Ναυσικά

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΙΛΟΤΙΚΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΠΟΛΥΜΕΣΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΠΡΩΤΕΑΣ

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Παραδοτέο: Π9

Εγχειρίδιο Μαθητή

ΟΔΥΣΣΕΙΑ

Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας

Φορέας Υλοποίησης

Ινστιτούτο

Τεχνολογίας

Υπολογιστών

Ανάδοχοι

- Keystone
- Πανεπιστήμιο Πατρών, Τομέας Παιδαγωγικής, Ιστορίας και Φιλοσοφίας των μαθηματικών, του Τμήματος Μαθηματικών.

Φορείς της Ενέργειας

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΩΝ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΟΙΝΟΤΙΚΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

Συγχρηματοδότηση: Ευρωπαϊκή Επιτροπή, Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο, Δ/νση V & Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης, Δ/νση XVI

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑ ΕΡΓΟΥ

ΠΡΩΤΕΑΣ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παραδοτέο: ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΜΑΘΗΤΗ - ΠΡΩΤΕΑΣ
Συμβατική Ημερομηνία Παράδοσης: 5-6-2000
Ημερομηνία Παράδοσης: 22-4-2002
Έκδοση: 1.3

Περίληψη

Το βιβλίο του μαθητή συνοδεύει το αντίστοιχο λογισμικό. Περιέχει την ύλη για κάθε διδακτική ώρα. Οι διδακτικές ώρες συγκροτούνται σε **ενότητες.**

Συντάκτες:

- **Κώστας Δρόσος**, Τομέας ΠΙΦΜ, Τμήμα Μαθηματικών, Παν/μιο Πατρών.
- **Ευτύχης Παπαδοπετράκης** Τομέας ΠΙΦΜ, Τμήμα Μαθηματικών, Παν/μιο Πατρών.
- **Πέτρος Σκαλτσάς** Τομέας ΠΙΦΜ, Τμήμα Μαθηματικών, Παν/μιο Πατρών.
- **Θέκλη Βιτωράτου**, Συνταξιούχος Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης.
- **Διονύσιος Ροδίτης**, Καθηγητής Μέσης Εκπαίδευσης.
- **Αγγελική Τομαρά**, Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης.

Περιεχόμενα

1. Πρώτη Ενότητα

1.1 Ιστορικό Σημείωμα

Η τυχαιότητα τράβηξε την προσοχή των ανθρώπων από την αρχαιότητα. Παρόλ' αυτά η συστηματική αντιμετώπιση της πιθανότητας με μαθηματικό τρόπο άρχισε τον 15^{ο} αιώνα.. Για πρώτη φορά εμφανίστηκαν σκέψεις πάνω σε τυχερά παιγνίδια στο βιβλίο Suma του Luca Pacioli (1494). Σ' αυτή την εργασία ο Pacioli πρότεινε το περίφημο "Πρόβλημα των μεριδίων" στο οποίο ζητείται, σ' ένα τυχερό παιγνίδι που δεν έχει ακόμη τελειώσει, πώς θα μοιραστούν τα στοιχήματα λαβαίνοντας υπ' όψιν τα μέχρι τη διακοπή αποτελέσματα.

Τον 16^{ον} αιώνα ο Girolamo Cardano, ένας άλλος Ιταλός, έγραψε ένα εγχειρίδιο του παίκτη στο οποίο διετύπωσε κάποιους κανόνες για τη λύση του προβλήματος των ζαριών, για ένα ζάρι. Περίπου 50 χρόνια αργότερα ο Γαλιλαίος έδωσε τον πλήρη πίνακα για το πρόβλημα των 3 ζαριών.

Παρά τις αρχικές προσπάθειες για να μαθηματικοποιηθούν οι νόμοι της τύχης, η γέννηση της θεωρίας πιθανοτήτων σαν μαθηματικής επιστήμης τοποθετείται το έτος 1654. Τότε ο George Brossin ιππότης στην αυλή του Λουδοβίκου XIV πρότεινε το πρόβλημα των ζαριών και το πρόβλημα των μεριδίων στον Blaise Pascal. Ο ιππότης είχε βρει ότι η θεωρητική αντιμετώπιση των προβλημάτων δεν συμφωνούσε με τις εμπειρικές παρατηρήσεις του. Ο Pascal έδωσε το πρόβλημα στον Pierre de Fermat και σύντομα και οι δύο μαζί βρήκαν διαφορετικές λύσεις.

Η εργασία τους θεωρείται η μεγαλύτερη εξέλιξη στη θεμελίωση της μαθηματικής θεωρίας των πιθανοτήτων. Η εργασία των Pascal και Fermat δημιούργησε μεγάλο ενδιαφέρον για τις πιθανότητες. Το 1655 ο Christiaan Huygens ταξίδεψε στο Παρίσι για να μάθει περισσότερα για τις ιδέες του Pascal. Παρ' όλο που δεν κατάφερε να συναντήσει τον διάσημο Γάλλο, γύρισε πίσω και συνέθεσε ανεξάρτητα μια πραγματεία στη Θεωρία των Πιθανοτήτων που ήταν η πρώτη στο είδος της και που δημοσιεύτηκε το 1658. Παρ' όλο που στα πρώτα βήματα η μελέτη των πιθανοτήτων επικεντρώθηκε στα παιγνίδια τύχης, πάρα πολλά παράδοξα αναφύονταν, που προκύπτανε από έναν μη ικανοποιητικό ορισμό της πιθανότητας. Μετά το έτος 1700 η θεωρία άρχισε να αναπτύσσεται με γρήγορους ρυθμούς.

Η δεύτερη σημαντική δημοσίευση ήταν ένα άρθρο του Pierre-Remond De Montmort (1708). Το 1713 εμφανίστηκε το πρώτο βιβλίο αφιερωμένο αποκλειστικά στις πιθανότητες. Ήταν το Ars Consectandi του Jacob (Jacques) Bernoulli. Το πρώτο από μια σειρά μεγάλων συνεισφορών της οικογένειας Bernoulli. Ο Abraham De Moivre δημοσίευσε το Doctrine of chances το 1718 και η θεωρία των πιθανοτήτων συνέχισε να αναπτύσσεται κατά την διάρκεια του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα με συνεισφορές από τον Euler, Laplace, Gauss και πολλών άλλων.

Τα τελευταία 100 χρόνια η θεωρία πιθανοτήτων έχει προχωρήσει σημαντικά μέσα από τις προσπάθειες των μαθηματικών να εξασφαλίσουν μια στερεή μαθηματική βάση πάνω στην οποία να μπορούν να κτίσουν. Το αποκορύφωμα αυτής της προσπάθειας ήταν η δημοσίευση στη δεκαετία του '30 του "Foundations of the Theory of Probability" του Kolmogorov, στο οποίον αναπτύσσεται η θεωρία πιθανοτήτων σε μια αυστηρά αξιωματική βάση, συμπληρώνοντας έτσι την *μετάβαση του αντικειμένου από μία συλλογή κανόνων για παίκτες σε ένα απαγωγικό μαθηματικό σύστημα.*

1.2 *Εισαγωγή*

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει, σχετικά εύκολα, ότι η καθημερινή ζωή είναι γεμάτη παραδείγματα που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα..

Είναι πολύ συνηθισμένες για παράδειγμα φράσεις όπως:

- *Έχει μεγάλες πιθανότητες να πετύχει στο πανεπιστήμιο.*
- *Είναι πολύ πιθανό να βρέξει.*
- *Συμπληρώνοντας περισσότερες στήλες ΠΡΟ-ΠΟ αυξάνεται η πιθανότητα να κερδίσεις.*
- *Η πιθανότητα να ακυρωθεί η εκδρομή λόγω βροχής είναι μικρή.*
- *Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι: 50 - 50 ή 50% ή ένα προς δύο ή 1/2*
- *Είναι εξίσου πιθανόν να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.*

1.3 Πείραμα.

Από την καθημερινή μας ζωή γνωρίζουμε διάφορες διαδικασίες , που μπορούμε να τις εκτελέσουμε πρακτικά κάτω από τις ίδιες συνθήκες, και που στο τέλος έχουν κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα είναι σε όλους γνωστό το «πείραμα» του βρασμού του νερού ή έχουμε πολλές φορές δει κάποιο μήλο να πέφτει από τη μηλιά.

Είναι απολύτως βέβαιο ότι το νερό θα βράσει στους 100 βαθμούς της κλίμακας Κελσίου καθώς επίσης είναι βέβαιο ότι λόγω της βαρύτητας το μήλο πάντοτε θα πέφτει προς τα κάτω. Αυτό εξάλλου παρατήρησε και ο Νεύτων και διετύπωσε τη θεωρία της βαρύτητας.

Υπάρχουν όμως και πειράματα που δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά τους. Για παράδειγμα όταν στρίβουμε ένα νόμισμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε αν θα έλθει «κεφαλή» (Κ) ή «γράμματα» (Γ).

Ορισμός

*Μια διαδικασία, η οποία οδηγεί σε κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα, και την οποία μπορούμε να επαναλάβουμε πρακτικά κάτω από τις ίδιες συνθήκες, όσες φορές θέλουμε, θα τη λέμε **πείραμα**.*

Παράδειγμα

Οι διαδικασίες που ακολουθούν είναι πειράματα:

1. Η ανάρριψη ενός νομίσματος.

2. Μια μεταλλική ράβδος που θερμαίνεται

3. Ένας δίχρωμος (μαύρο-κόκκινο) τροχός που περιστρέφεται πάνω σε ένα δίσκο εφοδιασμένο με ένα βέλος.

4. Η ανάρριψη ενός ζαριού.

5. Αφήνουμε ένα τόπι να πέσει.

*Κάθε ένα από τα **πειράματα** που αναφέραμε έχει κάποιο αποτέλεσμα. Άλλοτε είναι προβλέψιμο κι άλλοτε όχι. Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος δεν είναι προβλέψιμο, τότε έχουμε ένα **πείραμα τύχης** ή **τυχαίο πείραμα.** Για παράδειγμα η ανάρριψη ενός νομίσματος είναι πείραμα τύχης γιατί δεν μπορούμε να προβλέψουμε από πριν το αποτέλεσμα, αν δηλαδή θα έλθει (Κ) κεφαλή ή (Γ) γράμματα.*

*Γνωρίζουμε από τη φυσική ότι όταν ένα μέταλλο θερμαίνεται διαστέλλεται. Η αύξηση της θερμοκρασίας της μεταλλικής ράβδου θα έχει ως προβλέψιμο αποτέλεσμα την επιμήκυνσή της. Το πείραμα λοιπόν αυτό **δεν** αποτελεί πείραμα τύχης, αφού είναι δυνατόν να προβλέψουμε το αποτέλεσμά. του.*

Άσκηση

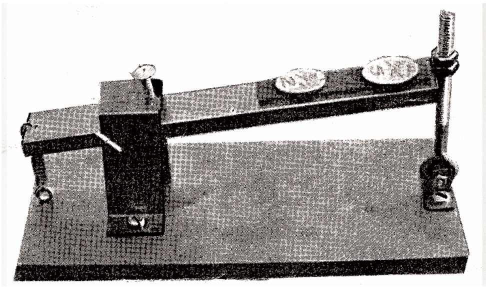
Από τα πειράματα που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα ποιο είναι πείραμα τύχης και ποιο όχι;

Απάντηση

Πειράματα τύχης είναι τα 1,3,4.

1.4 Δυνατά Αποτελέσματα - Δειγματικός χώρος

*Ας δούμε πάλι το **τυχαίο πείραμα** της ανάρριψης ενός νομίσματος δύο φορές. Ποια είναι τα **δυνατά αποτελέσματα;***



Μηχανή ανάρριψης νομίσματος

*Τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο: Κεφαλή (Κ) ή Γράμματα (Γ). Το **σύνολο** των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το Ω = { Κ,Γ }.*

*Το σύνολο Ω θα το ονομάζουμε **δειγματικό χώρο**.*

Παράδειγμα

Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα στο τυχαίο πείραμα του ζαριού;

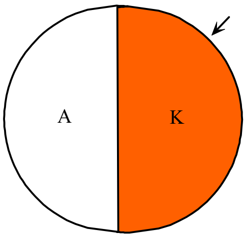
Απάντηση

Να φέρει 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6. Δηλαδή ο δειγματικός χώρος είναι

Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

Παράδειγμα

Έχουμε ένα δίχρωμο τροχό. Να γράψεις “Κ” όταν έρχεται κόκκινο και “Α” όταν έρχεται άσπρο.



Ρουλέτα

Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο που περιέχει τα αποτελέσματα «Κ» ή «Α» δηλαδή: Ω = { Κ, Α }

Παράδειγμα

Στρίβουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

Δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα

Να φέρει την πρώτη φορά:	***και την δεύτερη φορά:***
Κεφαλή	*Κεφαλή*
Κεφαλή	*Γράμματα*
Γράμματα	*Κεφαλή*
Γράμματα	*Γράμματα*

Γίνονται φανερά τα αποτελέσματα της ανάρριψης ενός νομίσματος δύο φορές. Αν βάλουμε Κ για την κεφαλή και Γ για τα γράμματα και συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα:

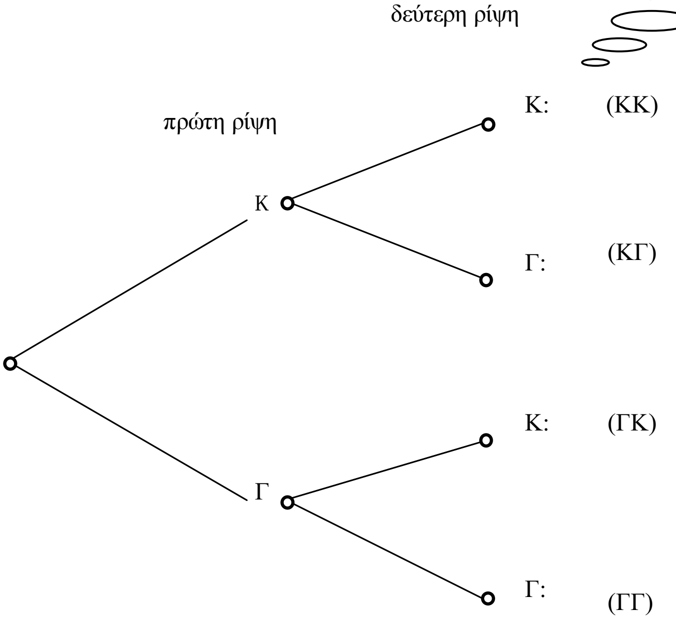
1η ρίψη	***2η ρίψη***
Κ	*Κ*

Κ	*Γ*
Γ	*Κ*
Γ	*Γ*

Έχουμε την κωδικοποίηση των αποτελεσμάτων για το στρίψιμο ενός νομίσματος 2 φορές.

Ή αλλιώς με δενδροδιάγραμμα:

Δενδροδιάγραμμα



Αναπαράσταση με δενδροδιάγραμμα

Άσκηση 1

Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω του παραπάνω πειράματος;

Απάντηση

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο Ω = { ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ }

Όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές είναι δυνατόν να έχουμε Κεφαλή (Κ) την πρώτη φορά και Κεφαλή (Κ) τη δεύτερη, και διάφορους άλλους συνδυασμούς. Έτσι θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

- *ΚΚ, για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Κεφαλή (Κ) και στη δεύτερη ρίψη Κεφαλή (Κ).*

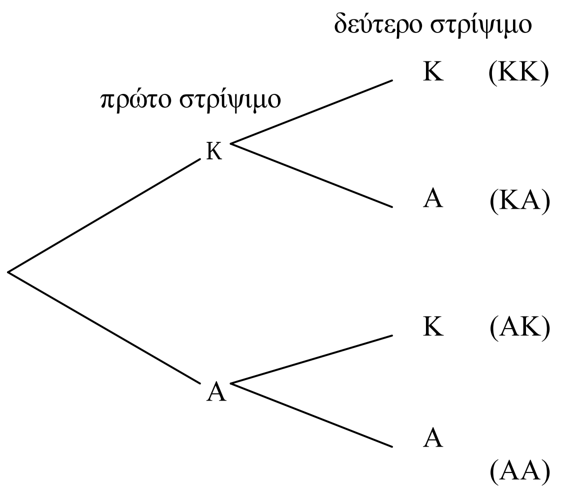
- *ΚΓ, για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Κεφαλή (Κ) και στη δεύτερη ρίψη Γράμματα (Γ).*
- *ΓΚ, για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Γράμματα (Γ) και στη δεύτερη ρίψη Κεφαλή (Κ).*
- *ΓΓ, για να δηλώσουμε ότι: στην πρώτη ρίψη φέραμε Γράμματα (Γ) και στη δεύτερη ρίψη Γράμματα (Γ).*

Άσκηση 2

*Στο παράδειγμα του δίχρωμου τροχού, ας υποθέσουμε ότι γυρίζουμε το τροχό δύο φορές. Ποια είναι τα **δυνατά αποτελέσματα;***

Απάντηση

Κατασκευάζουμε πρώτα το σχετικό δενδροδιάγραμμα:



Δενδροδιάγραμμα για το δίχρωμο τροχό (ρουλέτα)

Άρα ο δειγματικός χώρος είναι ο Ω = { ΚΚ, ΚΑ, ΑΚ, ΑΑ }.

Άσκηση 3

Ας θεωρήσουμε ξανά το τυχαίο πείραμα της ανάρριψης ενός ζαριού.

Απάντηση

Ο δειγματικός χώρος είναι Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Ορισμός.

***Δειγματικός χώρος** είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.*

1.5 Απλά ή στοιχειώδη ενδεχόμενα

*Κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου λέγεται **απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο.***

Για παράδειγμα όταν στρίβουμε ένα νόμισμα τότε τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι « κεφαλή» ή Κ και «γράμματα» ή Γ. Έτσι Ω={Κ,Γ}.

*Εκτός των **απλών** ή **στοιχειωδών** ενδεχομένων είναι δυνατόν να έχουμε και σύνθετα ενδεχόμενα. Για παράδειγμα όταν ρίχνουμε ένα ζάρι: «το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό»*

Άσκηση 1

Από ποια απλά ενδεχόμενα απαρτίζεται το ενδεχόμενο Α «να φέρουμε άρτιο αριθμό»;

βάλτε με τη σειρά τα απλά ενδεχόμενα που απαρτίζουν το Α.

Α = { - , - , - }

*Κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα λέγεται και «**στοιχειώδες»** ή «απλό» ενδεχόμενο.*

Απάντηση

Α={2,4,6}

Άσκηση 2

Συμπληρώστε τη φράση που αντιπροσωπεύει το στοιχειώδες ενδεχόμενο «ΓΓ».

Απάντηση

*Το στοιχειώδες αυτό ενδεχόμενο αναφέρεται στο τυχαίο πείραμα της ανάρριψης ενός νομίσματος δύο φορές. Το συγκεκριμένο απλό ενδεχόμενο κωδικοποιεί το αποτέλεσμα να φέρουμε **γράμματα** την πρώτη φορά και **γράμματα** και τη δεύτερη φορά.*

Άσκηση 3

*Ποιο από τα **στοιχειώδη ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματοχώρο** Ω = { ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ }. Τι αντιπροσωπεύει (κωδικοποιεί) τη φράση: «όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές είναι δυνατόν να έχουμε γράμματα την πρώτη φορά και κεφαλή την δεύτερη».*

Απάντηση

Συμπληρώνει ο μαθητής

Άσκηση 4

Πως θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε με μια φράση ότι πραγματοποιείται το σύνθετο ενδεχόμενο Α={ ΚΚ και ΚΓ};

Απάντηση

"Όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές το ενδεχόμενο Α κωδικοποιεί το σύνθετο ενδεχόμενο να φέρουμε ***Κεφαλή*** *(Κ) την πρώτη φορά. Υπάρχουν δύο δυνατότητες για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου Α: Κεφαλή (Κ) την πρώτη φορά και* ***Κεφαλή*** *ή* ***Γράμμα*** *την δεύτερη.*

1η ρίψη	***2η ρίψη***
Κ	*Κ*
Κ	*Γ*

Το σύνολο Α = { ΚΚ, ΚΓ } είναι ***ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου***

Ω = { ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ } και ονομάζεται ***ενδεχόμενο****.*

1.6 Βέβαιο Ενδεχόμενο

Ορισμός

Κάθε υποσύνολο Α του δειγματικού χώρου Ω λέγεται ***ενδεχόμενο****. Κάθε τέτοιο ενδεχόμενο που περιλαμβάνει* ***όλα*** *τα στοιχειώδη ενδεχόμενα, δηλαδή ταυτίζεται με τον δειγματικό χώρο Ω, λέγεται* ***βέβαιο ενδεχόμενο****.*

Άσκηση 1

Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα και στη συνέχεια ένα ζάρι.

α) *Να κατασκευάσετε το δεντροδιάγραμμα.*

β) *Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος;*

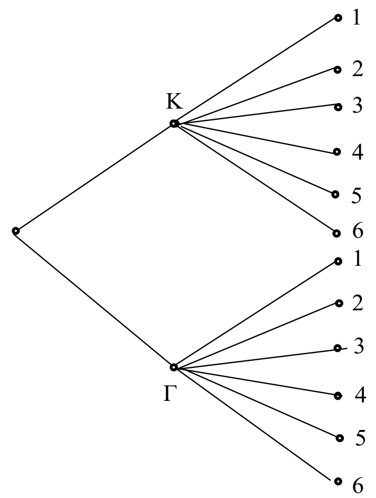
γ) *Να γράψετε τα ενδεχόμενα*

Α: να φέρουμε κεφαλή και άρτιο αριθμό.

Β: να φέρουμε αριθμό μικρότερο του 4.

Απάντηση

α)



Δενδροδιάγραμμα για τη ρίψη ενός νομίσματος και ενός ζαριού.

β) *Ω = { Κ1, Κ2, Κ3, Κ4, Κ5, Κ6, Γ1, Γ2, Γ3, Γ4, Γ5, Γ6 }*

γ) *Α = { Κ2, Κ4, Κ6, Γ2, Γ4, Γ6 }*

δ) *Β = { Κ1, Κ2, Κ3, Γ1, Γ2, Γ3 }*

Άσκηση 2

Έχουμε τα γράμματα της λέξης "ΤΡΙΓΩΝΟ" γραμμένα σε καρτελίτσες Τ, Ρ, Ι, Γ, Ω, Ν, Ο, μέσα σε ένα σακουλάκι. Ανασύρουμε μια καρτέλα και έστω ότι είναι το Γ. Ανασύρουμε μια δεύτερη καρτέλα.

