. (Ed) (1983) *Teaching Statistics in Schools Throughout the World*. Voorburg, Intern. Statist. Inst.

[2] Κ. Α. Δρόσος. Η Διδασκαλία των Βασικών Εννοιών της Πιθανότητας στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Ε.Μ.Ε. Ευκλείδης Γ, τόμ. 1, #2, 1-66 1983 (Βραβείο "Ευκλείδης 1985, Ε.Μ.Ε.)

[3] Κ. Α. Δρόσος. Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής στα Λύκεια. *Πρακτικά του 2^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθ. Παιδείας της Ε.Μ.Ε.*, 72-95, Ε.Μ.Ε. 1985.

[4] Κ. Α. Δρόσος. Cognition, Mathematics, and Synthetic Reasoning. *Γενικό Σεμινάριο Μαθηματικών*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Τομ. 13, (1987), 107-151.

[4^α] Κ. Α. Δρόσος. Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη. Τόμος 1^{ος} Μαθηματικές Περιηγήσεις. Πάτρας 2000.

[5] W. Federer (Ed). Statistical Education. Special Issue on Statistical Education of Communications in Statistics, Vol. A5, #5, 1976.

[6] E. Fischbein. *The Intuitive Sources of Probability thinking in Children*. D. Reidel, Hooland, 1975.

[7] D. R. Gray, P. Holmes, V. Barnet, and G. M. Constable (Eds) (1983) *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, Sheffield, Teaching Statistics Trust.

[8] L. G. Grim (1993) *Statistical Applications for the Behavioral Sciences*. John Wiley & sons, Inc. USA

[9] S. Gubbins, D. A. Rhoades, and D. Vere-Jones (Eds) (1982) *Statistics at Work. A Handbook of Statistical Studies for Use of Teachers and Students*. Wellington, New Zealand Statistical Association.

[10] P. Holmes (1980) *Teaching Statistics 11-16*. Slough, Foulsham Educational.

[11] P. Holmes (1981) Using Project Work in Teaching Statistics to Students Aged 16-18 in United Kingdom. In: L. Rade (Ed) *Proceedings of Gothenburg Symposium on Teaching Statistics*. Gothenburg, Math. Department, Chalmers Univ. of Technology, 1981.

[12] J. A. Hope and I. W. Kelly. Common Difficulties with Probabilistic Reasoning. *The Math. Teacher*, vol. 76, #8, 565-570, 1983.

[13] R. J. Jessen (1978) *Statistical Survey Techniques* John Wiley & sons, Inc. USA

- [14] E. W. Minium, B.M. King, G. Bear (1993) *Statistical Reasoning in Psychology and Education*. John Wiley & sons, Inc. USA
- [15] F. Mosteller, W. H. Kruskal, R. Ling, S. Pieters, and R. Rising (Eds) *Statistics by Example*. Addison-Wesley, 1982.
- [16] R. Morris. (1985)(Ed). *Studies in Mathematical Education: The Education of Secondary School Teachers of Mathematics*. Unesco 1985.
- [17] A.N. Oppenheim.(1966). *Questionnaire Design and Attitude Measurement* Heinemann, London
- [18] A. P. Shulte, J. R. Smart. (1981) *Teaching Statistics and Probability*. N.C.T.M. Year Book.
- [19] Εισαγωγή εις τας Πιθανότητες και τον Στατιστικόν Συμπερασμόν: Πειραματικόν Πρόγραμμα συνταχθέν υπό της Επιτροπής Μαθηματικών. Νέα Υόρκη 1959. Μετ. υπό Χ. Σιαδήμα, Υπουργείου Παιδείας 1964.
- [20] SPSS for Windows, Release 6.1. (1994) SPSS Inc USA
- [21] J. M. Tanur, F. Mosteller, W. H. Kruskal, R. Link R. Pieters, and G. Rising. *Statistics: A guide to the Unknown*. Holden Day.
- [22] H. wainer. How to Display Data Badly. *The American Statistician*, Vol. 38, #2, 137-147 , 1984.
- [23] Wetherill, G. B. (1968) Interim Report of the R.S.S. Committee on Teaching of Statistics in Schools. *J. R. Statist. Soc. A*. 313, 478-98.
- [24] Ε. Παπαδοπετράκη (συλλογικό) Ο γλωσσικός οπλισμός των μαθητών του Γυμνασίου και οι ανάγκες της Μαθηματικής Γλώσσας, Πρακτικά 9^{ου} Συνεδρίου της ΕΜΕ. Πάτρα 1993, σελ 74-84.
- [25] ABELSON H., COUVERING D.V., PLOGER D., The Boxes of Boxer: an Introduction", The Boxer Group, University of California, Berkeley.
- [26] AMBLER A.L., BURNETT M.M., "Influence of Visual Technology on the Evolution of Language Environments", IEEE Computer, October 1989.

6.Συστήνεται στον καθηγητή να συμβουλευτεί το Κεφ.4, του βιβλίου:Κώστας Δρόσος:Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη.Τόμος 1^{ος}: Μαθηματική Περιήγηση Πάτρα 2000 πάνω στο οποίο βασίζεται όλο το έργο.

5. Ιστοσελίδες σχετικές με την Πιθανότητα

1. [Probability Tutorials](#)

94%  

This site offers online tutorials in [probability](#), and measure theory. Course covers: Caratheodory 's extension, stieltjes measures, lebesgue integral, measurable maps, fubini 's, radon-nikodym theorems, fourier transforms and more... by Dr Noel Vaillant

Found by: AltaVista, Direct Hit, Open Directory Project, Excite, Magellan, Netscape Netcenter, Yahoo!
<http://www.probability.net/>

2. [The Probability Web: Home](#)

93%  

Home About [Probability](#) links People Abstracts Journals Search Jobs Conferences Publishers Books Booksellers Software Listservers Newsgroups Miscellaneous THE [PROBABILITY](#) WEB Welcome to the [Probability](#) Web [Version with graphics and java] You are..

Found by: AltaVista, Direct Hit, Open Directory Project, Excite, FAST Search, Lycos, Magellan, MSN Web Search, Netscape Netcenter, Yahoo!
<http://www.maths.uq.oz.au/~pkp/probweb/probweb.html>

3. [Probability](#)

83%  

Random number generator helps to solve a couple of controversial probabilistic problems, the Monty Hall Dilemma and Three Pancakes.

Found by: AltaVista, Direct Hit, MSN Web Search
<http://www.cut-the-knot.com/probability.html>

4. [The Probability Web: Probability links](#)

62%  

[Probability](#) links The [Probability](#) Web [Probability](#) links BRIMS [Probability](#) Group CADSMAP Centre of Applied Dynamical Systems, Mathematical Analysis and [Probability](#) at the University of Queensland

Found by: WebCrawler
<http://www.maths.uq.oz.au/~pkp/probweb/links.html>