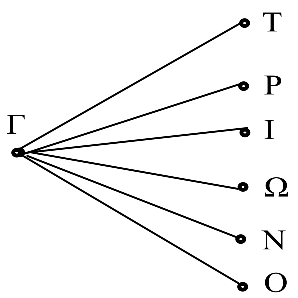
α) *Φτιάξε το δενδροδιάγραμμα του πειράματος.*

β) *Να γράψετε τον δειγματικό χώρο.*

γ) *Να γράψετε το ενδεχόμενο Α: «η δεύτερη καρτέλα να είναι φωνήεν».*

Απάντηση

α)



Δενδροδιάγραμμα του πειράματος

β) *Ω = { ΓΤ, ΓΡ, ΓΙ, ΓΩ, ΓΝ, ΓΟ }*

γ) *Α = { ΓΙ, ΓΩ, ΓΟ }*

Άσκηση 3

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

α) *Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο.*

β) *Να γράψετε τα ενδεχόμενα*

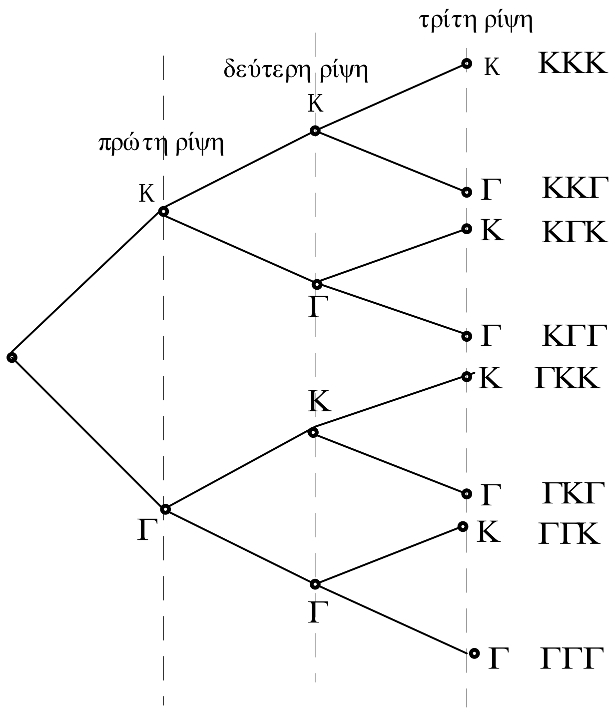
Α: Να φέρουμε «ακριβώς 2 φορές γράμματα».

Β: Να φέρουμε «τουλάχιστον δύο φορές γράμματα».

Γ: Να φέρουμε «το πολύ δύο φορές γράμματα».

Απάντηση

α)



Δενδροδιάγραμμα για την ρίψη νομίσματος τρεις φορές

Ω = { ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ }

β) *Α = { ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ }*

Β = { ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ }

Γ = { ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ }

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα κόκκινο, και ένα πράσινο (με αυτή τη σειρά). Να γράψετε τα ενδεχόμενα

Α: «Και τα δύο ζάρια να φέρουν το 6».

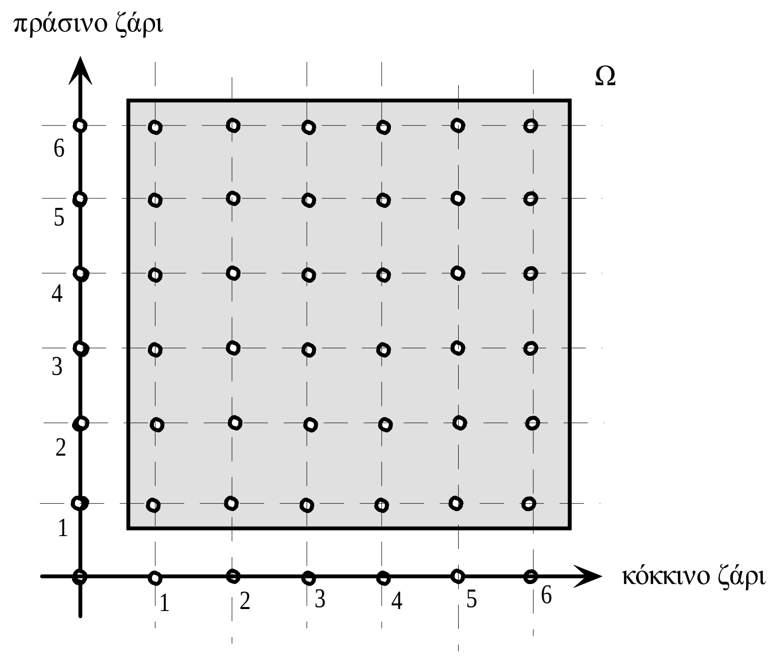
Β: «Η ένδειξη του κόκκινου ζαριού να είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη του πράσινου».

Γ: «Το κόκκινο ζάρι φέρνει 6 και το πράσινο όχι».

Δ: «Το κόκκινο (πρώτο) ζάρι να φέρει αριθμό μεγαλύτερο του 4».

Απάντηση

Με τη βοήθεια του πιο κάτω δικτυωτού (καρτεσιανό γινόμενο), να υπολογίσετε το δειγματικό χώρο του πειράματος καθώς και τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ.



Δειγματικός χώρος για τη ρίψη δύο ζαριών

Σημείωση. *Στη λύση της άσκησης 4, χρησιμοποιείται πίνακας με κουκίδες. Μπορούμε βεβαίως να χρησιμοποιήσουμε και δεδροδιαφράμματα για να βρούμε το δειγματικό χώρο.*

1.7 Ασκήσεις για το σπίτι

1. *Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι. Αποτελεί αυτό πείραμα τύχης;*

2. *Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης (ΝΑΙ/ΟΧΙ).*

i. *Θεωρούμε ότι ένας ηλεκτρικός διακόπτης λειτουργεί καλά. Ανοίγουμε το διακόπτη. Μας ενδιαφέρει αν θα ανάψει η λάμπα ή όχι. Να γίνει συζήτηση.*

ii. *Κατά τη γέννηση ενός παιδιού μας ενδιαφέρει αν θα γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.*

iii. *Ένας σκοπευτής πυροβολεί σε κάποιο στόχο. Μας ενδιαφέρει το σημείο που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα.*

iv. *Με κάποιο όργανο ακριβείας μέτρησης μήκους, μετράμε το πλάτος ενός παραθύρου.*

3. *Σ' έναν αγώνα τένις μεταξύ δύο παικτών Α και Β κερδίζει εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο.*

4. *Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές. Να γράψετε το ενδεχόμενο Α: «τις τρεις πρώτες φορές να έρθει κεφαλή».*

5. *Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές.*

i) Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα και το δειγματικό χώρο

ii) Να γράψετε τα ενδεχόμενα:

Α: να φέρουμε ακριβώς 3 φορές γράμματα

Β: να φέρουμε τουλάχιστον 3 φορές γράμματα

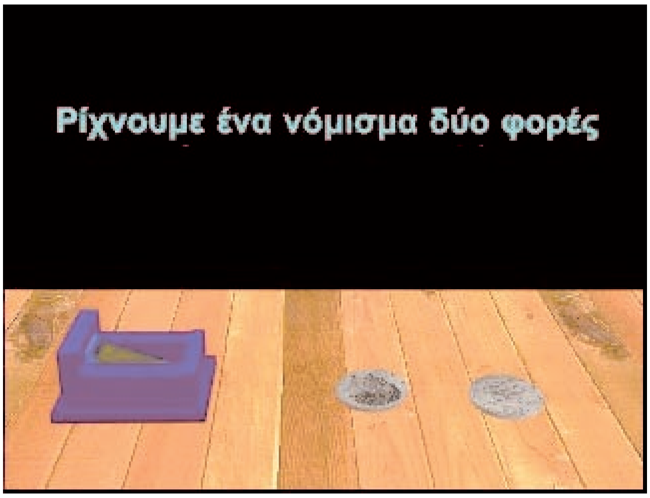
Γ: να φέρουμε το πολύ 3 φορές γράμματα

2 Δεύτερη Ενότητα

2.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο αυτό πρώτα εισάγουμε την έννοια της σχετικής συχνότητας η οποία εκφράζει με θαυμάσιο τρόπο τη βασική έννοια της «στατιστικής ομαλότητας». Η πιθανότητα λοιπόν εκφράζει ένα είδος αφαίρεσης της σχετικής συχνότητας, με τον αριθμό των πειραμάτων να αυξάνει απεριόριστα. Στη συνέχεια διασυνδέεται η έννοια της πιθανότητας με τη στοιχειώδη έννοια του εμβαδού. Δίνονται αρκετά παραδείγματα για να ισχυροποιηθεί αυτή η διασύνδεση. Η επόμενη και τελική διασύνδεση δίδεται μεταξύ της πιθανότητας και της εμπειρικής έννοιας της «μάζας». Το βασικό τυχαίο πείραμα είναι από τις Ρωμαϊκές κρήνες. Διασυνδέεται το πείραμα της Ρωμαϊκής κρήνης με τη σχετική συχνότητα. Επειδή ο αριθμός των μορίων είναι πολύ μεγάλος, η μάζα του νερού που εκρρέει από μια εκροή πρακτικά συμπίπτει με τον όρο της σχετικής συχνότητας, δηλαδή με την πιθανότητα.

2.2 Η Έννοια της Πιθανότητας



Ας θεωρήσουμε ξανά το παράδειγμα της ανάρριψης 2 αμερόληπτων νομισμάτων. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: Ω={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}. Είναι φανερό ότι το ενδεχόμενο {ΚΚ} έχει <u>«μικρότερη πιθανότητα»</u> να εμφανιστεί από ότι το {ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}, αφού στην πρώτη περίπτωση το αποτέλεσμα του πειράματος θα πρέπει να είναι οπωσδήποτε ΚΚ, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να είναι ΚΚ ή ΚΓ ή ΓΚ ή ΓΓ, δηλαδή το δεύτερο ενδεχόμενο είναι το <u>βέβαιο ενδεχόμενο.</u>

Έτσι λοιπόν αφού υπάρχουν ενδεχόμενα με μικρότερη ή μεγαλύτερη πιθανότητα, υπάρχει η ανάγκη να μπορούμε να «μετρήσουμε την τυχαιότητα», το πόσο τυχαίο είναι δηλαδή ένα αυθαίρετο ενδεχόμενο. Αν τώρα στρίβουμε ένα νόμισμα όλο και περισσότερες φορές παρατηρούμε ένα είδος «στατιστικής ομαλότητας», δηλαδή ο αριθμός π.χ. των κεφαλών που εμφανίζονται σταθεροποιείται και τείνει να ο μισός του αριθμού των πειραμάτων. Από την ιστορία των μαθηματικών έχουμε την πληροφορία ότι οι Buffon *και* Pearson *είχαν την υπομονή να στρίψουν ένα νόμισμα χιλιάδες φορές. Το αποτέλεσμα είναι αυτό που φαίνεται στον πίνακα:*

	Αριθμός ρίψεων	*Αριθμός κεφαλών*
Buffon	*4040*	*2048*
Karl Pearson	*12.000*	*6019*
Karl Pearson	*24.000*	*12.012*

Δηλαδή στις 4040 ρίψεις ο αριθμός των κεφαλών είναι 2048 (2048 κεφαλές στις 4040 ρίψεις) ή

$$\frac{2048}{4040} = 0{,}5069$$

Που δείχνει ότι ο αριθμός των κεφαλών είναι περίπου 50%.

Ορισμός

Αυτός ο αριθμός 0,5069= Αριθμός κεφαλών / Αριθμός ρίψεων λέγεται <u>σχετική συχνότητα</u> της εμφάνισης του Κ.

Έτσι λοιπόν βλέπουμε τον πίνακα που δείχνει τις σχετικές συχνότητες αυτών των ρίψεων.

	Αριθμός ρίψεων	Αριθμός κεφαλών	Σχετική συχνότητα
Buffon	4040	2048	0,5069
Karl Pearson	12.000	6019	0,5016
Karl Pearson	24.000	12.012	0,5005

Ας μελετήσουμε τον επόμενο πίνακα που μας δείχνει τη σχετική συχνότητα να έλθει κεφαλή σταδιακά από τις 10, 20,30 … 200 ρίψεις. Θα παρατηρήσουμε ότι για <u>μεγάλο αριθμό ρίψεων</u> το ποσοστό των κεφαλών <u>σταθεροποιείται γύρω στο 50%.</u>

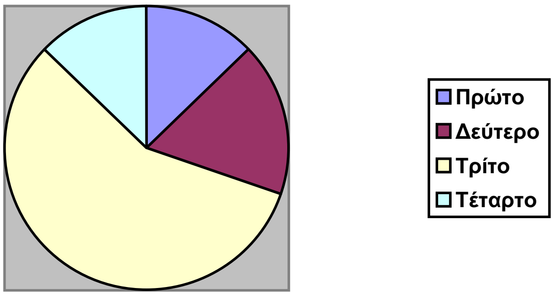
Ρίψεις	*Κεφαλές*	*Σχετική Συχνότητα*	*Ποσοστό*
10	7	0,700	70%
20	13	0,650	65%
30	16	0,533	53%
40	23	0,576	58%
50	26	0,520	52%
80	39	0,488	49%
100	46	0,460	46%
120	61	0,508	50%
140	70	0,500	50%
160	81	0,506	51%
180	89	0,494	50%
200	99	0,495	50%
……	…..	….	….
4040	2048	0,507	50%

12000	*6019*	*0,501*	*50%*
24000	*12012*	*0,500*	*50%*

Παράδειγμα

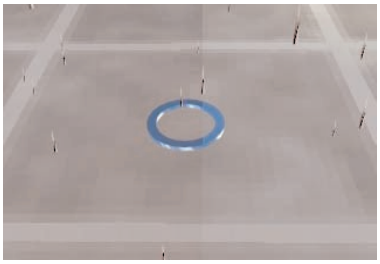
Μια βασιλόπιτα είναι κομμένη σε άνισα κομμάτια και το φλουρί βρίσκεται μόνο σε 1 κομμάτι. Εσείς ποιο κομμάτι θα διαλέγατε; Ασφαλώς το μεγαλύτερο. Δηλαδή

Το Εμβαδόν έχει άμεση σχέση με την πιθανότητα



Παράδειγμα

Βρισκόμαστε σε μια πλατεία μια βροχερή ημέρα. Παρατηρούμε τι γίνεται σε μία από τις πλάκες της πλατείας. Η πλάκα όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ορθογώνια και κάπου στο εσωτερικό της υπάρχει ένας κύκλος. Μετράμε τις σταγόνες που πέφτουν μέσα



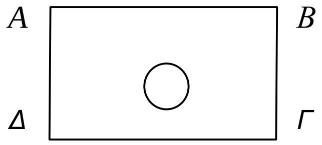
σε ολόκληρο το ορθογώνιο (πλάκα) και τον αριθμό των σταγόνων που πέφτουν μέσα στον κύκλο και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Σταγόνες στο ορθογώνιο	*Σταγόνες στον κύκλο*
10	*2*
100	*12*
500	*52*
1000	*104*
10.000	*1043*

Όπως φαίνεται η σχετική συχνότητα για μεγάλο αριθμό σταγόνων σταθεροποιείται γύρω στο 10%.

Άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα δίδονται: ΑΒ=100cm, ΒΓ=31,4cm και ρ=10cm. Αν υποθέσουμε ότι π=3,14 να υπολογίσετε την πιθανότητα να πέσει η σταγόνα της βροχής μέσα στον κύκλο.



Απάντηση

Υπολογίζουμε: Εορθ.=(ΑΒ)x(ΒΓ)=100x31,4=3140 cm^2

Εκυκλ.=$\pi\rho^2$=3,14x10=314cm^2.

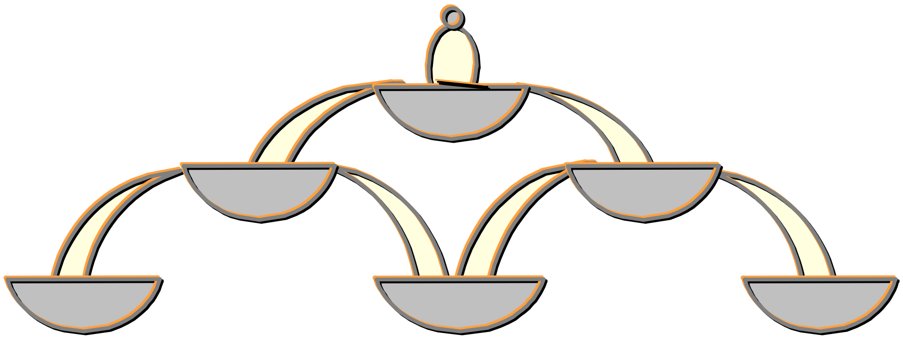
Η σχέση του εμβαδού του κύκλου με το εμβαδόν του ορθογωνίου υπολογίζεται από το κλάσμα Εμβαδόν κύκλου/Εμβαδόν ορθογωνίου

δηλαδή Εκυκλ/Εορθ=314/3140=1/10=0,10.

Άρα η πιθανότητα να πέσει μέσα στον κύκλο είναι 10%.

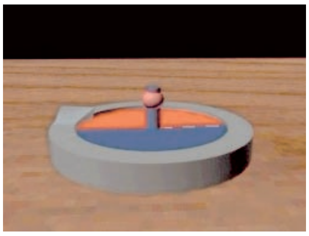
2.3 Πειράματα με δύο δυνατά αποτελέσματα

Ας παρατηρήσουμε τη Ρωμαϊκή κρήνη όπως φαίνεται στο σχήμα:



Στη Ρωμαϊκή κρήνη βλέπουμε ότι το τυχαίο πείραμα της ροής ενός μορίου νερού και η ανάρριψη ενός νομίσματος είναι στην πραγματικότητα όμοια τυχαία πειράματα. Έχουν δηλαδή και τα δύο πειράματα ΔΥΟ δυνατά αποτελέσματα.

Άσκηση 1



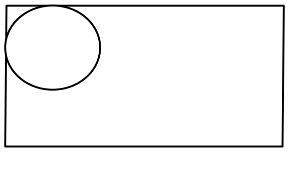
Έχουμε έναν δίχρωμο τροχό χωρισμένο σε 2 ημικύκλια το κόκκινο και το μαύρο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να έλθει μαύρο χρησιμοποιώντας το λόγο των εμβαδών.

Απάντηση

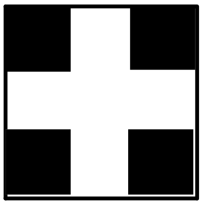
Εμαύρ.ημ/ Εκυκλ.δ.= 1/2πρ²/πρ²=1/2=0,5

2.4 Ασκήσεις για το σπίτι

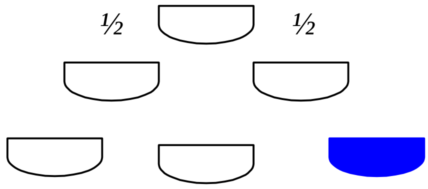
1. *Στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται η ορθογώνια πλάκα μιας πλατείας με έναν κύκλο στο εσωτερικό της. Χρησιμοποιώντας το λόγο των εμβαδών να υπολογίσετε την πιθανότητα μια σταγόνα να πέσει στο εσωτερικό του ορθογωνίου όχι όμως στο εσωτερικό του κύκλου.*



***2.** Μια μέρα βροχής παρακολουθούμε τις πλάκες του σχήματος. Ποια η πιθανότητα να πέσει μια σταγόνα σε ένα μαύρο τετράγωνο; Η κάθε πλάκα έχει τετράγωνο σχήμα και το κάθε μαύρο τετράγωνο έχει πλευρά όσο το το ένα τρίτο της πλευράς της πλάκας.*



***3.** Αν η πιθανότητα για μια σταγόνα στη Ρωμαϊκή κρήνη είναι ½ για να πάει από τη δεξιά πλευρά της κούπας και ½ για να πάει από την αριστερή πλευρά της, να υπολογιστεί η πιθανότητα για μια σταγόνα να φτάσει στη μπλέ κούπα.*



***4.** Δίνεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα από την ανάρριψη ενός νομίσματος. Ο αριθμός 100 και πολύ περισσότερο ο 500 θεωρείται μεγάλος αριθμός ρίψεων. Το νόμισμα που χρησιμοποιήσαμε είναι «αμερόληπτο»; (Δηλαδή η πιθανότητα να έλθει Κ είναι ίδια με την πιθανότητα να έλθει Γ);*

Ρίψεις	*Κεφαλές*
10	*7*
30	*26*
50	*40*
100	*82*
500	*400*

3 Τρίτη Ενότητα

3.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την ιδέα της πιθανοθεωρητικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας μεταξύ δύο ενδεχομένων.

Επίσης θα επεκτείνουμε τη κλασσική έννοια της πιθανότητας στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας και θα παρακολουθήσουμε τη δυνατότητα *πραγματικών εφαρμογών στη καθημερινή ζωή και στο κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών.*

3.2 Δεσμευμένη Πιθανότητα.

Παράδειγμα

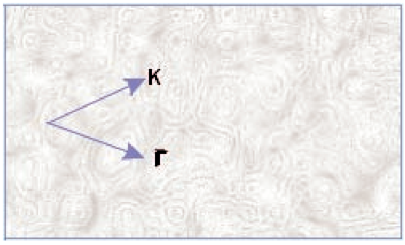
Ας ρίξουμε δύο ίδια μεταξύ τους νομίσματα. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος;

Απάντηση

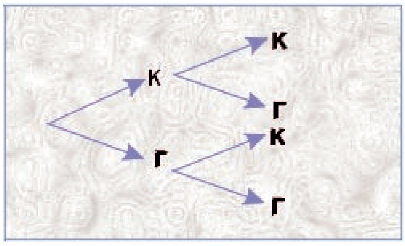
Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ }

Ας δούμε εν συνεχεία το δενδροδιάγραμμα του δειγματικού χώρου.

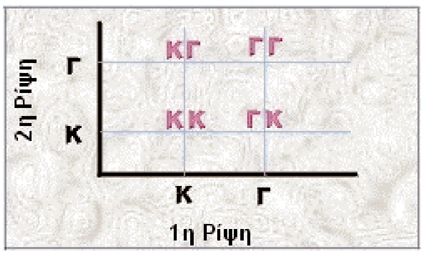
Η 1η ρίψη έχει δύο δυνατότητες Κεφάλι – Γράμματα.



Η 2η ρίψη έχει πάλι δύο δυνατότητες Κεφάλι – Γράμματα



Μπορούμε όμως να αναπαραστήσουμε τον δειγματικό χώρο σε ορθογώνιο σύστημα



Εδώ ο δειγματικός μας χώρος αποτελείται από ενδεχόμενα πιο σύνθετα. Καθένα από αυτά αποτελείται από δύο απλά ενδεχόμενα.

Παράδειγμα

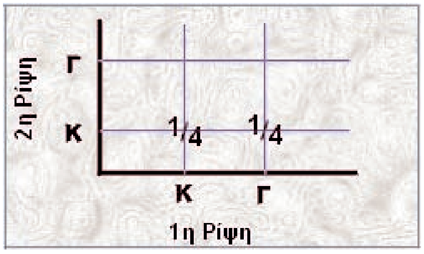
Ποια είναι η πιθανότητα και στα δύο κέρματα να έχουμε κεφαλές; Δηλαδή το P(ΚΚ); Ποια η πιθανότητα να έχουμε Γράμματα στο ένα και Κεφάλι στο άλλο; Δηλαδή το P(ΓΚ);

Απάντηση

P(ΚΚ)=1/4

P(ΓΚ)=1/4

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η αναπαράσταση είναι:



Παράδειγμα

Αν γνωρίζουμε ότι σε ένα τέτοιο σύνθετο ενδεχόμενο το πρώτο γράμμα είναι Κ,

Ποιος θα είναι ο δειγματικός χώρος Ω΄;

Ποια ενδεχόμενα δεν μας ενδιαφέρουν;

Απάντηση

Ω΄ ={ΚΚ,ΚΓ}

Δεν μας ενδιαφέρουν τα ενδεχόμενα ΓΚ,ΓΓ

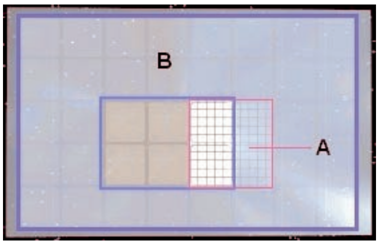
Παράδειγμα

Αν ήδη ξέρουμε ότι το πρώτο νόμισμα έχει δώσει κεφάλι ποια είναι η πιθανότητα και το δεύτερο να είναι κεφάλι;

Απάντηση

Αφού έχουμε μία δυνατότητα η πιθανότητα είναι 1/4.

Μας ενδιαφέρει ξανά η πιθανότητα να πέσει μια σταγόνα στο Α με την προϋπόθεση φυσικά ότι έχει περάσει από το διάφραγμα Β. Δηλαδή η P(A/B)



Η πιθανότητα λοιπόν για μια σταγόνα να φτάσει στο Α αφού έχει περάσει από το Β είναι δύο προς έξι. Ή γενικά

$$\boldsymbol{P(A/B)} = \frac{K1}{K2} = \frac{K3}{K4}$$

όπου

K1= Εμβαδόν (A∩B)

K2 = Εμβαδόν (B)

K3 = P(A∩B)

K4 = P(B)

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Αυτή η πιθανότητα καλείται Δεσμευμένη και τη συμβολίζουμε **P(A/B)** .*

Και εκφωνείται δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου Α δοθέντος ότι έχει εμφανιστεί το ενδεχόμενο Β ή απλά δοθέντος του Β.

Παράδειγμα

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: «Ο Γιώργος έχει χρήματα»

Β: «Ο Γιώργος θα πάει κινηματογράφο»

Πώς θα διατυπώσουμε με λόγια το P(B/A);

Απάντηση

Ο Γιώργος θα πάει κινηματογράφο διότι έχει χρήματα.

Παράδειγμα

Αν σκεφτόμαστε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με το εμβαδόν του, όπως στην περίπτωση των διαφραγμάτων, συμπληρώστε τα κενά

P(A/B)=;

P(B/A)= ;

Απάντηση

Διαπιστώνουμε ότι

P(A/B)= 2/6

P(B/A)= 2/4

Παρατηρήσεις

Ας ξανάρθουμε στην περίπτωση της βροχής, για να εξετάσουμε τι θα γίνει αν το διάφραγμα Β αρχίσει να μεγαλώνει μέχρι να γίνει ίσο με το Ω ή να το ξεπεράσει.

Ποια είναι τώρα η P(A/B) και ποια η P(A);

Από το σχήμα φαίνεται

P(A/B)=6/40

P(A)=6/40

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ταυτίζεται με την κανονική πιθανότητα.

Ορισμός

Αν τοποθετήσουμε τώρα και ένα δεύτερο διάφραγμα πάνω από το Β, ποια είναι η πιθανότητα μια σταγόνα να φτάσει στο Α;

Είναι

$P(A/B/\Gamma)=P(A\cap(B/\Gamma))/P(B/\Gamma)$

3.3 Ανεξαρτησία Ενδεχομένων.

Παράδειγμα

Ο Γιώργος και ο Γιάννης έχουν βγει για την Κυριακάτικη βόλτα τους και ταλαντεύονται μεταξύ τριών δυνατοτήτων. Να πάνε κινηματογράφο, ζαχαροπλαστείο ή στο κουκλοθέατρο. Έτσι αποφασίζουν να το αφήσουν στην τύχη. Επειδή όμως θέλουν να δώσουν ένα προβάδισμα στον κινηματογράφο, γράφουν σε 2 χαρτάκια «κινηματογράφος», σε 1 «κουκλοθέατρο» και σε 1 «ζαχαροπλαστείο». Ρίχνουν τα 4 χαρτάκια σε ένα κουτί και τραβούν ένα.

Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε στον κινηματογράφο;

Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε στο κουκλοθέατρο;

Ποια είναι η πιθανότητα να πάνε στο ζαχαροπλαστείο;

Απάντηση

Η πιθανότητα να πάνε στον κινηματογράφο είναι: 2/4

Η πιθανότητα να πάνε στο κουκλοθέατρο είναι: 1/4

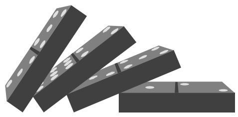
Η πιθανότητα να πάνε στο ζαχαροπλαστείο είναι: 1/4

Ορισμός

Το ενδεχόμενο να πάνε ο Γιώργος και ο Γιάννης κινηματογράφο μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο αν έχουν χρήματα.

*Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι **εξαρτημένα** μεταξύ τους*

Συμβολικά γραμμένα τα ενδεχόμενα:



Α: Ο Γιώργος και ο Γιάννης πάνε κινηματογράφο

Β: Ο Γιώργος και ο Γιάννης έχουν χρήματα

Τα Α και Β είναι εξαρτημένα μεταξύ τους

Ρίχνουμε τώρα ένα κέρμα και μετά ένα ζάρι. Παρατηρούμε το ενδεχόμενο το ζάρι να φέρει άρτιο αριθμό δεν επηρεάζεται καθόλου από το τι έχει φέρει το κέρμα (Κεφάλι ή Γράμματα)

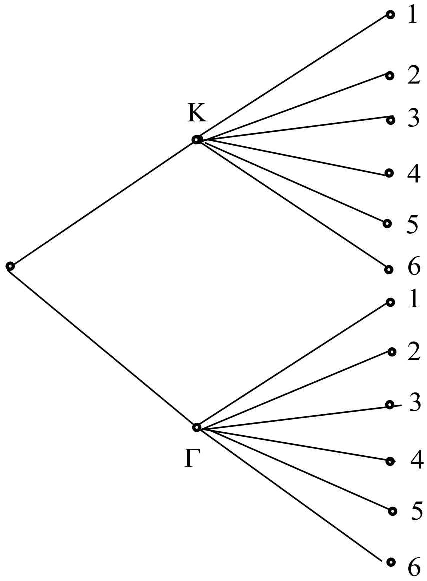
*Τα δύο ενδεχόμενα θα λέμε ότι είναι **ανεξάρτητα***

Παράδειγμα

Αν διατυπώσουμε ένα νέο ενδεχόμενο: να έχουμε Κεφάλι και άρτιο αριθμό

Φτιάξτε το δενδροδιάγραμμα και προσπαθήστε να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού

Απάντηση



Έστω το Ενδεχόμενο Χ: Εμφανίζεται Κεφάλι και άρτιος αριθμός

P(X)= 1/6 *δηλαδή P(X)=* $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3}$

Γενικά όταν έχουμε δύο ενδεχόμενα ανεξάρτητα το ένα Α και το άλλο Β, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α και Β είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α επί την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β. Δηλαδή

P(A/B)= P(A) • P(B)

Παράδειγμα

Να βρείτε τον ίδιο τύπο από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας

Απάντηση

Ω={Κ1,Κ2,Κ3,Κ4,Κ5,Κ6,Γ1,Γ2,Γ3,Γ4,Γ5,Γ6}

Οπότε ***P(A/B)= 2/12=1/6***

3.4 Ασκήσεις για το σπίτι

Να λυθούν οι ασκήσεις που δεν είναι απαντημένες.

3.4.1. Ερωτήσεις πολλαπλής Επιλογής.

1. Αν $P(A\cap B)=O{,}4$ και $P(A)=O{,}9$ τότε

$P(B/A)=$

Α.0,4.0,9 Β. 0,4/0,9 Γ. 0,9/0,4 Δ.0,9 Ε.0,4

Απάντηση.

Το Β

2. Αν $P(A\cap B)=20\%$, $P(B)=80\%$ και τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα τότε $P(A/B)=$;

Α.0,25 Β. 0,8 Γ. 0,4 Δ. 0,2

Απάντηση.

Το Α.

3. Αν Α είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A/\Omega)=$

Α. 1 Β. $P(A)$ Γ.$1/P(A)$ Δ.$(P(A))^3$

3.4.2 Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού.

1. Αν Γ,Δ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε η $P(\Gamma/\Delta)$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$P(\Gamma\cap\Delta)=$ $\boxed{}$ *ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του* $\boxed{}$

Με δεδομένο το $\boxed{}$

2. Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα αν

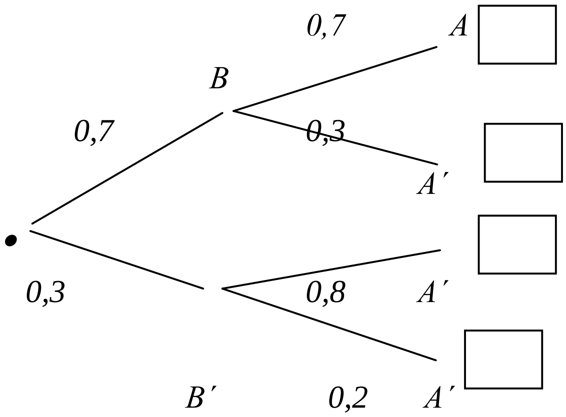
$P(A\cap B)=$ $\boxed{}$

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει η σχέση.

$P(A\cup B)=$ $\boxed{}$

3. Αν $P(A)=0{,}8$, $P(B)=$ $\boxed{\quad}$ και $P(A\cap B)=0{,}16$ και τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα

4. Με βάση το παρακάτω δενδροδιάγραμμα συμπληρώστε τα κενά.



Ασκήσεις Ανάπτυξης

1. Αν $P(A\cap B)=0{,}18$ και $P(B)=0{,}3$ και $P(A)=0{,}6$. Να βρείτε $P(A/B)$ και $P(B/A)$.

Απάντηση.

$P(A/B)= P(A\cap B)/ P(B)=0{,}18/0{,}3 =0{,}6$

$P(B/A)= P(A\cap B)/P(A) =0{,}18/0{,}6 = 0{,}3$

2.Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A.« ένας οδηγός δικυκλου δεν φορούσε κράνος ενώ οδηγούσε.

B. « ένας οδηγός τραυματίστηκε σε τροχαίο ατύχημα»

Να γράψετε με λόγια τις παρακάτω πιθανότητες.

I) $P(A/B)$ II) $P(B/A)$

3. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη ενδεχομένων είναι ανεξάρτητα

ι)Επιλέγουμε ένα άνθρωπο στη τύχη.

A. : «Το επάγγελμά του είναι καθηγητής»

B :«έχει πράσινα μάτια»

ιι) Επιλέγουμε ένα άνθρωπο στη τύχη

A. : «είναι πλούσιος»

B :« έχει αυτοκίνητο BMW»

4. Αν για τα ενδεχόμενα Γ και Δ ισχύει

$P(\Gamma)=1/3$, $P(\Delta)=1/8$ και $P(\Gamma/\Delta)=1/5$.

Τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες

Ι)$P(\Gamma\cap\Delta)$ ιι) $P(\Gamma\cup\Delta)$

5. Αν Α ,Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και $P(A)=0,7$ και $P(B)=0,74$ τότε να βρείτε τις πιθανότητες

ι) $P(A/B)$ ιι) $P(A\cup B)$ ιιι) $P(B/A)$ iv)$P(A\cap B)$

6. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα με

$P(A)=1/4$, $P(A\cup B)=1/3$ και $P(B)=\chi$, τότε

Να βρεθεί το χ αν αν τα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

7. Ας υποθέσουμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα με $P(A)<P(B)$, $P(A\cap B)=6/25$ και $P(A/B)+P(B/A)=1$.

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

8. Μπορεί ένα ενδεχόμενο να είναι ανεξάρτητο με τον εαυτό του.

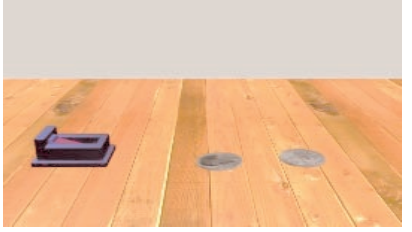
9. Αν $P(A\cap B)\#0$ και $P(A)>P(B)$ τότε είναι $P(A/B)>P(B/A)$

4 Τέταρτη Ενότητα

4.1 Εισαγωγή

Στόχος της ενότητας είναι η παρουσίαση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Θα χρησιμοποιήσουμε πειράματα που έχουν ήδη γίνει οικεία στους μαθητές από τις προηγούμενες ενότητες και παραπέρα επεξεργασία τους με τη βοήθεια πινάκων και ιστογραμμάτων. Η προσέγγιση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής θα γίνει μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων και θα παρουσιαστεί η έννοια της κατανομής πιθανότητας με διαγράμματα, ραβδογράμματα και ιστογράμματα. Τέλος με παράδειγμα θα περιγραφούν όλα τα χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών.

4.2 Τυχαία μεταβλητή



Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι αναρρίπτουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 2 φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω={ , , }. Να υπολογιστεί η πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο.

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας δενδροδιάγραμμα ή πίνακα βρίσκουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω είναι:

Ω={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}. Χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας υπολογίζουμε την πιθανότητα των απλών ενδεχομένων: P(ΚΓ)=1/4, P(ΚΚ)=1/4, P(ΓΚ)=1/4, P(ΓΓ)=1/4.

Παράδειγμα

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα του προηγούμενου παραδείγματος και ζητάμε:

Να καταγραφεί ο αριθμός των κεφαλών για κάθε απλό ενδεχόμενο στον πίνακα

Απλά ενδεχόμενα	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
Αριθμός Κεφαλών	….	…	….	…

Και στη συνέχεια να υπολογιστεί η πιθανότητα στις παρακάτω περιπτώσεις:

$1^η$: P (Να έλθει κεφαλή «Κ» μια φορά)= ; **

$2^η$: P(Να έλθει κεφαλή «Κ» δύο φορές)= ; ***

$3^η$: P(Να έλθει κεφαλή «Κ» καμία φορά)= ; ****

$4^η$: P(Να έλθει κεφαλή «Κ» τουλάχιστον μια φορά)= ; *****

Απαντήσεις

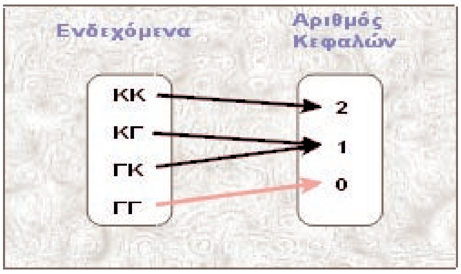
Αφού έχουμε 2 κεφαλές δηλαδή (ΚΚ), στην περίπτωση που έχει έρθει κεφαλή (Κ) στην $1^η$ ρίψη και κεφαλή (Κ) στη $2^η$ ρίψη, στην (ΚΓ) και (ΓΚ) 1 κεφαλή ενώ στη (ΓΓ) 0 κεφαλές, ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ

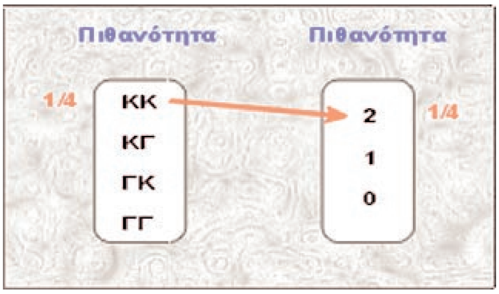
2	*1*	*0*	*0*

** = ½ *** = ¼ **** = ¼ ***** = ¾

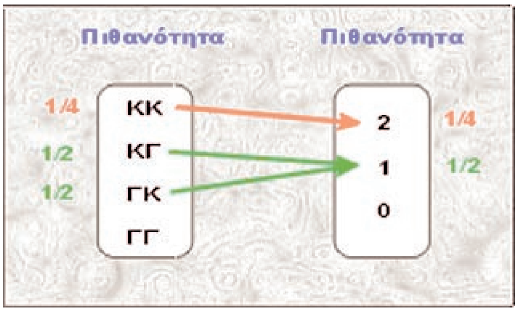
Τα παραδείγματα που αναλύσαμε προηγουμένως μας δίνουν τη δυνατότητα <u>να ορίσουμε τη συνάρτηση που στέλνει το κάθε απλό ενδεχόμενο στον αριθμό που δείχνει πόσες φορές ήλθε Κ</u> όπως φαίνεται στο διάγραμμα:



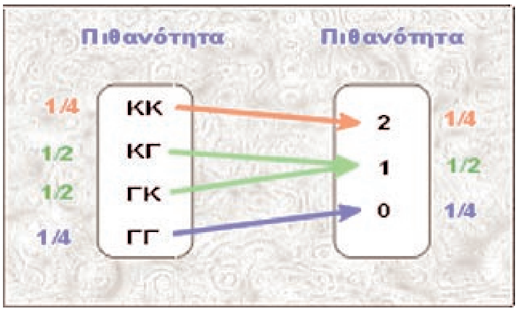
Υπολογίζοντας την πιθανότητα των διαφόρων ενδεχομένων βρίσκουμε ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο "ΚΚ", δηλαδή 2 κεφαλές είναι ¼



Ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο «ΚΓ» ή «ΓΚ», δηλαδή 1 κεφαλή είναι ½.

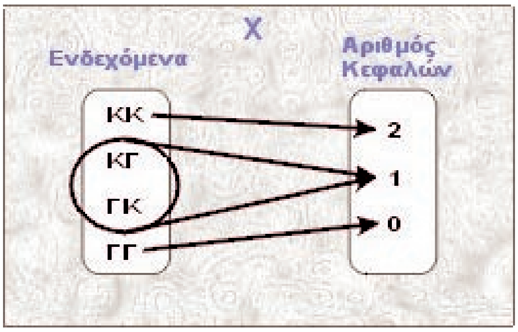


και τέλος η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο «ΓΓ», δηλαδή 0 κεφαλές είναι ¼.



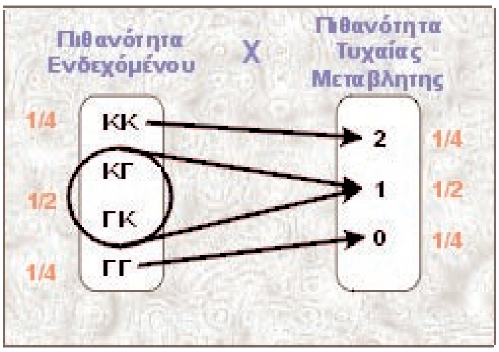
Ορισμός

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι η συνάρτηση Χ που δημιουργήσαμε εκτός του ότι στέλνει κάθε ενδεχόμενο σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό, «μεταφέρει» στον αριθμό αυτό και την πιθανότητα όλων των απλών ενδεχομένων που αντιστοιχούν σε αυτόν. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται <u>τυχαία μεταβλητή.</u>



4.3 Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

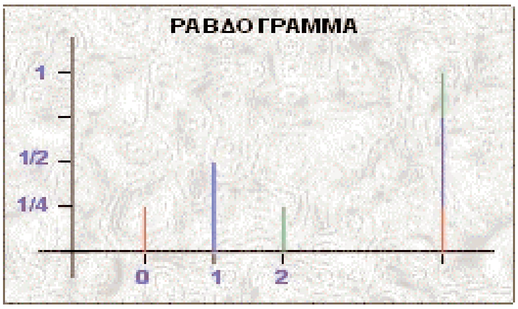
Εάν συμπληρωθεί το παραπάνω διάγραμμα με την πιθανότητα του ενδεχομένου και την πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής,

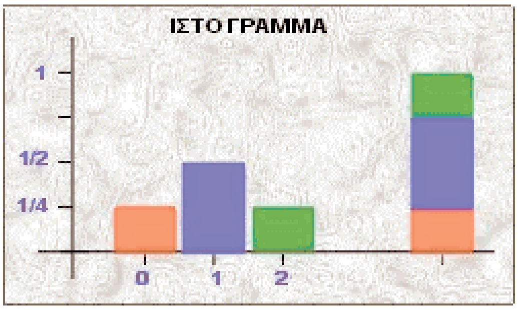


τότε ορίζουμε την <u>κατανομή της πιθανότητας</u> μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα:

Τιμές τυχαίας μεταβλητής	*0*	*1*	*2*
Κατανομή πιθανότητας	¼	½	¼

Εκτός από πίνακα η κατανομή της πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής μπορεί να παρασταθεί και με διαγράμματα:



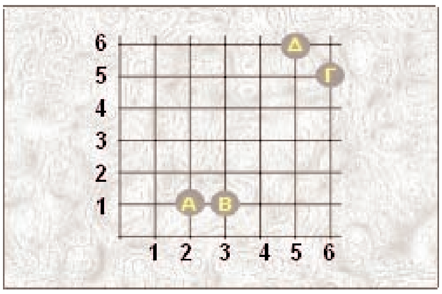


Παρατηρώντας το ραβδόγραμμα και το ιστόγραμμα διαπιστώνουμε ότι εάν «αθροίσουμε» το ύψος των ράβδων θα βρούμε το άθροισμα

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$$

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 2 φορές. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων μπορεί να παρασταθεί σε ένα σύστημα αξόνων 6x6 όπως στο σχήμα που ακολουθεί:



Έστω Α(2,1), Β(3,1), Γ(6,5) και Δ(5,6) σημεία του συστήματος που αντιστοιχούν σε αποτελέσματα από τη ρίψη των ζαριών. Είναι φανερό ότι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου τα οποία έχουν πλήθος 36.

Σε κάθε «διπλό» ρίξιμο των ζαριών, όπως περιγράψαμε στο προηγούμενο πείραμα τύχης, ορίζουμε τη συνάρτηση ως εξής:

Κάθε ζεύγος των αριθμών, που ήλθε με τις ζαριές, το αντιστοιχούμε με εκείνον τον αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους δύο αριθμούς του ζεύγους. Έτσι λοιπόν ορίζουμε τυχαία μεταβλητή την:

(3,5) → 5

(2,2) → 2

(6,1) → 6

Άσκηση 1

Να συμπληρωθούν τα κενά:

(4,3) → Α=

(1,1) → Β=

(1,5) → Γ=

(4,2) → Δ=

Απάντηση

Α=4, Β=1, Γ=5, Δ=4

Παρατηρούμε ότι η μόνη περίπτωση να πάρει η συνάρτηση την τιμή «1» είναι το ζευγάρι (1,1).

4.4 Τυχαία μεταβλητή – Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής

Θεωρούμε το πείραμα τύχης του «διπλού» ριξίματος των ζαριών όπως περιγράφτηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι ο πλήθος των ζευγαριών που αντιστοιχούν στην τιμή 1 είναι 1, στην τιμή 2 είναι 3, στην τιμή 3 είναι 5.

Ασκηση 1

Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα:

Ζευγάρια που η τιμή τους είναι:	*Πλήθος ζευγαριών*
1	*1*
2	*3*
3	*5*
4	*Α* *
5	*Β* *
6	*Γ* *

Ορισμός

Αφού το σύνολο των δυνατών ζευγαριών είναι 36 και μόνο 1 ζευγάρι το (1,1) αντιστοιχεί στην τιμή 1, είναι φανερό ότι η πιθανότητα να έρθει η τιμή 1 είναι 1/36, δηλαδή $P_X(1) = 1/36$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες

$P_X(1)=1/36$

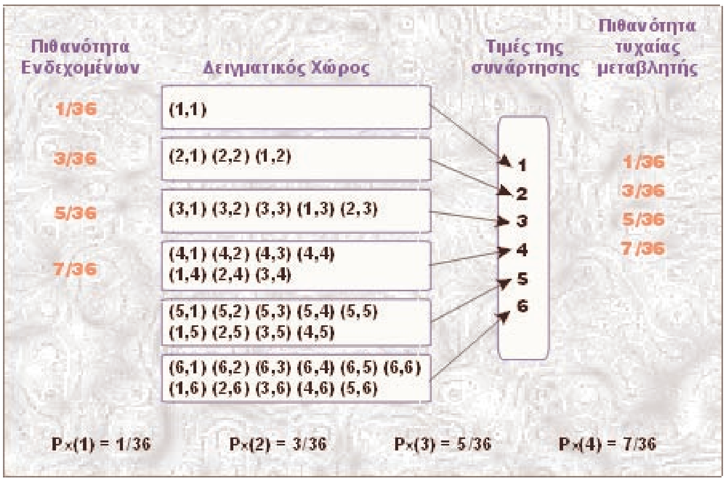
$P_X(2)=2/36$

$P_X(3)=5/36$

$P_X(4)=7/36$

Ασκηση 2

Να υπολογιστεί η πιθανότητα να έλθει 5 καθώς και η πιθανότητα να έλθει 6.



Να συμπληρωθούν τα κενά

$P_X(5)=A$ *

$P_X(6)=B$ *

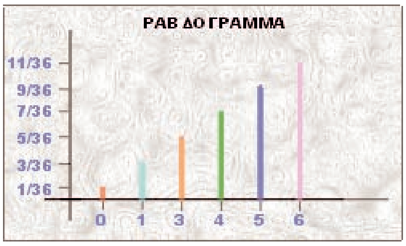
……

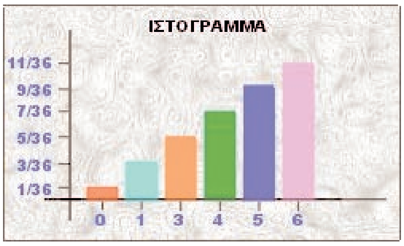
Συμπέρασμα

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση X που «κουβαλάει» μαζί της την έννοια της πιθανότητας είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Μάλιστα η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής μπορεί να περιγραφεί με έναν πίνακα και η ίδια κατανομή μπορεί να περιγραφεί με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Τιμές της συνάρτησης	1	2	3	4	5	6
Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36





Παράδειγμα

Στο γνωστό πείραμα της βροχής που πέφτει πάνω στην πλάκα ορίζουμε μια συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί κάθε σταγόνα που πέφτει μέσα στον κύκλο με τον αριθμό 1 ενώ κάθε σταγόνα που πέφτει στην υπόλοιπη πλάκα με το 0. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να πέσει μια από τις σταγόνες που πέφτουν στην ορθογώνια πλάκα, μέσα στον κυκλικό δίσκο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P(A)=\boxed{\frac{\text{Εμβαδόν κύκλου}}{\text{Εμβαδόν ορθογωνίου}}}$$

Αν P(A)=1/10, και έστω ότι υπάρχει μηχανισμός όπου όταν πέφτει η σταγόνα μέσα στον κύκλο ανάβει ο αριθμός 1 ενώ όταν η σταγόνα πέφτει έξω ανάβει ο αριθμός 0. Τότε η *πιθανότητα να ανάψει ο αριθμός 1 είναι* $P_X(1)=1/10$, *ενώ η πιθανότητα να ανάψει το 0 είναι* $P_X(0)= 9/10$.

Η συνάρτηση Χ που ορίσαμε με τιμές το 0 και το 1 είναι τυχαία μεταβλητή αφού η πιθανότητα να «ανάψει» το 1 ή να «ανάψει» το 2 καθορίζεται από την πιθανότητα να πέσει η σταγόνα μέσα ή έξω από το «Α».

Ασκηση 1

Μπορείς να υπολογίσεις το άθροισμα $P_X(1)+P_X(0)=;$

Ασκηση 2

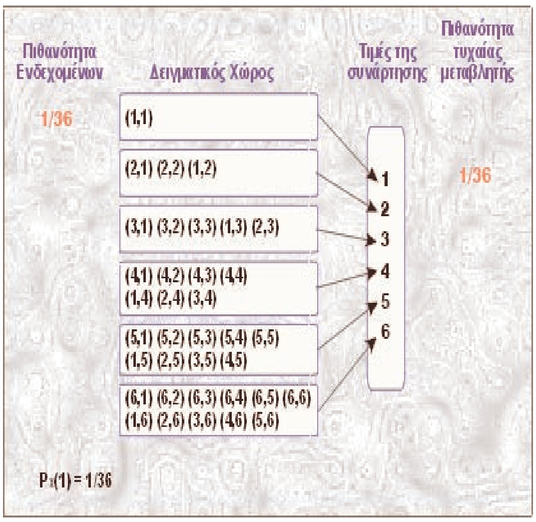
Ρίχνουμε 2 ζάρια και σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων όπως στο παράδειγμα 4.3.1

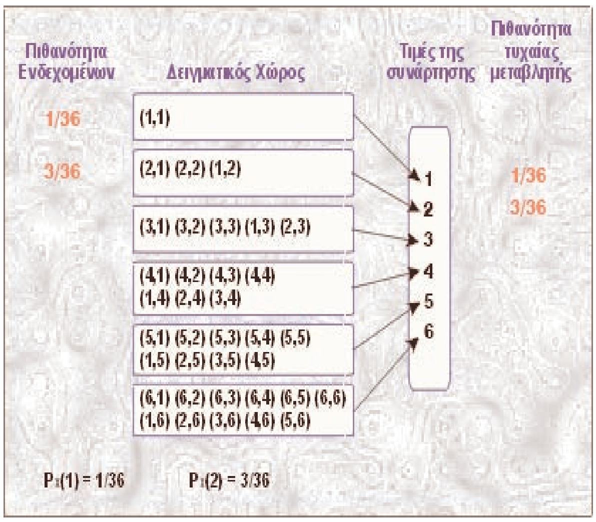
α) Θεωρούμε συνάρτηση Χ που στέλνει το κάθε ζευγάρι στο άθροισμα των ενδείξεων της ζαριάς. Να συμπληρωθούν τα κενά: $X: (3,2) \rightarrow A$ $X: (4,4) \rightarrow B$

Απάντηση

Α=5, Β=8

β) Στο διάγραμμα που ακολουθεί περιγράφεται η συνάρτηση όπως ορίζεται από την άσκηση 3 και υπολογίζονται οι πιθανότητες Ρ(1,1)=1/36, Ρ(2,1)=1/36, Ρ(6,6)=1/36. Αντίστοιχα, αφού μόνο το ζευγάρι (1,1) αντιστοιχεί στην τιμή 1+1=2, η πιθανότητα να σταλεί η διπλή ζαριά στον αριθμό 2 είναι όση και να έλθει η ζαριά (1,1), δηλαδή 1/36.





Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο να συμπληρωθεί ο πίνακας:

X	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
P	*1/36*	*2/36*	*A*	*B*	*Γ*	*Δ*	*E*	*Z*	*H*	*2/36*	*1/36*

Απάντηση

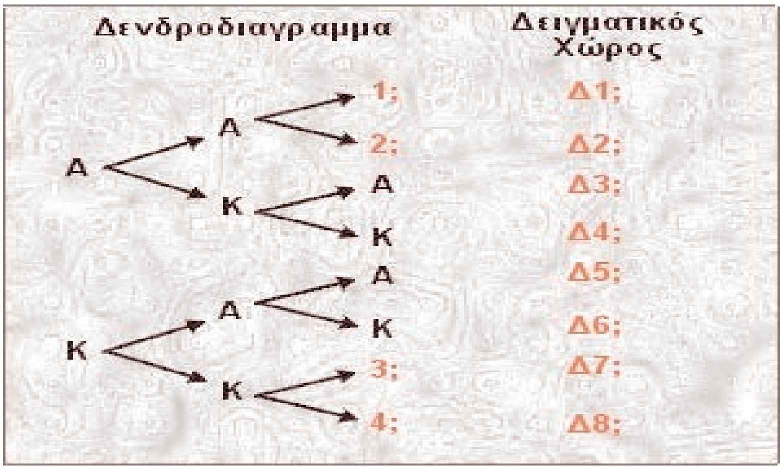
Α=3/36, Β=4/36, Γ=5/36, Δ=6/36, Ε=5/36, Ζ=4/36, Η=3/36.

Αν προσθέσουμε όλες τις τιμές της πιθανότητας Ρ, παρατηρούμε ότι το άθροισμα ισούται με τη μονάδα. Εκτός από τον πίνακα μπορούμε να παραστήσουμε την κατανομή της πιθανότητας με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα.

Ασκηση 3

Αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι «Α» ή κορίτσι «Κ» είναι ίδια, να βρεθεί ο δειγματικός χώρος που περιγράφει το φύλο των παιδιών μιας τριμελούς οικογένειας.

α) Να αντικατασταθούν οι αριθμοί 1,2,3,4 του παρακάτω σχήματος με τα γράμματα Α ή Κ.



Απάντηση

1→ Α, 2→Κ, 3→Α, 4→Κ

β) Να συμπληρωθεί ο δειγματικός χώρος

• *(Α,Α,Α)* •*(, ,)*

•*(Α,Κ,Α)* •*(, ,)*

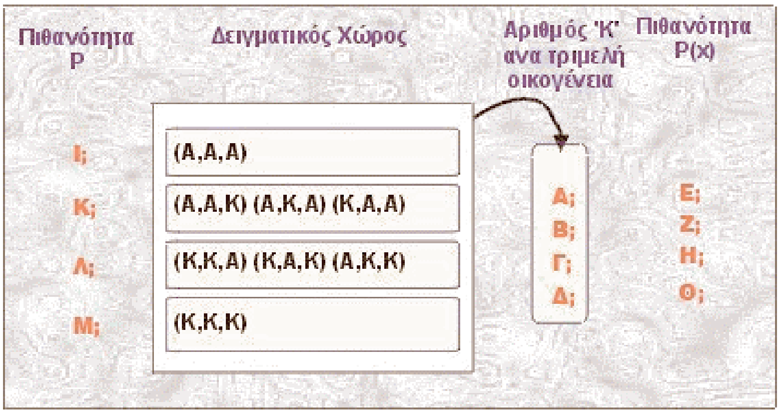
•*(Κ,Α,Α)* •*(Κ,Α,Κ)*

•*(Κ,Κ,Α)*

Απάντηση

Λείπουν τα (Α,Κ,Κ), (Α,Α,Κ) και (Κ,Κ,Κ)

γ) Να ορίσετε την τυχαία μεταβλητή που στέλνει κάθε τριάδα παιδιών στον αριθμό που δείχνει πόσα «Κ» υπάρχουν σε μία οικογένεια και να συμπληρωθούν τα κενά στο διάγραμμα που δείχνει τον αριθμό «Κ»ανά οικογένεια καθώς και τη στήλη της πιθανότητας Ρ.



Απάντηση

Α→0 Β→1 Γ→2 Δ→3 Ι, Ε→1/8 Κ,Ζ→3/8 Λ,Η→3/8 Μ,Θ→1/8

δ) Να υπολογιστεί το άθροισμα: $P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)+P_X(3)$

Απάντηση

$$P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)+P_X(3)=1$$

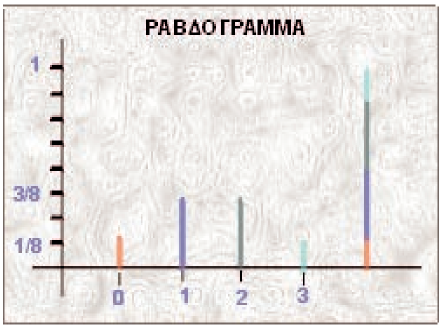
ε) Να συμπληρωθεί ο πίνακας

χ	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*Α*	*Β*	*Γ*	*Δ*

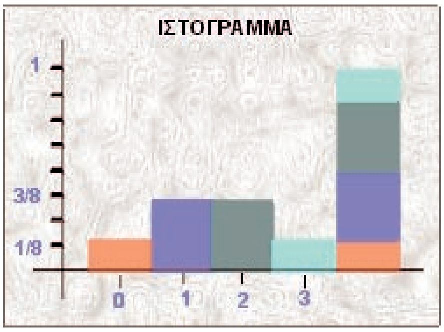
Απάντηση

Α=1/2 Β=3/8 Γ=3/8 Δ=1/8

στ) Από τα ζεύγη (0,1/8), (2,3/8), (3,1/8) του αριθμού «Κ» ανά τριάδα παιδιών και της πιθανότητας P_X *να γίνει το αντίστοιχο ραβδόγραμμα και με τις ίδιες τιμές να γινει και το αντίστοιχο ιστόγραμμα.*



Απάντηση



Ασκηση 4

Ένα δοχείο περιέχει 15 σφαίρες, 2 λευκές και 13 κόκκινες. Επιλέγουμε τυχαία 3 σφαίρες τη μία μετά την άλλη χωρίς επανάθεση. Μας ενδιαφέρει πόσες είναι οι λευκές σφαίρες ανάμεσα σ' αυτές που επιλέξαμε.

Στην επιλογή της $1^{ης}$ *σφαίρας η πιθανότητα να έρθει «Κ» υπολογίζεται:*

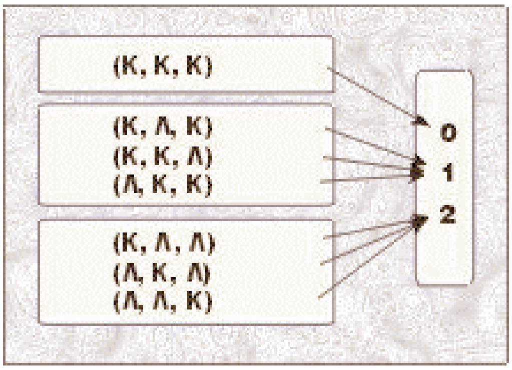
P(K)= (αριθμός κόκκινων σφαιρών)/(σύνολο σφαιρών)= 13/15

Στη $2^{η}$ *επιλογή P(Λ)=2/14 (αφού έχει ήδη αποσυρθεί η* $1^{η}$ *)*

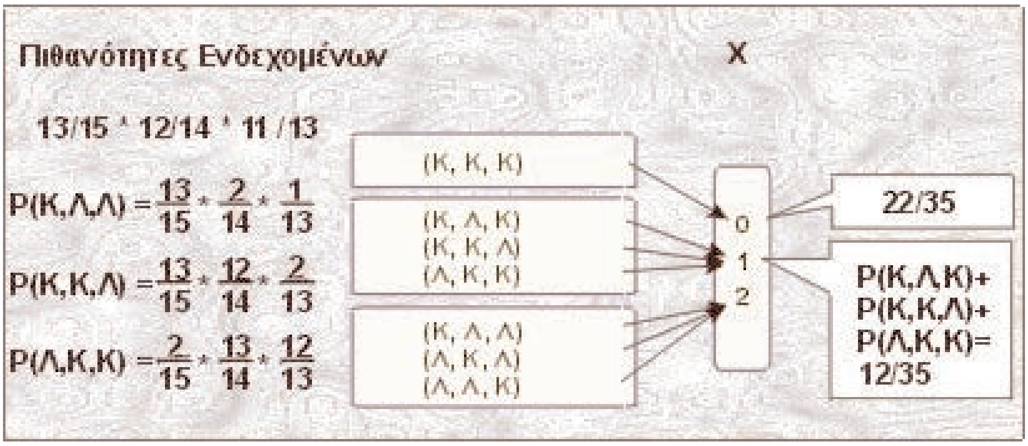
Στην $3^{η}$ *επιλογή P(K)=12/13*

*Άρα η πιθανότητα να έρθει η τριάδα (Κ,Λ,Λ) θα είναι P(Κ,Λ,Λ)=13/15*2/14*12/13=4/35*

Να υπολογιστεί η πιθανότητα P(Κ,Κ,Κ)=;



Από το διάγραμμα που ακολουθεί



Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να έρθει η τιμή 1 κατά την επιλογή 3 σφαιρών είναι το άθροισμα P(Κ,Λ,Λ)+P(Κ,Κ,Λ)+P(Λ,Κ,Κ). Άρα $P_X(1) = 12/35$.

Αφού γνωρίζουμε ότι $P_X(0) = 22/35$ *και* $P_X(1) = 12/35$ *μπορούμε να υπολογίσουμε την* $P_X(2)$ *χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την πιθανότητα των άλλων ενδεχομένων;*

Απάντηση

$P_X(2) = 1/35$

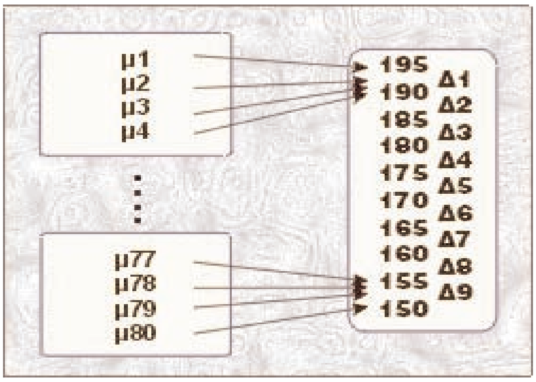
Ασκηση 5

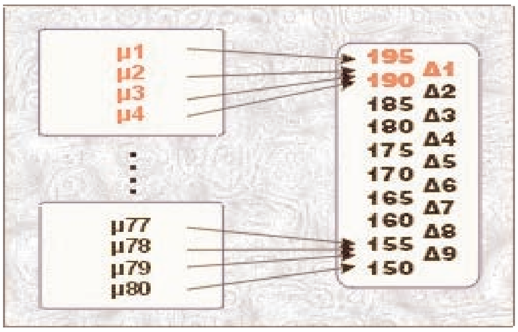
Στη Γ΄ τάξη ενός Λυκείου μετρήθηκε το ύψος 80 μαθητών και σχηματίστηκε ο αντίστοιχος πίνακας:

Διάστημα ύψους σε cm	*Αριθμός μαθητών*
150-155	*4*
155-160	*6*
160-165	*8*
165-170	*10*

179-175	*18*
175-180	*16*
180-185	*10*
185-190	*4*
190-195	*4*

Ο πίνακας αυτός μας δείχνει ομαδοποιημένα τον αριθμό των ατόμων που το ύψος τους ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτό θα ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα αντιστοιχεί κάθε μαθητή με ένα διάστημα. Βάζουμε τους μαθητές κατά σειρά ύψους από τον ψηλότερο στον πιο κοντό: μ1,μ2,μ3,……, μ79,μ80. Ας θεωρήσουμε όλους τους μαθητές που έχουν ύψος από 190-195. Ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει ένας τυχαίος μαθητής από τους 80 στο διάστημα Δ1 190-195; P(Δ1)=; ******





Απάντηση

P(Δ1)=4/80

5 Πέμπτη Ενότητα

5.1 Εισαγωγή

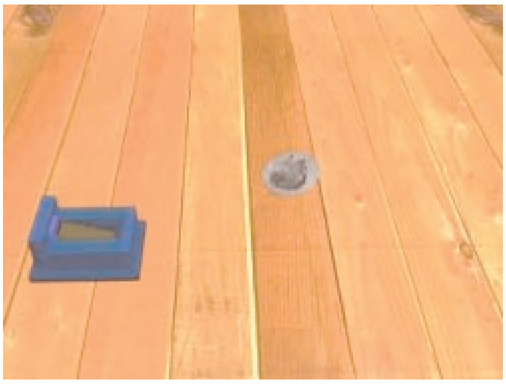
Μία πολύ σημαντική έννοια στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική είναι η έννοια της Μαθηματικής Ελπίδας ή προσδοκώμενης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής. Ιστορικά η ενότητα αυτή έχει μια ιδιαίτερη σημασία καθώς προέκυψε από τα τυχερά παιχνίδια.

Μας δίνεται λοιπόν εδώ η ευκαιρία μιας "επανασύνδεσης" της πιθανοθεωρίας με τις ιστορικές της ρίζες, που θα τοποθετήσει το θέμα μας σ' ένα κοινωνικό πλαίσιο που θα προκαλέσει και μια κριτική συζήτηση για τις σημερινές εφαρμογές της πιθανοθεωρίας.

Ειδικότεροι μαθησιακοί στόχοι είναι η συγκρότηση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας ως μέτρο θέσης μιας κατανομής και η κατάδειξη της ανάγκης "συμπλήρωσης" της από τη Διασπορά ή την Τυπική απόκλιση προκειμένου να έχουμε και ένα μέτρο του πόσο διασκορπισμένη γύρω από τη μέση τιμή είναι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής.

5.2 Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας της Μαθηματικής Ελπίδας

Παράδειγμα



Αν ρίξουμε ένα κέρμα γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από δύο ενδεχόμενα κεφαλή (Κ) ή γράμματα (Γ). Ο δειγματικός χώρος δηλαδή είναι {Κ,Γ}.

Αν συμβολίσουμε με Χ των αριθμό των κεφαλών

Ποια είναι η πιθανότητα σ' αυτό το πείραμα το Χ να είναι ίσο με 1 δηλαδή

$P_X(1) = P[X=1] =$

Ποια είναι η πιθανότητα το Χ να είναι ίσο με 0

$P_X(0)= P[X=0]=$

Υπάρχει δυνατότητα για άλλη τιμή του X;

Απάντηση

$P_X(1)=1/2$

$P_X(0)=1/2$

Ενώ δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα.

Στο συγκεκριμένο λοιπόν πείραμα τύχης παρατηρούμε ότι η πιθανότητα το X να είναι ίσο με 1 είναι ίδια με την πιθανότητα να έρθει κατά τη ρίψη κεφαλή (K) δηλαδή P(K)

Ανάλογα η πιθανότητα το X=0 είναι ίδια με P(Γ)

Δηλαδή

Δ.Χ.	Κ	Γ
X=	1	0
P	1/2	½

Ας θεωρήσουμε τώρα την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

και πάνω σ' αυτήν τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής.

Ας φανταστούμε την ευθεία αυτή σαν μία ράβδο χωρίς βάρος η οποία μπορεί να ισορροπήσει ή όχι στηριζόμενη σ' ένα σημείο της σαν να είναι ζυγαριά.

Παράδειγμα

Τοποθετούμε στο τασάκι της ζυγαριάς θέσης 0 βάρος όσο η $P_\chi(0)$, δηλαδή μισό κιλό και στο τασάκι της θέσης 1 βάρος όσο η $P_\chi(1)$, δηλαδή μισό κιλό. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ζυγαριά ώστε να ισορροπήσει;

Απάντηση

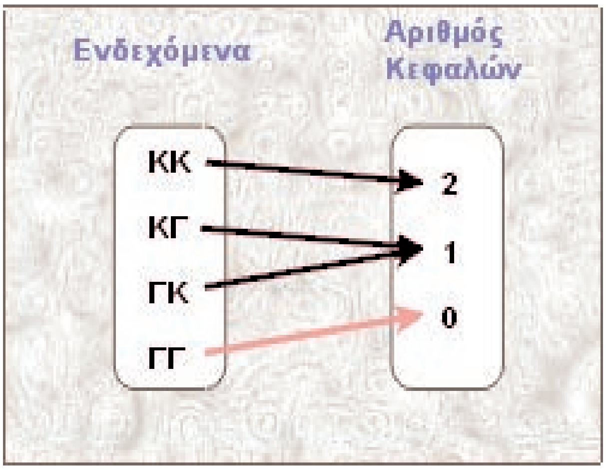
Η ζυγαριά θα ισορροπήσει στο μέσο του διαστήματος από το 0 έως το 1.

Παράδειγμα

Ας αναζητήσουμε τώρα το σημείο ισορροπίας στην περίπτωση που ρίχνουμε το κέρμα 2 φορές. Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τα ενδεχόμενα ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ. Παριστάνουμε πάλι με Χ τον αριθμό των κεφαλών.

Οι αντίστοιχες πιθανότητες όπως θυμόμαστε είναι:

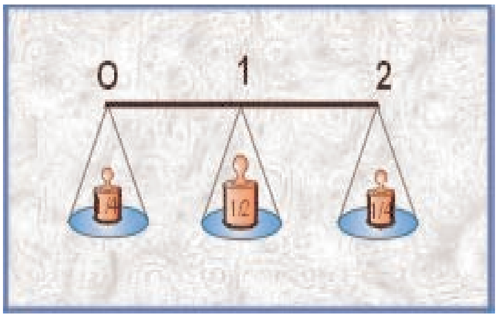
Δ.Χ.	*ΚΚ*	*ΚΓ, ΓΚ*	*ΓΓ*
Χ=χ	*2*	*1*	*0*
P[X=χ]	*1/4*	*1/2*	*1/4*



Στη θέση 0, στη θέση 1 και στη θέση 2 τοποθετούμε βάρη ανάλογα με τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στους αριθμούς αυτούς σύμφωνα με τον πίνακα. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ζυγαριά ώστε να ισορροπεί; Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας;

Απάντηση

Η ζυγαριά πρέπει να στηριχθεί στο σημείο που αντιστοιχεί ο αριθμός 1.



5.3 Υπολογισμός της Μαθηματικής Ελπίδας.

Παράδειγμα

Έστω Ω={1,2,3,4,5,6} ο δειγματικός χώρος της ανάρριψης ενός ζαριού.

Ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
X=	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
P[X=]	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*

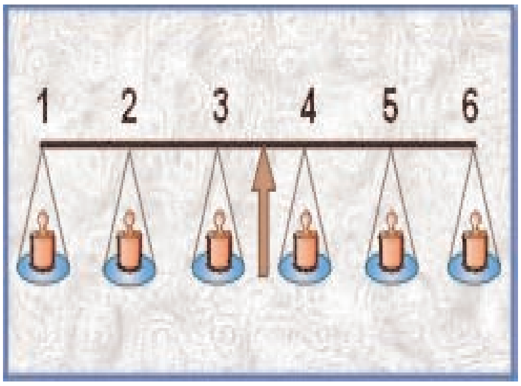
Αν σε κάθε θέση της τυχαίας μεταβλητής, όπως στο παραπάνω παράδειγμα, κρεμάσουμε ένα βάρος ανάλογο με την αντίστοιχη πιθανότητα, δηλαδή 1/6 του κιλού. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχθεί η ράβδος ώστε να ισορροπεί;

Απάντηση

Η ράβδος πρέπει να στηριχθεί στο μέσο της για να ισορροπεί.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Την αναπαράσταση αυτή όπως και του παραδείγματος 3 θα την λέμε ***βαρόγραμμα***



Παράδειγμα

Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας; Ποια νομίζετε ότι είναι η σχέση του με το άθροισμα

$$1 \bullet \frac{1}{6} + 2 \bullet \frac{1}{6} + 3 \bullet \frac{1}{6} + 4 \bullet \frac{1}{6} + 5 \bullet \frac{1}{6} + 6 \bullet \frac{1}{6}$$

Απάντηση

Στο σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί ο αριθμός 3,5 και είναι ίσος με το εν λόγω άθροισμα.

Το άθροισμα αυτό λέγεται ***Μαθηματική Ελπίδα*** *για το συγκεκριμένο πείραμα και υπολογίζεται αναλυτικά όπως με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα.*

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
P	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*
*x*P*	*1*1/6*	*2*1/6*	*3*1/6*	*4*1/6*	*5*1/6*	*6*1/6*

Η Μαθηματική ελπίδα είναι:

$$1 \bullet \frac{1}{6} + 2 \bullet \frac{1}{6} + 3 \bullet \frac{1}{6} + 4 \bullet \frac{1}{6} + 5 \bullet \frac{1}{6} + 6 \bullet \frac{1}{6} = 3{,}5$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γενικά σε ένα πείραμα τύχης που οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής είναι x_1, x_2, …. x_k *με αντίστοιχες πιθανότητες* $p_1, p_2, \dots, p_i$

x	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_k

P	P_1	p_2	p_3	P_4	…	p_i
	$x_1 *p_1$	$x_2 *p_2$	$x_3 *p_3$	$x_4 *p_4$	…	$x_k *p_i$

Η Μαθηματική ελπίδα είναι:

$M.E.= x_1 p_1*+ x_2 *p_2+ x_3 *p_3+\ldots+ x_k *p_i$

Παράδειγμα

Σε ένα καφενείο παίζεται ένα παιχνίδι με ζάρια ως εξής: Ο καφετζής πληρώνει στον παίχτη τόσα χιλιάρικα όσα η ένδειξη του ζαριού που ρίχνει ο παίχτης. Ένας παίχτης πληρώνει 4 χιλιάρικα για να μπει στο παιχνίδι και να ρίξει το ζάρι μια φορά. Αν έχει το δικαίωμα να ρίξει το ζάρι πολλές φορές, έχει ελπίδες να βγει κερδισμένος;

Απάντηση

Όχι. Διότι έχουμε ήδη υπολογίσει ότι το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη είναι 3,5 χιλιάρικα ανά παιγνίδι. (η Μαθηματική Ελπίδα)

Παράδειγμα

Αν ο παίχτης του προηγούμενου παραδείγματος για να μπει στο παιχνίδι πληρώνει 3 χιλιάρικα, τι νομίζετε θα βγει κερδισμένος, θα βγει χαμένος ή ούτε θα κερδίσει ούτε θα χάσει; Ή με πόσα χρήματα νομίζετε ότι πρέπει να μπει στο παιχνίδι ώστε να έχει βάσιμες ελπίδες ότι φεύγοντας θα έχει μαζί του τόσα χρήματα όσα όταν μπήκε στο καφενείο;

Απάντηση

Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται ότι θα βγει κερδισμένος και μάλιστα κατά 500 δραχμές. Και για να έχει βάσιμες ελπίδες ότι φεύγοντας θα έχει μαζί του τόσα χρήματα όσα όταν μπήκε στο καφενείο πρέπει να μπει στο παιχνίδι με 3.500 δραχμές.

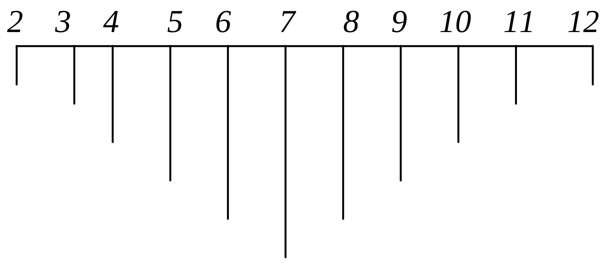
Παράδειγμα

Ρίχνουμε 2 ζάρια μαζί και καταγράφουμε το άθροισμα τους. Η τυχαία μεταβλητή χ είναι το άθροισμα των 2 ενδείξεων. Συμπληρώστε τον πίνακα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Σχεδιάστε την αναπαράσταση με τα βάρη, δηλαδή το βαρόγραμμα. Τοποθετείστε το σημείο ισορροπίας. Αν περιστρέψουμε το βαρόγραμμα κατά 180° γύρω από τον άξονα τι σας θυμίζει το διάγραμμα που προκύπτει;

Απάντηση

χ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$X*P$	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	42/36	40/36	36/36	30/36	22/36	12/36

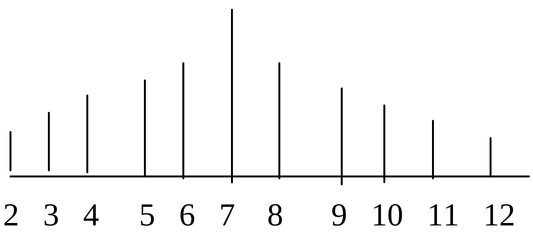
Το αποτέλεσμα της προηγούμενης δραστηριότητας είναι σε βαρόγραμμα.



Η τετμημένη του σημείου ισορροπίας συμπίπτει με την Μαθηματική Ελπίδα, δηλαδή

*2*1/36+3*2/36+4*3/36+5*4/36+6*5/36+7*6/36+8*5/36+9*4/36+10*3/36+11*2/36+ 12*1/36=7*

Αν περιστρέψουμε το βαρόγραμμα κατά 180° γύρω από τον άξονα μετασχηματίζεται σε ιστόγραμμα



Ασκηση 1

Κοιτάξτε προσεκτικά το παραπάνω ραβδόγραμμα. Ποιό από τα δυνατά αποτελέσματα αναμένεται να εμφανισθεί πιο συχνά;

α) Το 2 ή το 5;

β) Το 4 ή το 9;

γ) Το 7 ή το 10;

δ) Το 4 ή το 10;

Απάντηση

α) Είναι το 5

β) Είναι το ίδιο

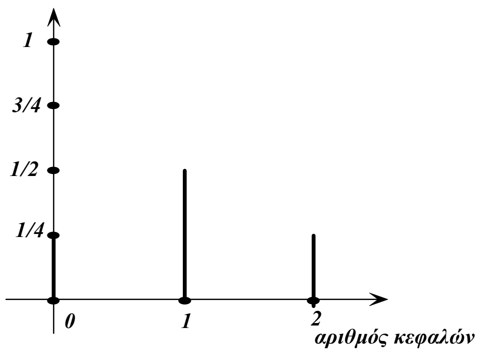
γ) Το 7

δ) Το ίδιο

Ασκηση 2

Στο πείραμα της ανάρριψης ενός κέρματος 2 φορές μας ενδιαφέρει η τυχαία μεταβλητή Χ που απαριθμεί τον αριθμό των καφαλών. Κατασκευάστε το ιστόγραμμα και υπολογίστε τη Μαθηματική Ελπίδα από τον σχετικό τύπο.

Απάντηση



Δ.Χ.	ΚΚ	ΚΓ, ΓΚ	ΓΓ
Χ=x	2	1	0
P[X=x]	1/4	1/2	1/4

Έτσι έχουμε:

$$E(X)=2*1/4+1*1/2+0*1/4=1$$

5.4 *Διασπορά*

Παράδειγμα

Παρατηρήστε τα 2 ιστογράμματα για τα αντίστοιχα πειράματα τύχης που προαναφέραμε. Είναι ενδιαφέρον να ξέρουμε σε ένα πείραμα τύχης πόσο διεσπαρμένες είναι οι τιμές της μεταβλητής γύρω από την τιμή της Μαθηματικής Ελπίδας.

Απάντηση

Στην περίπτωση του κέρματος έχουμε λίγες τιμές κοντά στην τιμή της Μαθηματικής Ελπίδας, ενώ στο πείραμα των 2 ζαριών οι τιμές είναι πολύ περισσότερο διεσπαρμένες γύρω από τη Μαθηματική Ελπίδα

Ας δούμε πως μπορούμε να μετρήσουμε αυτή τη διασπορά.

Παράδειγμα

Ας επανέλθουμε στο πείραμα της ανάρριψης ενός κέρματος 2 φορές. Συμπληρώστε τον πίνακα όπως στο παράδειγμα 5.3.5. Βρείτε εν συνεχεία τη Μαθηματική Ελπίδα. Σχηματίστε τις διαφορές ΜΕ-x_i. Πάρτε τώρα τα τετράγωνα των διαφορών. Σχηματίστε το $(ME-x_i)^2 P_i$. Υπολογίστε το άθροισμα.

Απάντηση

Δ.Χ.	*0*	*1*	*2*	
P	*1/4*	*1/2*	*1/4*	
$x_i * P_i$	*0*1/4*	*1*1/2*	*2*1/4*	*1*
$ME-x_i$	*1-0*	*1-1*	*1-2*	

Τα τετράγωνα των διαφορών

$(ME-x_i)^2$	1^2	0^2	$(-1)^2$	
$(ME-x_i)^2 P_i$	$1 \bullet 1/4$	$0 \bullet 1/2$	$1 \bullet 1/4$	*1/2*

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Ο αριθμός ½ καλείται **διασπορά** και εκφράζει πόσο αποκλίνουν οι τιμές της μεταβλητής γύρω από την ΜΕ*

Συμπέρασμα

Τα αριθμητικά μας λοιπόν αποτελέσματα είναι σύμφωνα με αυτό που διαισθητικά είχαμε παρατηρήσει από τα ιστογράμματα.

5.5 *Ασκήσεις.*

1. Να βρείτε τη διασπορά στο πείραμα της ανάρριψης 2 ζαριών.

2. Σ' ένα παιχνίδι ένας παίκτης ρίχνει ένα ζάρι. Ο παίκτης κερδίζει 20 δραχμ. άν έρθει 2, 40 δραχμ. εάν έρθει 4, χάνει 30 δραχμές εάν έρθει 6 και ούτε κερδίζει ούτε χάνει αν έρθει άλλος αριθμός. Πόσες δραχμές αναμένεται να κερδίσει σ'ένα παιχνίδι.

3. Σ' ένα λαχνό υπάρχουν 200 βραβεία (κέρδη) των 5 χιλιάδων δραχμών, 20 βραβεία των 25 χιλιάδων δραχμών και 5 βραβεία των 100 χιλιάδων δραχμών. Εάν πρόκειται να μοιραστούν 10000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;

4. Υπολογίστε τη διασπορά στα υπόλοιπα παραδείγματα του κεφαλαίου.

5. Τα σωματικά βάρη 5 ανθρώπων είναι 75, 59 , 90 , 68 , 80 κιλά. Να βρείτε τη διασπορά.

6. Ένας μετερεωλόγος μετράει κάθε 3 ώρες τη θερμοκρασία σε μία περιοχή. Οι μετρήσεις σε βαθμούς Κελσίου είναι:

-3 -1 -2 0 4 3 1 2

Να υπολογίσετε τη διασπορά των παραπάνω μετρήσεων.

7. Εάν $P[X=1]=\rho$ και $P[X=0]=\alpha$,

Ν' αποδειχθεί ότι η Μαθηματική Ελπίδα ισούται με ρ.

6 Έκτη Ενότητα

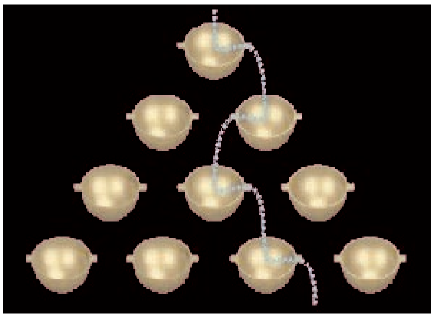
6.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα γίνει σύνδεση της έννοιας της πιθανότητας με έννοιες και μεθόδους που διδάσκονται οι μαθητές στην Άλγεβρα και στην Αριθμητική, όπως και το τρίγωνο του Pascal. Θα γίνει μελέτη δυωνυμικών πειραμάτων με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης και εξερεύνηση της δυωνυμικής κατανομής.

6.2 Δυωνυμικά πειράματα

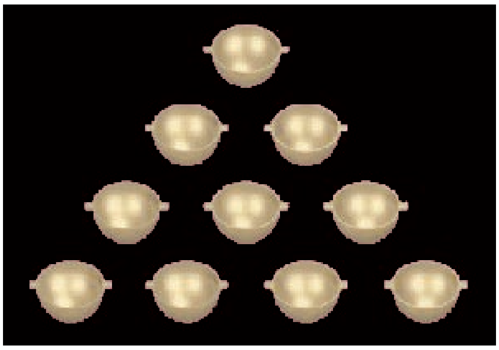
Μελέτη δυωνυμικών πειραμάτων με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης

Παράδειγμα



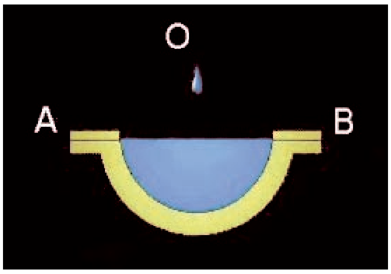
Θεωρούμε μια Ρωμαϊκή κρήνη με 4 σειρές κούπες. Παρατηρώντας την ξανά ας παρακολουθήσουμε τη διαδρομή ενός μορίου νερού ξεκινώντας από το σημείο Ο και φτάνοντας μέχρι την 4η σειρά.

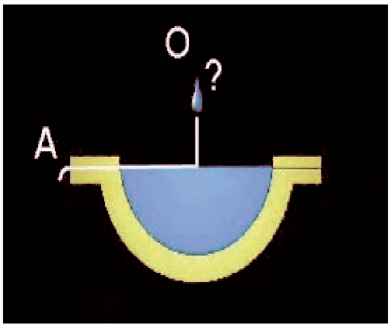
Σχεδιάστε μια οποιαδήποτε δική σας διαδρομή

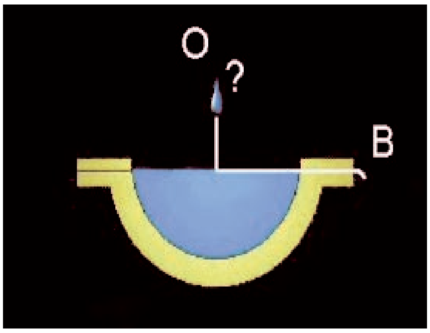


Το τυχαίο πείραμα της ρωμαϊκής κρήνης είναι ένα πολύ θεαματικό μοντέλο μάζας για <u>πειράματα με 2 δυνατά αποτελέσματα, τα οποία ονομάζονται Δυωνυμικά Πειράματα</u>

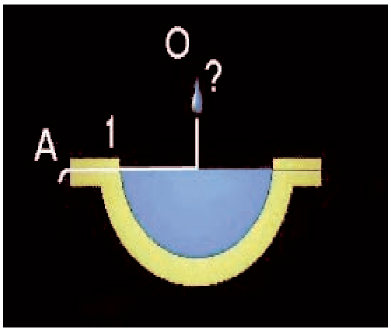
Ας δούμε όμως σταδιακά τη διαδρομή του μορίου

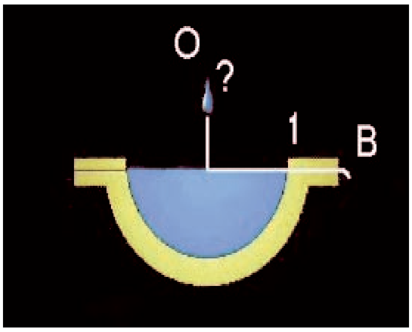




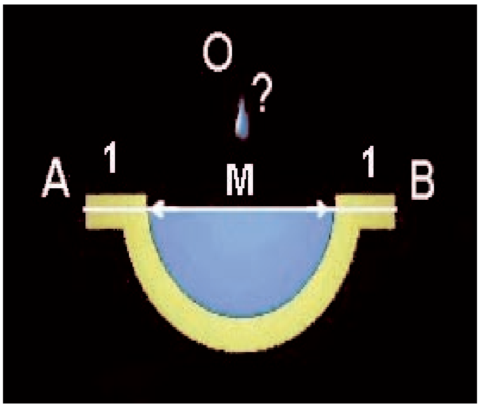


Απομονώνουμε μια κούπα από τη Ρωμαϊκή κρήνη και μια σταγόνα που θα μπορούσε να αναρωτιέται προς τα πού να πάει, προς το Α ή προς το Β; Δηλαδή υπάρχουν 2 ακριβώς ισοπίθανες διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το μόριο του νερού: τη διαδρομή ΟΜΑ ή τη διαδρομή ΟΜΒ.





Άρα το πείραμα τύχης της διαδρομής κάθε μορίου νερού είναι ένα τυχαίο πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Το πείραμα αυτό είναι αντίστοιχο με το στρίψιμο ενός νομίσματος που και αυτό είναι ένα Δυωνυμικό πείραμα.

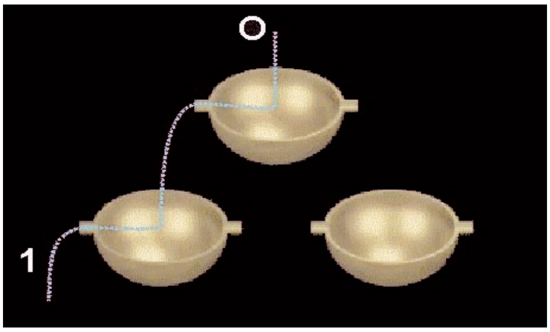


Ορισμός:

Δυωνυμικά πειράματα *είναι τα πειράματα με δύο δυνατά αποτελέσματα.*

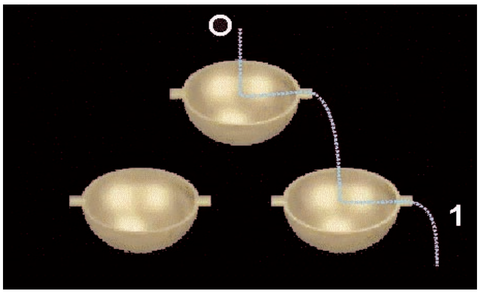
Ας προχωρήσουμε τώρα και στη δεύτερη σειρά με τις κούπες. Μπορούμε να παρατηρήσουμε 4 διαφορετικές ενός μορίου νερού για να φτάσει από το Ο σε εκροή από τις κούπες της $2^{ης}$ *σειράς.*

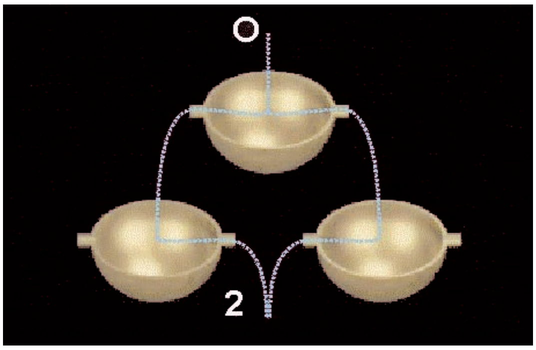
Μια διαδρομή μέχρι το σημείο που είναι ο αριθμός 1.

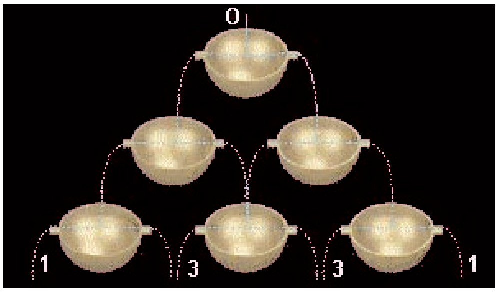


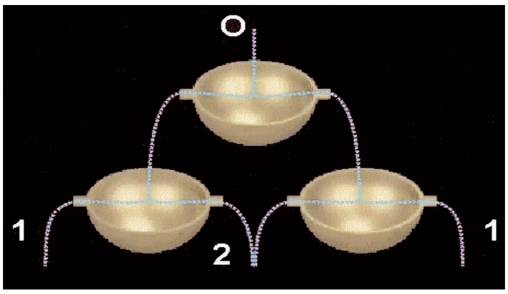
Άλλες 2 διαδρομές για το σημείο ανάμεσα στις 2 κούπες

Και η 4η διαδρομή μέχρι το σημείο που είναι ο αριθμός 1









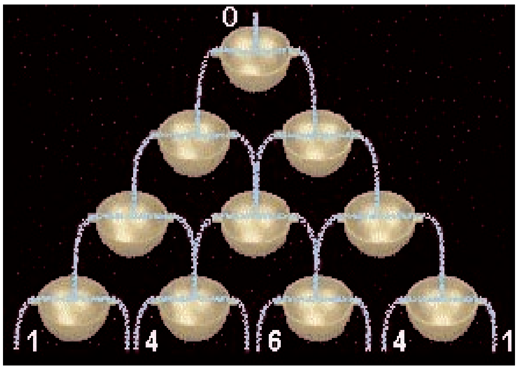
Δηλαδή οι 4 διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το μόριο είναι αυτές που αναλυτικά φαίνονται στο σχήμα.

Αν προσθέσουμε άλλη μια σειρά κούπες παρατηρούμε ότι οι διαφορετικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένα μόριο νερού για να φτάσει στις εκροές της 3ης σειράς είναι 8. Αναλυτικά είναι όπως φαίνονται στο σχήμα

Δηλαδή οι πιθανές διαδρομές ενός μορίου νερού είναι 1+3+3+1=8.

Με την ίδια λογική συμπληρώνονται οι αριθμοί που φαίνονται στην 4η σειρά και που δείχνουν τον αριθμό των διαφορετικών διαδρομών που αντιστοιχούν σε κάθε θέση στην εκροή της 4ης σειράς.

Ρωμαϊκή κρήνη με 4 σειρές



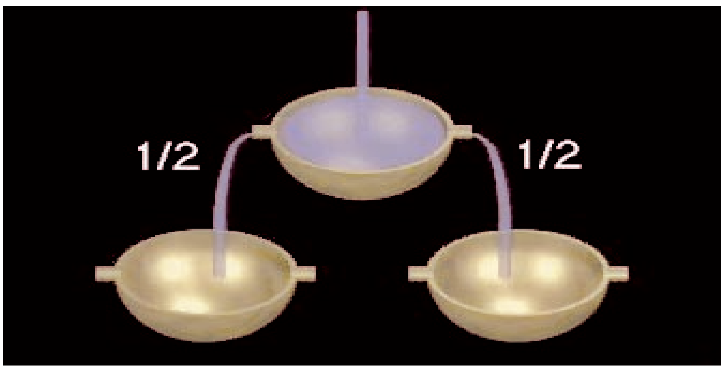
Δηλαδή οι πιθανές διαδρομές ενός μορίου είναι 16 (1+4+6+4+1=16)

Συμπέρασμα

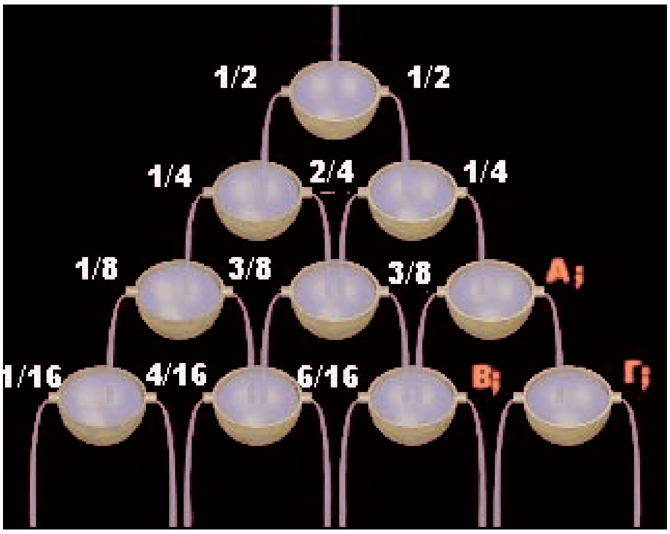
Η ρωμαϊκή κρήνη είναι ένα φυσικό μοντέλο μάζας που στην ουσία περιγράφει ένα πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα. Λόγω της συμμετρίας που έχουν οι κούπες, μισή μάζα μορίων εκρέει από τη μία μεριά και μισή από την άλλη. Επειδή υπάρχει άπειρος αριθμός μορίων είναι σαν να επαναλαμβάνουμε το τυχαίο πείραμα άπειρες φορές. Έτσι η μάζα του νερού που μοιράζεται μας δίνει την πιθανότητα ενός συγκεκριμένου μορίου να βγει από τη μία ή την άλλη εκροή.

Παράδειγμα

Ας ξαναγυρίσουμε στη Ρωμαϊκή κρήνη με 3 κούπες όπου <u>η αρχική μάζα του νερού που ισούται με 1 μοιράζεται σε ½ και ½</u> έτσι ώστε 1/2+1/2 =1



Με τον ίδιο τρόπο ερμηνεύονται και <u>οι πιθανότητες</u> για τις υπόλοιπες σειρές, όπως φαίνεται στη Ρωμαϊκή κρήνη που ακολουθεί.



Ομοίως στην 3η σειρά κ.λ.π.

Ασκηση

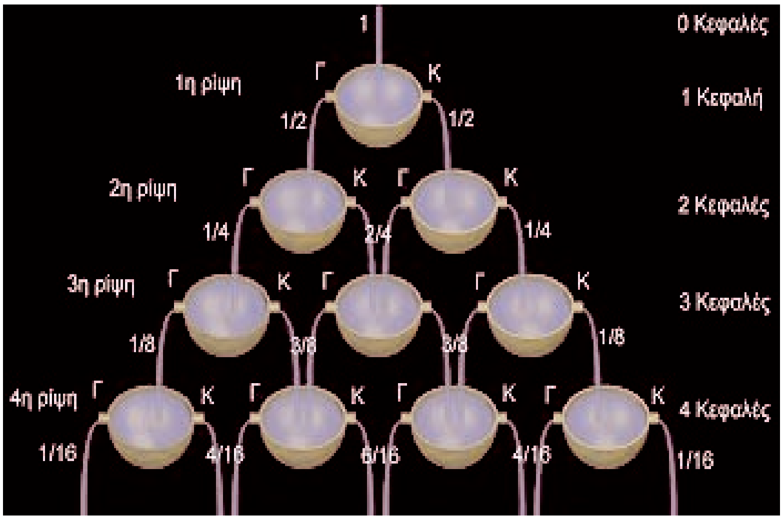
Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά; Α= ; Β= ; Γ= ;

Απάντηση

Α=1/8, Β=4/16, Γ=1/16

6.3 Τρίγωνο του Pascal

Η Ρωμαϊκή κρήνη μπορεί να χρησιμεύσει σαν μοντέλο για τη μελέτη και άλλων δυωνυμικών πειραμάτων. Έτσι λοιπόν αν σε μία κούπα ονομάσουμε τη δεξιά εκροή Κ (κεφαλή) και την αριστερή Γ (γράμμα), φαίνεται ότι το πείραμα τύχης κάθε μορίου νερού αντιστοιχεί στο στρίψιμο ενός νομίσματος.



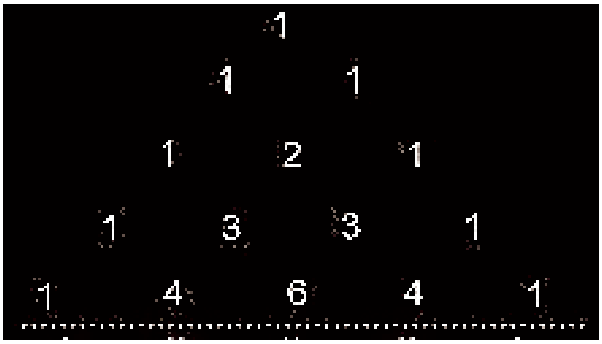
Ας δούμε πως υπολογίζουμε την πιθανότητα να έχουμε 1 επιτυχία (Κεφαλή) σε 2 ρίψεις. Οι διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένα συγκεκριμένο μόριο νερού από το σημείο Γ της 1ης κούπας μέχρι τις κούπες της 2ης σειράς είναι 4: 1η από το Γ στο Γ, 2η από το Γ στο Κ, 3η από το Κ στο Γ και 4η από το Κ στο Κ. Από αυτές τις διαδρομές 2 είναι που περνάνε από το ζητούμενο σημείο Γ → Κ και Κ → Γ. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα, που είναι ίση με τις 2 μάζες νερού που αντιστοιχούν στις 2 αυτές διαδρομές, είναι 2/4.

Παρατηρώντας τη ρωμαϊκή κρήνη με τις πιθανότητες βλέπουμε ότι:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \quad \frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1, \quad \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$$

Από τους αριθμητές των κλασμάτων που παριστάνουν πιθανότητες οδηγούμαστε σε ένα τρίγωνο γνωστό σαν τρίγωνο του Pascal *που έχει πολλές εφαρμογές στις πιθανότητες και αλλού.*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=1 \qquad \frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+2+1}{4}=1 \qquad \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1+3+3+1}{8}=1$$



Τρίγωνο του Pascal

Ασκηση

Αν ρίξουμε ένα νόμισμα 4 φορές,ποά είναι τα δυνατά αποτελέσματα και με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να έρθουν ακριβώς 2 κεφαλές;

Απάντηση

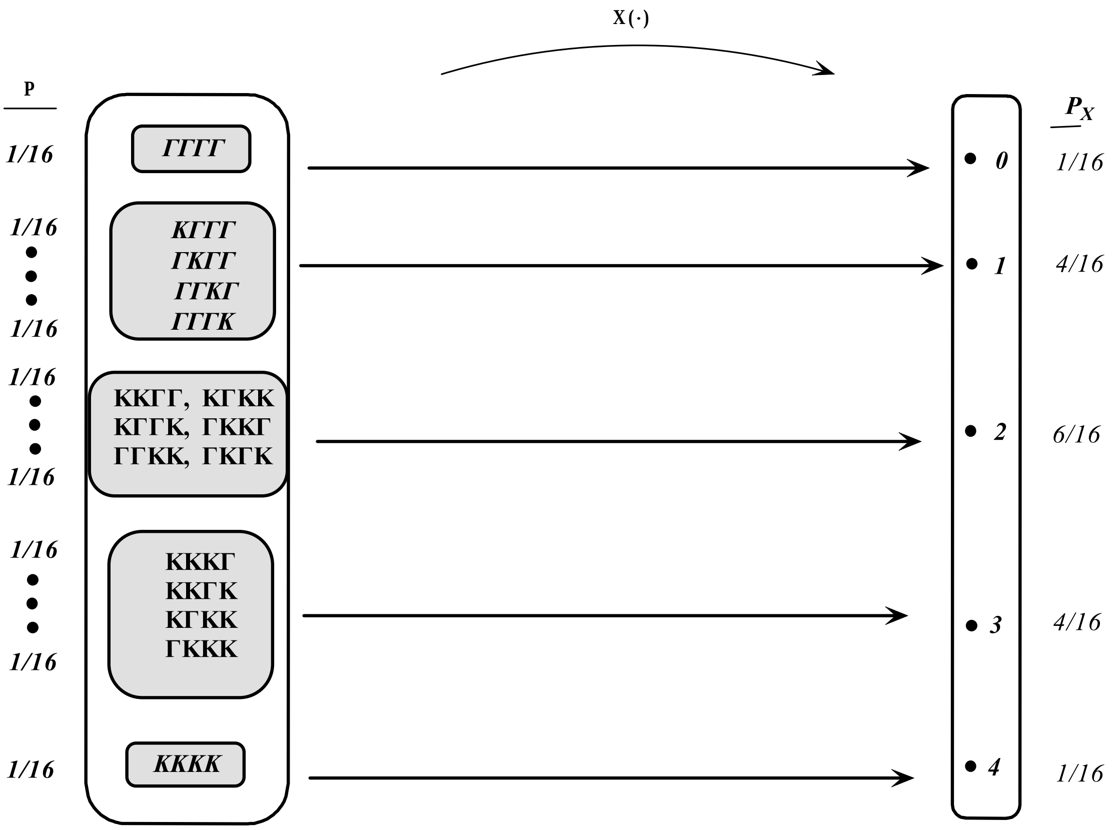
Ας λύσουμε αυτό το πρόβλημα με 2 διαφορετικούς τρόπους. Στην $1^{η}$ λύση θα φτιάξουμε έναν πίνακα με τα ενδεχόμενα και στη $2^{η}$ λύση θα χρησιμοποιήσουμε το τρίγωνο του Pascal.

0 κεφαλές	*1 κεφαλή*	*2 κεφαλές*	*3 κεφαλές*	*4 κεφαλές*
ΓΓΓΓ	*ΓΓΓΚ*	*ΓΓΚΚ*	*ΚΚΚΓ*	*ΚΚΚΚ*
	ΓΓΚΓ	*ΓΚΓΚ*	*ΚΚΓΚ*	
	ΓΚΓΓ	*ΓΚΚΓ*	*ΚΓΚΚ*	
	ΚΓΓΓ	*ΚΓΓΚ*	*ΓΚΚΚ*	
		ΚΓΚΓ		
		ΚΚΓΓ		
1 ενδεχόμενο	*4 ενδεχόμενα*	*6 ενδεχόμενα*	*4 ενδεχόμενα*	*1 ενδεχόμενο*

Από τα 16 ενδεχόμενα μόνο τα 6 έχουν 2 κεφαλές. Τα νούμερα 1,4,6,4,1 είναι όπως ακριβώς εμφανίζονται στο τρίγωνο του Pascal στην αντίστοιχη γραμμή.

6.4 Κατανομή πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής σε Δυωνυμικά πειράματα

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή χ που στέλνει τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός νομίσματος 4 φορές στον αριθμό που δείχνει τις κεφαλές που ήρθαν. Έτσι λοιπόν στο ενδεχόμενο ΓΓΓΓ αντιστοιχεί η τιμή 0, ενώ στο ΓΚΚΓ η τιμή 2 κ.λ.π.



Όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ΓΓΓΓ, ...,ΚΚΚΚ έχουν ίση πιθανότητα ίση με 1/16. Έτσι π.χ. $P_X[X=1]=4/16$, $P_X[X=2]=6/16$ *κλ.π.*

Ορισμός

Σε πειράματα τύχης όπως η ρίψη ενός νομίσματος που:

1) *Κάθε ρίψη έχει 2 δυνατά αποτελέσματα "Κ" ή "Γ",*
2) *Για κάθε ρίψη P(K) =1-P(Γ) και*
3) *Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες*

Η κατανομή πιθανότητας της Χ, P_X *λέγεται* ***δυωνυμική κατανομή***.

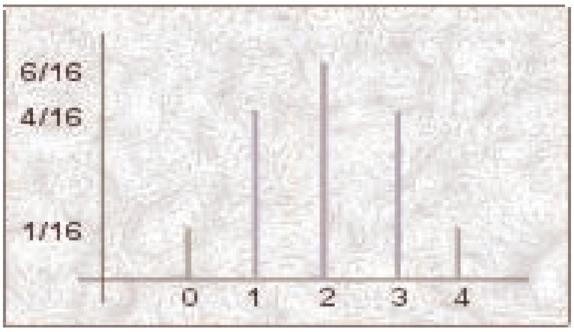
<u>Περιγραφή της κατανομής της πιθανότητας του πειράματος:</u>

α) με έναν πίνακα

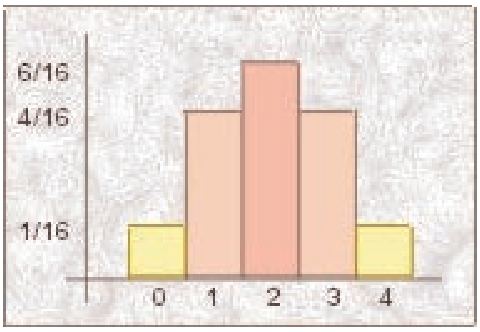
Τιμές τυχ. μεταβλητής	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής	*1/16*	*4/16*	*6/16*	*4/16*	*1/16*

Επίσης μπορούμε να περιγράψουμε την κατανομή της πιθανότητας του πειράματος της ρίψης ενός νομίσματος 4 φορές που είναι μια δυωνυμική κατανομή και με ένα ραβδόγραμμα ή με ένα ιστόγραμμα:

β) Ραβδόγραμμα

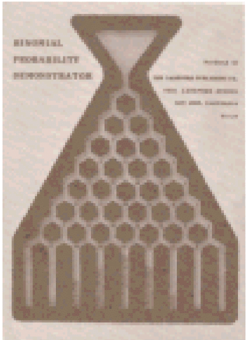


γ) Ιστόγραμμα



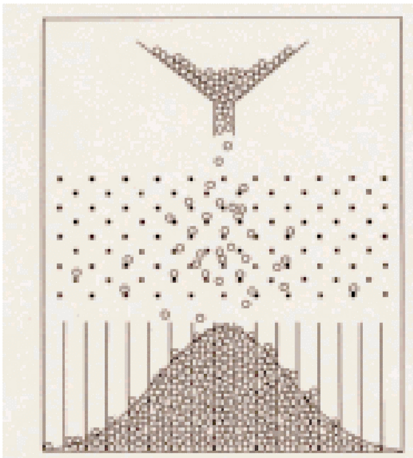
6.5 Πειράματα Δυωνυμικής Κατανομής

Ας παρακολουθήσουμε δύο πειράματα για την επίδειξη της Δυωνυμικής κατανομής



Μηχανή επίδειξης Δυωνυμικής κατανομής

Στην πρώτη μηχανή έχουν ριχτεί 256 σφαίρες. Η πιθανότητα κάθε σφαίρας να πάει δεξιά ή αριστερά είναι ½



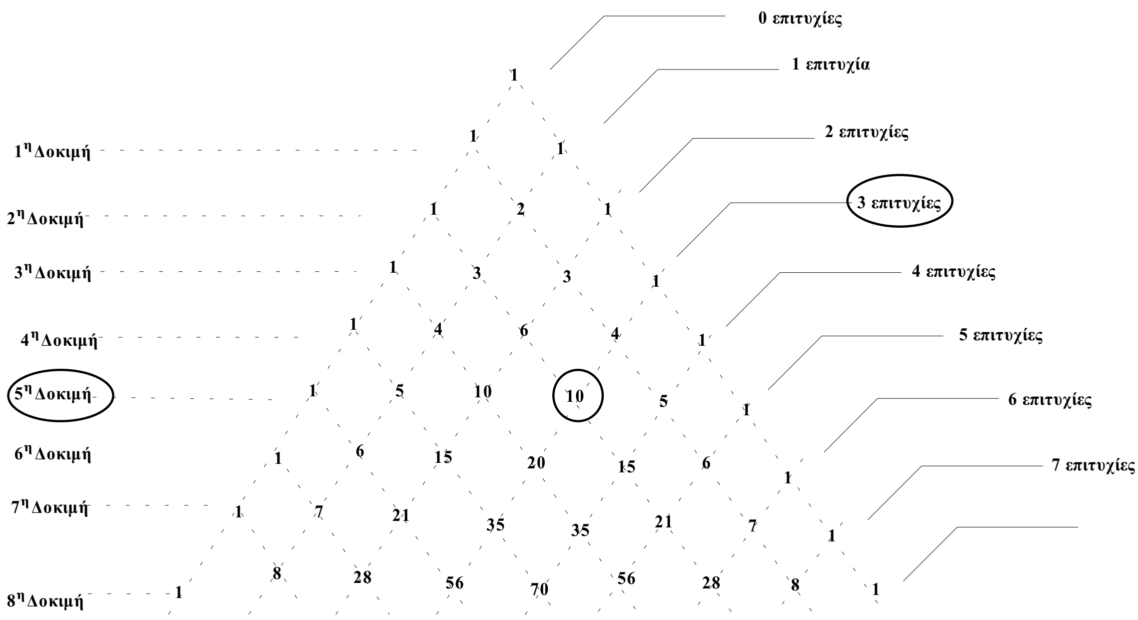
Πίνακας του Galton

Στον πίνακα που παρακολουθούμε οι μπίλιες είναι πολλές και τα διαμερίσματα στενά έτσι που οι μπίλιες να δημιουργούν περίπου μια καμπύλη που λέγεται κανονική κατανομή

6.6 Εφαρμογές του τριγώνου του Pascal

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 1 φορά, 2 φορές, 3 φορές….. και καταγράφουμε τον αριθμό των κεφαλών που είναι δυνατόν να εμφανιστούν στο σύνολο των ρίψεων, ενώ συγχρόνως βλέπουμε πως μπορούμε να βρούμε τις ίδιες τιμές από το τρίγωνο του Pascal.



Για παράδειγμα στην παρίπτωση που στρίβουμε ένα νόμισμα έχουμε:

0 ρίψεις	*1*	*0 κεφαλές*
1 ρίψη	*1 1*	*1 κεφαλή*
2 ρίψεις	*1 2 1*	*2 κεφαλές*
3 ρίψεις	*1 3 3 1*	*3 κεφαλές*
4 ρίψεις	*1 — 4 — 6 — 4 — 1*	*4 κεφαλές*
5 ρίψεις	*1 5 10 10 5 1*	*5 κεφαλές*

Από τα 16 δυνατά αποτελέσματα, 6 θα έχουν ακριβώς 2 κεφαλές

Το άθροισμα 1+4+6+4+1=16 είναι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να πέσει ένα νόμισμα σε 4 ρίψεις.

Παρατηρώντας το σημείο που συναντιούνται οι δύο γραμμές – η μία με τις 4 ρίψεις και η άλλη με τις 2 κεφαλές – που είναι ο αριθμός 6, παίρνουμε την πληροφορία ότι από τα 16 πιθανά αποτελέσματα 6 θα έχουν ακριβώς 2 κεφαλές. Άρα η πιθανότητα να έχω 2 Κ σε 4 ρίψεις είναι 6/16.

Άσκηση 1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές και ζητάμε να υπολογίσετε την πιθανότητα στις 5 ρίψεις του νομίσματος να έλθουν ακριβώς 2 κεφαλές.

<u>Υπόδειξη</u>

Αν αθροίσω τους αριθμούς στην σειρά της 5ης ρίψης παίρνω το άθροισμα 32. Άρα οι 5 ρίψεις μπορούν να σχηματίσουν 32 διαφορετικά ενδεχόμενα.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(5K)=;

Απάντηση

P(5K)=10/32=5/16

Ασκηση 2

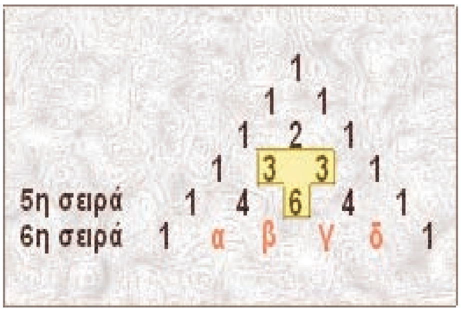
Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal να υπολογίσετε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν 3 Κεφαλές για 4 ρίψεις ενός νομίσματος, άρα και ποια η πιθανότητα να έρθουν 3Κ σε 4 ρίψεις;

Απάντηση

Η απάντηση στο 1ο είναι 4 και στο 2ο είναι 4/16.

Τρόπος δημιουργίας του τριγώνου του Pascal

Το τρίγωνο του Pascal εκτός από τις πιθανότητες έχει και πολλές άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Ας δούμε όμως πρώτα και έναν άλλο τρόπο να δημιουργούμε αυτό το τρίγωνο εκτός από τη ρωμαϊκή κρήνη



Όπως βλέπουμε στην οθόνη η 5η σειρά δημιουργείται από την 4η αθροίζοντας τους όρους της 4ης σειράς ανά 2.

Ασκηση 3

Να συμπληρωθούν τα κενά στην 6η σειρά: α=; β=; γ=; δ=;

Απάντηση

α=5, β=10, γ=10, δ=5

Παρατήρηση

Σχηματίζουμε το τρίγωνο του Pascal

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Το τρίγωνο του Pascal έχει άμεση σχέση με τα αναπτύγματα των δυνάμεων $(\alpha+\beta)^0$, $(\alpha+\beta)^1$, $(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha+\beta)^3$, *κ.λ.π.*

Παρατηρώντας τους συντελεστές και τα αναπτύγματα βλέπουμε ότι σχηματίζουν το τρίγωνο του Pascal.

$(\alpha+\beta)^0 =$ 1

$(\alpha+\beta)^1 =$ $1\alpha+1\beta$

$(\alpha+\beta)^2 =$ $1a^2+2\alpha\beta+1\beta^2$

$(\alpha+\beta)^3 =$ $1a^3+3a^2\beta+3\alpha\beta^2+1\beta^3$

Βλέπουμε ότι το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^2$ *έχει συντελεστές 1,2,1, δηλαδή τους αριθμούς της* $3^{ης}$ *γραμμής. Το ανάπτυγμα του* $(\alpha+\beta)^3$ *έχει συντελεστές 1,3,3,1, δηλαδή τους αριθμούς της* $4^{ης}$ *γραμμής.*

Ασκηση 4

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για το ανάπτυγμα οποιασδήποτε δύναμης του (α+β). Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^4$.

$(\alpha+\beta)^0 =$ 1 $(\alpha+\beta)^1 =$ $1\alpha+1\beta$ $(\alpha+\beta)^2 =$ $1a^2+2\alpha\beta+1\beta^2$	$(\alpha+\beta)^4 = 1\alpha^4+\chi\alpha^3\beta+\psi\alpha^2\beta^2+\zeta\alpha\beta^3+1\beta^4$ χ=; ψ=;

$(\alpha+\beta)^3 = 1a^3 + 3a^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3$	ζ=;

Απάντηση

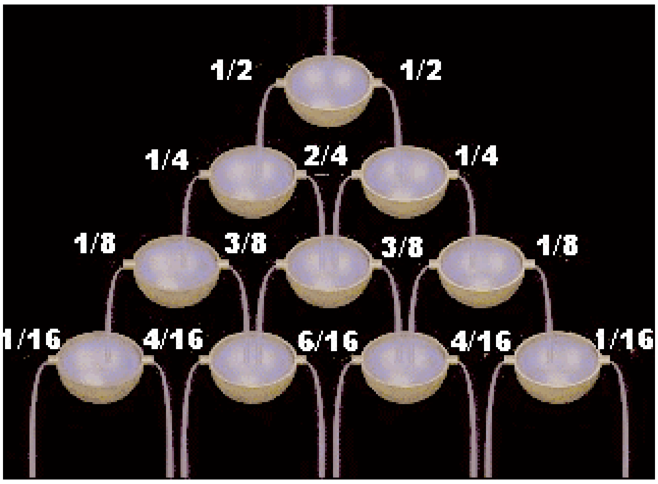
Χ=4

Ψ=6

Ζ=4

Ασκηση 5

Αν υποθέσουμε ότι τα 2 φύλα έχουν την ίδια πιθανότητα κατά τη γέννηση ενός παιδιού να υπολογιστούν οι πιθανότητες να γεννηθούν 0 αγόρια, 1 αγόρι, 2 αγόρια και 3 αγόρια σε οικογένεια που έχει 4 παιδιά.



Η πιθανότητα P(0) σε μια οικογένεια με 4 παιδιά βρίσκεται με τη βοήθεια της Ρωμαϊκής κρήνης:

0 αγόρια P(0)=1/16

1 αγόρι P(1)=4/16

2 αγόρια P(2)=6/16

3 αγόρια P(3)=4/16

4 αγόρια P(4)=1/16

Ασκηση 6

Χρησιμοποιώντας τη Ρωμαϊκή κρήνη να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει μια τριμελής οικογένεια

1^o : 1 αγόρι P(1)=;

2^o: 3 αγόρια P(3)=;

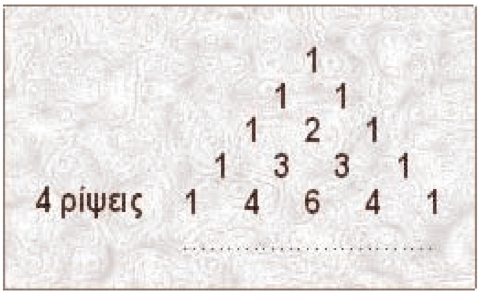
Απάντηση

P(1)=3/8

P(2)=1/8

Ασκηση 7

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν ακριβώς 4 Κεφαλές για 4 ρίψεις ενός νομίσματος; Για την επίλυση της άσκησης να χρησιμοποιήσετε το τρίγωνο του Pascal.



Απάντηση

Οι τρόποι είναι 4.

Ασκηση 8

Χρησιμοποιώντας την $3^η$ σειρά από κούπες της ρωμαϊκής κρήνης να υπολογίσετε μετά από 3 αναρρίψεις ενός νομίσματος τις πιθανότητες P(0), P(1), P(2), P(3)

P(0)=;

P(1)=;

P(2)=;

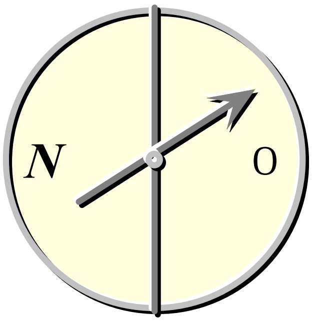
P(3)=;

Απάντηση

P(0)=1/8,   P(1)=3/8,   P(2)=3/8,   P(3)=1/8

Ασκηση 9

Ας θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε τον τροχό του **ναι -όχι** 5 φορές. Η $5^η$ σειρά από τις κούπες της ρωμαϊκής κρήνης ή η $5^η$ σειρά από το τρίγωνο του Pascal δίνουν ως δυνατά 32 διαφορετικά αποτελέσματα:



Βρείτε την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο

1. 2 φορές ναι   P(2)=;

2. 4 φορές ναι   P(4)=;

3. 5 φορές ναι   P(5)=;

<u>Υπόδειξη:</u>

$5^η$ σειρά 5 περιστροφές 1/32, 5/32, 10/32, 10/32, 5/32, 1/32

Απάντηση

P(2)=10/32,   P(4)=4/32,   P(5)=5/32

Ασκηση 10

Σε μια τράπουλα μισές κάρτες είναι κόκκινες και οι υπόλοιπες είναι μαύρες. Κόβουμε την τράπουλα 4 φορές και από το τρίγωνο του Pascal για την $4^η$ σειρά πληροφορούμαστε ότι υπάρχουν 16 πιθανά αποτελέσματα για τα 4 «κοψίματα». Να υπολογιστούν οι πιθανότητες P(0), P(2), P(3).

<u>Υπόδειξη</u>

Αν σχηματίσουμε το τρίγωνο του Pascal μέχρι την $5^η$ σειρά θα δούμε ότι η $5^η$ σειρά είναι: 1 5 10 10 5 1

Απάντηση

P(0)=1/16, P(2)=6/16, P(3)=4/16

6.7 Ιδιότητες του τριγώνου του Pascal

Ας δούμε μερικές από τις πολλές ιδιότητες του τριγώνου του Pascal. Το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή είναι ίσο με μια δύναμη του 2. Για την ακρίβεια το άθροισμα της νιοστής γραμμής είναι $2^{\nu-1}$

$1=2^0$

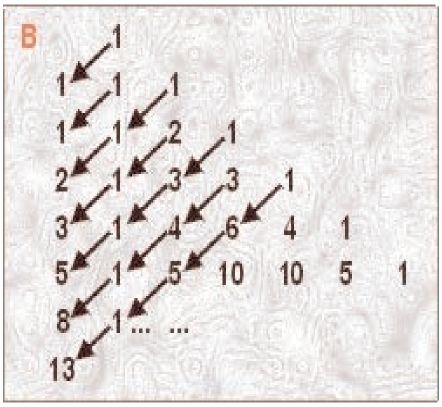
$1+1=2^1$

$1+2+1=2^2$

$1+3+3+1=2^3$

$1+4+6+4+1=2^4$

Η πρόσθεση των αριθμών του τριγώνου όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα δίνει την ακολουθία αριθμών 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,… γνωστή με το όνομα ακολουθία Fibonacci.



Η ακολουθία Fibonacci είναι: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55….

7 Έβδομη Ενότητα.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

7.1 Ιστορική Αναδρομή.

*Απλές μορφές Στατιστικής έχουν χρησιμοποιθεί από πολύ παλιά. Οι Βαβυλώνιοι το 3000 π.χ. χρησιμοποιούσαν μικρά πλακίδια για να καταγράψουν είτε αγροτικές παραγωγές, είτε εμπορικές συναλλαγές. Παρόμοιες καταγραφές αναβρίσκονται επίσης στην αρχαία Αίγυπτο, και στη Κίνα το 2000 π.χ. Οι αρχαίοι Έλληνες διεξήγαγαν απογραφές που χρησιμοποιούνταν για φορολογία από το 594 π.χ. Κατα την διάρκεια του μεσαίωνα γνωρίζουμε επίσης αρκετές απογραφές που έγιναν από διάφορα πρόσωπα. Το γεγονός όμως που έπαιξε βασικό ρόλο για την ανάπτυξη της στατιστικής, ήταν η καφαλαιοκρατική ανάπτυξη της Αγγλίας στον 18-19 αιώνα. Υπήρχε η πιεστική ανάγκη για την ασφάλιση των πλοίων που έφερναν μπαχαρικά και άλλα εμπορεύματα από τις Ινδίες. Για των υπολογισμό των ασφαλίστρων χρησιμοποιήθηκε βεβαίως και η πιθανοτητα και η Στατιστική. Από την άλλη μεριά άτομα όπως οι Φίσερ, Πήρσον, και άλλοι έπαιξαν κύριο ρόλο στην ανάπτυξη της Στατιστικής. Η ετημολογία της λέξης Στατιστική προέρχεται από την λατινική λέξη "*status*" που που εκφράζει κύρια την κρατική εξουσία. Η Στατιστική λοιπόν ήταν πάντοτε βοηθός του «κράτους».*

7.2 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επιδιώκεται μια συστηματική εισαγωγή του μαθητή σε βασικές έννοιες της Στατιστικής. Είναι από όλους παραδεκτό ότι η σημερινή κοινωνική πραγματικότητα απαιτεί οι αποτελεσματικοί πολίτες να μπορούν να ερμηνεύουν στατιστικά δεδομένα.

Πολλές φορές θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για μια μεγάλη ομάδα ατόμων ή αντικειμένων. Αντί να μελετήσουμε ολόκληρη την ομάδα, τον πληθυσμό όπως λέμε, που είναι δύσκολο ή αδύνατο και κυρίως αντιοικονομικό, μπορούμε να ξετάσουμε ένα μικρό αντιπροσωπευτικό μέρος του πληθυσμού δηλαδή ένα δείγμα. Επειδή το δείγμα έχει ληφθεί με αντιπροσωπευτικό τρόπο, τότε τα συμπεράσματα που εξάγουμε από το δείγμα, γενικεύονται για όλον τον πληθυσμό.

Η εισαγωγή και η μελέτη της βασικής ορολογίας γίνεται μέσω παραδειγμάτων για τη καλύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της Στατιστικής από μικρούς μαθητές.

7.3 Ταξινομώντας Δεδομένα .

Παράδειγμα

Μία Βιοτεχνία ενδιαφέρεται να κατασκευάσει 1000 ζευγάρια παπούτσια. Πόσα ζευγάρια όμως πρέπει να κατασκευάσει από κάθε νούμερο ώστε να πουληθούν όλα; Είναι φανερό ότι η διεύθυνση παραγωγής της βιοτεχνίας θα πρέπει να γνωρίζει το ποσοστό των ανθρώπων που φορούν ένα συγκεκριμένο νούμερο. Είναι όμως αδύνατο να εξετάσει όλον τον πληθυσμό για να μάθει το νούμερο τους. Επιλέγει λοιπόν τυχαία 50 άτομα και καταγράφει τα νούμερα των παπουτσιών τους. Επειδή τα άτομα επιλέχθηκαν με τυχαίο τρόπο, θεωρούμε ότι το δείγμα αυτό είναι αντιπροσωπευτικό και επομένως τα ποσοστά των ανθρώπων που φορούν τα διάφορα νούμερα, έχουν αντανακλασθεί μέσα στο δείγμα μας.

Να τα αποτελέσματα του δείγματος:

Αριθμός παπουτσών	*Αριθμός ανθρώπων*
37	*1*
40	*2*
41	*3*
39	*4*
	5

Ο τρόπος που παρουσιάζεται η πληροφορία στον παραπάνω πίνακα δεν ευνοεί την εξαγωγή συμπερασμάτων. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη τα δεδομένα στον πίνακα να παρουσιασθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε τα ποσοστά των ανθρώπων που φορούν κάποιο συγκεκριμένο νούμερο να είναι φανερά.

Νούμερο παπουτσιών	*Αριθμός ζευγών*
38	*2*
39	*4*
40	*10*
41	*15*
42	*9*
43	*6*
44	*4*

Έτσι συμπεραίνουμε:

2 στους 50 φορούν 38 νούμερο
4 στους 50 φορούν 39 νούμερο
10 στους 50 φορούν 40 νούμερο
15 στους 50 φορούν 41 νούμερο
9 στους 50 φορούν 42 νούμερο
6 στους 50 φορούν 43 νούμερο
4 στους 50 φορούν 44 νούμερο

Με την ίδια αναλογία λοιπόν, η βιοτεχνία μπορεί να παράγει τα υποδήματα της, έχοντας μεγάλες πιθανότητες, να μην μείνουν απούλητα.

Παράδειγμα

Μια άλλη βιοτεχνία παράγει στρατιωτικές στολές. Πρέπει λοιπόν να γνωρίζει πως κυμαίνεται το ύψος των στρατιωτών. Για το σκοπό αυτό απευθύνεται σε ένα κέντρο νεοσύλλεκτων και ζητά πληροφορίες. Ο αξιωματικός υπηρεσίας δίνει την κατάσταση των 100 πρώτων στρατιωτών.

Στρατιώτες	*Ύψος*
1ος	*1,65*
2ος	*1,67*

$3^{ος}$	…
$4^{ος}$	…
…..	…
….	…
….	

Επειδή η διεύθυνση παραγωγής δυσκολεύεται να βγάλει συμπεράσματα σας ζητά να ομαδοποιήσετε τον πίνακα ως εξής:

Πόσοι στρατιώτες είναι μεταξύ (1,55-1,60), (1,60-1,65), (1,65-1,70), (1,65-1,70), (1,70-1,75), (1,75-1,80), (1,85-1,90) και πόσοι εκτός αυτών των διαστημάτων;

Ύψος	Αριθμός στρατιωτών
1,55-1,60	5
1,60-1,65	15
1,65-1,70	15
1,70-1,75	20
1,75-1,80	25
1,80-1,85	15
1,85-1,90	5

ΟΡΙΣΜΟΣ

Από τα παραδείγματα που μέχρι τώρα είδαμε γίνεται φανερό ότι έχουμε τη δυνατότητα να εξετάζουμε και να μελετάμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό τους ή μια ιδιότητα τους, όπως το νούμερο των παπουτσιών τι ψηφίζει κάποιος, τι ύψος έχει, κ.λ.π.

Το χαρακτηριστικό αυτό ή η ιδιότητα αυτή είναι ***μια τυχαία μεταβλητή***

Τα δε δεδομένα είναι στην ουσία τιμές που παίρνει η Τυχαία μεταβλητή αυτή.

Ασκηση 1

Στα παραδείγματα που είδαμε πιο πάνω, ποιο από τα χαρακτηριστικά ή τις ιδιότητες είναι οι τυχαίες μεταβλητές; Συμπληρώστε το σωστό.

Ποιές από τις παρακάτω είναι τυχαίες μεταβλητές:

Το ύψος των στρατιωτών;

Ο αριθμός των στρατιωτών στο δείγμα;

Ο αριθμός των ζευγών;

Το νούμερο των παπουτσιών;

Απάντηση

α) Το ύψος των στρατιωτών ΝΑΙ.

β) Ο αριθμός των στρατιωτών στο δείγμα ΟΧΙ

γ) ΟΧΙ

δ) ΝΑΙ

7.4 *Διαγράμματα.*

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΜΜΑΤΑ- ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΚΥΚΛΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ - ΧΡΟΝΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Όπως είδαμε πιο πάνω ο τρόπος παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων έχει τεράστια σημασία, αφού η πληροφορία που αναδύεται μέσα από τα δεδομένα εξαρτάται από τον τρόπο που τα παρουσιάζουμε. Ο γραφικός τρόπος παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων είναι σπουδαίος, γιατί η σχετική πληροφορία συλλαμβάνεται εύκολα από το μάτι. Οι μέθοδοι παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων λέγεται και περιγραφική Στατιστική.

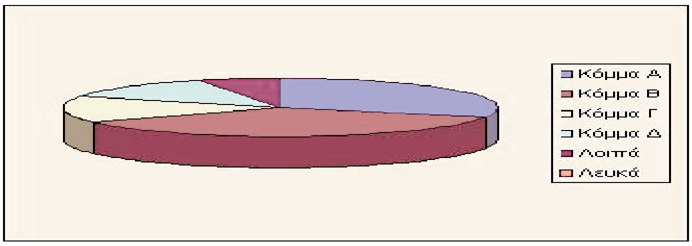
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις βασικές μεθόδους γραφικής παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι παρουσίασης των δεδομένων.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα: Κυκλικό Διάγραμμα

Στην περίπτωση των Εθνικών εκλογών στην Ελλάδα του 2000 είχαμε τα εξής αποτελέσματα:



Παράδειγμα: Εικονόγραμμα

Η κυκλοφορία των αυτοκινήτων από το 1992 μέχρι το 1995 ήταν:

Το 1992 κυκλοφόρησαν 150.000

Το 1993 κυκλοφόρησαν 80.000

Το 1994 κυκλοφόρησαν 90.000

Το 1995 κυκλοφόρησαν 100.000

Παράδειγμα: Χρονόγραμμα

Παρακολουθούμε, καταγράφουμε και αναπαριστούμε τις γεννήσεις στην πόλη του Αγρινίου από το 1900 έως το 1999

Ασκηση 1

α) Πώς μπορούμε να ονομάσουμε το παραπάνω διάγραμμα;

β) Ποια χρονολογία γεννήθηκαν τα λιγότερα παιδιά;

1920 1930 1940 1960 1980

γ) Ποια χρονολογία γεννήθηκαν τα περισσότερα;

1920 1960 1980 1999

δ) Πόσα παιδιά γεννήθηκαν το:

1930 1950 1980 1960 1900

ε) Γιατί νομίζετε ότι το 1940 είχαμε μεγάλη μείωση γεννήσεων;

Απάντηση

α) Το παραπάνω διάγραμμα το ονομάζουμε χρονόγραμμα.

β) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το 1940.

γ) Τα περισσότερα το 1999.

δ) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το 1930 γεννήθηκαν 640

1950	*50*
1951	*70*
1952	*80*
1953	*20*

ε) Διότι το 1940 γίνονταν πόλεμος και ο ανδρικός πληθυσμός έλειπε στο βουνό.

Ασκηση 2

Μια ομάδα μπάσκετ πέτυχε σ'ένα αγώνα 15 βολές που δίνουν από ένα πόντο, 30 δίποντα και 16 τρίποντα.

Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

Απάντηση

*15 μονόποντες. Στο κυκλικό διάγραμμα αναλογεί 15/123*360= 44*

*30*2=60. Στο κυκλικό διάγραμμα αναλογεί 60/123*360 =175*

*16*3=48 Στο κυκλικό διάγραμμα αναλογεί 48/123*360 = 141*

Άρα το κυκλικό διάγραμμα είναι:

7.5 *Απογραφή – Άτομα – Πληθυσμός – Συχνότητα.*

ΟΡΙΣΜΟΣ

Βλέπουμε ότι με τη μέχρι τώρα εξέταση των στοιχείων ενός συνόλου έχει προκύψει ένα πλήθος πληροφοριών ή μετρήσεων, που για να αξιοποιηθούν, πρέπει να παρουσιασθούν κατάλληλα. Με τη συλλογή, επεξεργασία και την εξαγωγή συμπερασμάτων από τέτοιες πληροφορίες ή μετρήσεις ασχολείται ένας κλάδος των Μαθηματικών που λέγεται ***ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ***

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα της βιοτεχνίας παπουτσιών και ας υποθέσουμε ότι η βιοτεχνία ήθελε να κατασκευάσει 1000 ζευγάρια παπούτσια για τους 1000 κατοίκους ενός χωριού. Πρέπει λοιπόν να γνωρίζει τι νούμερο παπούτσι φοράει καθένας από τους κατοίκους του χωριού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν εξέταζε, για το σκοπό αυτό όλον τον πληθυσμό του χωριού, τότε θα έκανε ***απογραφή.***

Όμως αυτό είναι πρακτικά δύσκολο και αντιοικονομικό.

Γι' αυτό επιλέγει κατάλληλα ένα μέρος του πληθυσμού, δηλαδή 50 άτομα, το οποίο φροντίζουμε να είναι ***αντιπροσωπευτικό****, να αντανακλά δηλαδή τα πραγματικά ποσοστά των ανθρώπων που φορούν ένα συγκεκριμένο νούμερο.*

Παράδειγμα

Κόκκινο	*4*
Πράσινο	*8*
Κίτρινο	*8*
Μπλε	*12*
Άσπρο	*16*
Μαύρο	*28*

Τα στατιστικά συμπεράσματα που θα εξαχθούν απ' αυτό το δείγμα είναι σωστά και για όλο τον πληθυσμό;

Απάντηση

Όχι διότι το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό.

Στη βιοτεχνία είχαμε τον πίνακα.

Νούμερο παπουτσιών	*Αριθμός ζευγών*
38	*2*
39	*4*
40	*10*
41	*15*
42	*9*
43	*6*
44	*4*

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός 2 καλείται ***συχνότητα του αριθμού*** *(δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής) 38, ο αριθμός 4 του αριθμού 39, κ.λ.π.*

Οι αριθμοί 38,39, …….,44 είναι στην ουσία τιμές της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής.

Παράδειγμα

Ποιες είναι οι συχνότητες των αριθμών ;

40 41 42 43

Απάντηση

Η συχνότητα του 40 είναι 10
41 15
42 9
43 6

Αυτό όμως που ενδιαφέρει την βιοτεχνία, δεν είναι οι συχνότητες των διαφόρων νούμερων παπουτσιών, αλλά το ποσοστό των ανθρώπων που φορούν κάποιο συγκεκριμένο νούμερο.

Η παραγωγή της βιοτεχνίας θα πρέπει να ακολουθεί τα ίδια ποσοστά.

Η έννοια του ποσοστού συμπίπτει με την έννοια της σχετικής συχνότητας.

7.6 Συχνότητα, Σχετική συχνότητα

Παράδειγμα

Πόσο είναι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα; Πόσο ποσοστό του δείγματος φορούν νούμερο 38;

Απάντηση

Το άθροισμα είναι 50

Το ποσοστό είναι 2/50 = 0,04

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Αυτό το λέμε **σχετική συχνότητα** του αριθμού 38.*

Παράδειγμα

Συμπληρώστε τον υπόλοιπο παραπάνω πίνακα

Απάντηση

X	*N*	*Σχετική συχνότητα*
38	2	0.04
39	4	0,08
40	10	0,2
41	15	0,3
42	9	0,18
43	6	0,12
44	4	0,08
	50	

Όπως βλέπουμε η σχετική συχνότητα μιας τιμής είναι ένας αριθμός μεταξύ μηδέν και ένα, το δε άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων είναι 1.

Παράδειγμα

Η σχετική συχνότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας

Πόσο άθροισμα έχουν οι σχετικές συχνότητες;

Απάντηση

Η σχετική συχνότητα είναι μικρότερη της μονάδας

Όλες οι σχετικές συχνότητες έχουν άθροισμα 1.

7.7 Πολύγωνο συχνοτήτων, διάγραμμα συχνοτήτων

Ας πάρουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και ας βάλουμε στον άξονα Οχ τις τιμές της μεταβλητής που δείχνει το νούμερο των παπουτσιών και στο άξονα Οψ τις συχνότητες τους. Εν συνεχεία ενώνουμε τις κορυφές.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτή η τεθλασμένη γραμμή καλείται ***πολύγωνο συχνοτήτων*** *ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα που παριστάνουν τις τεταγμένες,* ***διάγραμμα συχνοτήτων***

7.8 Ασκήσεις για το σπίτι

1. Σε ένα γυμνάσιο των Πατρών υπηρετούν οι εξής καθηγητές.

φιλόλογος, μαθηματικός, βιολόγος, γυμναστής, γαλλικών, φυσικός, φιλόλογος, γυμναστής, θεολόγος, αγγλικών, μαθηματικών, γυμναστής, φιλόλογος, μουσικός, φυσικός, φιλόλογος, φιλόλογος, γαλλικών, γαλλικών, φιλόλογος, θεολόγος, φυσικός.

Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων του προσωπικού του Γυμνασίου.

2. Οι 18 ομάδες της Β΄ Εθνικής σημείωσαν μία Κυριακή τα παρακάτω τέρματα.

3 1 0 2 4 2 3 2 1

2 1 0 3 1 3 2 0 1

Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

3. Ο πίνακας παρουσιάζει την παραγωγή ενός εργοστασίου παραγωγής τηλεοράσεων κατά την πενταετία 1990-1995.

Έτος	*Αριθμός συσκευών*
1990	*65000*
1991	*70000*
1992	*75000*
1993	*50000*
1994	*80000*
1995	*60000*

Να παρουσιάσετε τη παραγωγή του εργοστασίου σε ραβδόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

4. Οι 30 υπάλληλοι του Μαθηματικού Τμήματος έχουν τις παρακάτω ηλικίες σε έτη.

35 46 36 47 47 45 40 38 39 26 29 33 34 45 42

7 28 29 37 33 44 35 37 37 56 61 29 29 44 43

Ν α ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις σε κλάσεις του ίδιου πλάτους, να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και κατόπιν να κάνετε το αντίστοιχο ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

5. Σε ένα αγώνα σκοποβολής πήραν μέρος 20 σκοπευτές που σημείωσαν τις εξής επιτυχίες:

147 156 144 195 168 185 166 148 174 175

186 166 143 192 163 174 155 150 177 161

Ν α ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις και να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

6. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα μίας οικογένειας που ανέρχονται σε 280000 δραχμές. Να βρείτε πόσα ξοδεύει η οικογένεια για φροντιστήρια, αν η γωνία του κυκλικού τομέα φροντιστήρια είναι 120^0

7) Οι παρακάτω αριθμοί αντιπροσωπεύουν το πλήθος των επιβατών που μπορεί να μεταφέρει καθένα από 20 αυτοκίνητα.

4 5 6 6 4 5 4 4 5 6

4 4 5 4 5 5 6 6 4 5

α) Να κατασκευάσετε πίνακα με τις συχνότητες και σχετικές συχνότητες.

β) Να βρείτε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που μπορεί να μεταφέρει:

ι) τουλάχιστον 5 επιβάτες

ιι) το πολύ 4 επιβάτες

ιιι) 4 ή 5 επιβάτες.

8) Να συμπληρωθεί ο πίνακας που παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α΄ τάξης ενός Λυκείου.

Μαθήματα	Συχνότητα ν	Σχετική συχνότητα
Αρχαία Ελληνικά	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		

9) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να κατασκευάσετε χρονόγραμμα που να δείχνει την εξέλιξη της εγκληματικότητας από το 1992 έως το 1999.

Έτος	*Συχνότητα*
1992	*27*
1993	*35*
1994	*29*
1995	*29*
1996	*45*
1997	*208*
1998	*101*
1999	*110*

Ποιες τάσεις παρατηρείτε στο χρονόγραμμα;

8 Όγδοη Ενότητα

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

8.1 *Εισαγωγή.*

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε μία βαθμιαία εξοικείωση των μαθητών με τις ειδικότερες μεθόδους και έννοιες της Στατιστικής.

Ιδιαίτερα θα επικεντρωθούμε στη συγκρότηση της έννοιας της αθροιστικής συχνότητας.

8.2 *Αθροιστική Συχνότητα.*

Στον πίνακα της βιοτεχνίας που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ορίσαμε τη συχνότητα και τη σχετική συχνότητα.

X	*ν*	*Σχετική συχνότητα*
38	*2*	*0.04*
39	*4*	*0,08*
40	*10*	*0.2*
41	*15*	*0,3*
42	*9*	*1,8*
43	*6*	*1,2*

44	*4*	*0,08*
	50	*1*

Όταν όμως θέλουμε να βγάζουμε συγκεντρωτικά αποτελέσματα, τι κάνουμε;

Παράδειγμα

Πόσοι άνθρωποι φορούν παπούτσια έως 40 νούμερο στον παραπάνω πίνακα;

Απάντηση

2+4+10=16

Χ	*ν*	*Σχετική συχνότητα*	*Αθροιστική συχνότητα*
38	*2*	*0.04*	
39	*4*	*0.08*	
40	*10*	*0.2*	*16*
41	*15*	*0.3*	
42	*9*	*0.18*	
43	*6*	*0.12*	
44	*4*	*0.08*	
	50	*1*	

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο αριθμός 16 καλείται ***αθροιστική συχνότητα*** *στο 40*

Παράδειγμα

Συμπληρώστε τον υπόλοιπο πίνακα Αθροιστικών Συχνοτήτων

Απάντηση

Χ	*ν*	*Σχετική συχνότητα*	*Αθροιστική συχνότητα*
38	*2*	*0.04*	*2*
39	*4*	*0.08*	*6*
40	*10*	*0.2*	*16*
41	*15*	*0.3*	*31*

42	*9*	*0.18*	*40*
43	*6*	*0.12*	*46*
44	*4*	*0.08*	*50*
	50	*1*	

8.3 Σχετική Συχνότητα.

Παράδειγμα

Πόσο επί τοις εκατό (%) φορούν μέχρι το νούμερο 40;

Πόσο ποσοστό επί τοις % φορούν παπούτσια μέχρι 40 νούμερο, αφού στους 50 φορούν μόνο 16;

Απάντηση

32% ή 0,32.

Ο αριθμός αυτός καλείται σχετική αθροιστική συχνότητα

Παράδειγμα

Συμπληρώστε τον υπόλοιπο πίνακα των Αθροιστικών Σχετικών Συχνοτήτων

Απάντηση

X	***ν***	***Σχετική συχνότητα***	***Αθροιστική συχνότητα***	***Σχετική Αθροιστική Συχνότητα***
38	*2*	*0.04*	*2*	*0.04*
39	*4*	*0.08*	*6*	*0.12*
40	*10*	*0.2*	*16*	*0.32*
41	*15*	*0.3*	*31*	*0.62*
42	*9*	*0.18*	*40*	*0.8*
43	*6*	*0.12*	*46*	*0.92*
44	*4*	*0.08*	*50*	*1*
	50	*1*		

Παράδειγμα

Τι παρατηρείτε για τις αθροιστικές συχνότητες της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής;

Απάντηση

Η μικρότερη είναι ίση με τη σχετική συχνότητα και η μεγαλύτερη με το 1.

Ας επιστρέψουμε στην ιστορία με τους στρατιώτες και τη βιοτεχνία που ράβει τις φόρμες τους και στον σχετικό πίνακα.

Ύψος	Αριθμός στρατιωτών	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική συχνότητα
1,55-1,60	5			
1,60-1,65	15			
1,65-1,70	15			
1,70-1,75	20			
1,75-1,80	25			
1,80-1,85	15			
1,85-1,90	5			

Ασκηση 1

Συμπληρώστε τις κενές στήλες του παραπάνω πίνακα

Απάντηση

Ύψος	Αριθμός στρατιωτών	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική συχνότητα
1,55-1,60	5	0,5	5	0,5
1,60-1,65	15	0,15	20	0,20
1,65-1,70	15	0,15	35	0,35
1,70-1,75	20	0,2	55	0,55
1,75-1,80	25	0,25	80	0,8
1,80-1,85	15	0,15	95	0,95
1,85-1,90	5	0,5	100	1

Ασκηση 2

Το άθροισμα όλων των αθροιστικών συχνοτήτων (επί τοις εκατό) των τιμών μιας μεταβλητής είναι ίσο με 1.

Σ ☐ *Λ* ☐

Απάντηση

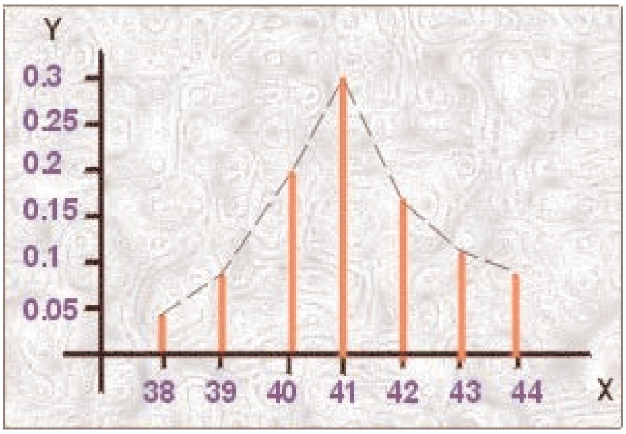
Σωστό

Παράδειγμα

Από τον παραπάνω συμπληρωμένο πίνακα των αθροιστικών συχνοτήτων της καρτέλας 6-7 κατασκευάστε μόνοι σας το διάγραμμα. Εν συνεχεία ενώστε τις κορυφές του διαγράμματος

Απάντηση

Το πολύγωνο Αθροιστικών Συχνοτήτων



ΟΡΙΣΜΟΣ

Την πολυγωνική γραμμή που σχηματίζεται την ονομάζουμε ***πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων***

8.4 Ασκήσεις

1. Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα να κάνετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

2. Με βάση τα συνολικά αποτελέσματα των εκλογών 2000 για τα κόμματα να βρείτε την σχετική συχνότητα και την αθροιστική συχνότητα για κάθε κόμμα.

3. α) Αν οι αθροιστικές συχνότητες των τιμών χ_1, χ_2 είναι 30 και 55 τότε η συχνότητα της τιμής……….. είναι 25.

β) Αν οι αθροιστικές συχνότητες των τιμών χ_1, χ_2 είναι είναι 39 και 69 αντίστοιχα τότε η συχνότητα της τιμής χ_2 είναι $\boxed{}$

4. Όταν ρίχνουμε τρία ζάρια το άθροισμά τους μπορεί να είναι από 3 μέχρι 18. Οι παρατηρήσεις δείχνουν τα αθροίσματα από το ρίξιμο των τριών ζαριών.

5 4 9 11 17 5 6 18 11 12 12 13 14

9 16 12 10 5 3 4 5 12 17 13 18 9

15 11 12 13 14 4 5 6 9 8 7 11 12 10

Να τα ομαδοποιήσετε σε 6 κλάσεις.

Να συμπληρωθεί ο πίνακας με τις συχνότητες και τις αθροιστικές συχνότητες.

5. Να βρείτε την αθροιστική συχνότητα και τη σχετική αθροιστική συχνότητα και το πολύγωνο συχνοτήτων στο παράδειγμα με τα αποτελέσματα των εκλογών του 1996.

6. Σε όλες τις ασκήσεις της προηγουμένης παραγράφου 7 να βρείτε την αθροιστική συχνότητα και τη σχετική αθροιστική συχνότητα και το πολύγωνο συχνοτήτων όπου μπορείτε.

7. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή Χ.

Μεταβλητή Χ	*Συχνότητα*	*Σχετική Συχνότητα*	*Αθροιστική συχνότητα*	*Αθροιστική σχετική συχνότητα*
X_1			*100*	
X_2				*0,5*
X_3	*250*	*0,5*		

8. Η μεταβλητή Χ παίρνει τις τιμές χ_1 , χ_2 ,χ_3

με $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$.Οι αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες είναι :

N_1= 30, N_2 =70 , N_3=120. Τότε η σχετική συχνότητα της τιμής χ_1
Είναι.

Α:30% Β : 60% Γ:90% Δ:25% Ε:50%.

9) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό δωματίων των διαμερισμάτων μίας πολυκατοικίας. Αφού συμπληρώσετε τον πίνακα να βρείτε α) πόσα διαμερίσματα έχουν λιγότερα από 4 δωμάτια. Β) πόσα έχουν τουλάχιστον 4 δωμάτια γ) πόσα έχουν το πολύ 2 δωμάτια.

Δωμάτια	*Διαμερίσματα*	*Αθροιστική συχνότητα*
1	*2*	
2	*4*	
3		*13*
4		
5	*4*	
6	*2*	
	35	

10) Στη περίπτωση ποσοτικών μεταβλητών εκτός από τις συχνότητες ν_I, και f_I χρησιμοποιούνται συνήθως οι λεγόμενες ………….. και οι ……

οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχο των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής χ_I.

9 ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

9.1 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Θέμα 1

α) Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:

Α. Ω={Κ,Γ}

Β. Ω={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}

Γ. Ω={ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΓ,ΓΚΚ,ΓΓΚ,ΓΓΓ,ΓΚΓ,ΚΓΚ}

β) Η διαδικασία ενός πειράματος τύχης μπορεί να επαναληφθεί με τις ίδιες συνθήκες όσες φορές θέλουμε.

Σ ☐ Λ ☐

γ) Ελέγχουμε διαδοχικά βιβλία μέχρι να βρούμε ένα κακοτυπωμένο(Κ) ή δύο σωστά τυπωμένα(Σ). Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

Α. Ω={ΚΚ,ΚΣ}

Β. Ω={Κ,ΣΣ}

Γ. Ω={Κ,ΣΚ,ΣΣ}

Δ. Ω={ΚΚ,ΣΣ}

Θέμα 2

Μία δισκογραφική εταιρία ελέγχει τα CD που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD όταν έχουν ελεχθεί 4 CD. Να βρεθούν:

α) ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα.

β) το ενδεχόμενο: "ακριβώς 2 ελαττωματικά CD".

Θέμα 3

Να αναφέρετε 4 πειράματα τύχης.

Θέμα 4

Αναφέρατε παραδείγματα δειγματικών χώρων από εφημερίδες, περιοδικά, τηλεοράσεις ή από το διαδίκτυο.

Απαντήσεις

1 α) Γ

β) Σ

γ) Γ

2. α) Ω={ΚΚΚΚ, ΚΚΚΕ, ΚΚΕΚ, ΚΚΕΕ, ΚΕΚΚ, ΚΕΚΕ,ΚΕΕ, ΕΚΚΚ, ΕΚΚΕ,ΕΚΕ, ΕΕ}

β) Β={ΚΚΕΕ, ΚΕΚΕ, ΕΚΚΕ, ΚΕΕ, ΕΚΕ, ΕΕ}

9.2 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Θέμα 1

I) Για την πιθανότητα P(A) ισχύει:

Α. $1<P(A)<2$

Β. $P(A)>1$

Γ. $P(A)<0$

Δ. κανένα από τα προηγούμενα.

II) Ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων είναι:

Α. $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

Β. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Γ. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Δ. $P(AB)=P(A)+P(B)$

III) Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου, τότε ισχύει η ανισότητα.

$2P(A\cap B)\leq P(A)+P(B)$

Σ ☐ Λ ☐

IV) Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και P(A)=P(B) τότε A=B.

Σ ☐ Λ ☐

Θέμα 2

Μία κληρωτίδα περιέχει τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10. Παίρνουμε στη τύχη ένα αριθμό. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ={αριθμός άρτιος} και Δ= {αριθμός μικρότερος από το 4}.

Θέμα 3

Η πιθανότητα να κρυολογήσουμε την άνοιξη είναι τριπλάσια από του να μη κρυολογήσουμε. Να βρεθεί η πιθανότητα να κρυολογήσουμε.

Θέμα 4

Πότε η έννοια της Πιθανότητας εμφανίσθηκε στην Ιστορία και ποια η εξελιξή της.

Απαντήσεις

1. I) Δ
   II) Γ
   III) Σ
   IV) Λ
2. $P(\Gamma)=1/2$
   $P(\Delta)=3/10$
3. $P(A)=3/4$

9.3 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Θέμα 1

I. Ποια από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.
   α. Κ « Ένα άτομο είναι μανιώδης πότης»
      Δ «Ένα άτομο θα προσβληθεί από ασθένεια του ύπατος.»
   β. Ε «Το απόγευμα θα πάω στην Αθήνα»
      Ζ «Η εκκλησία του χωριού είναι μεγάλη»
   γ. Η «Έχω πολλά χρήματα σήμερα»
      Θ «θα πάω στο Μουσείο τη Κυριακή»

II. Αν Γ είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω τότε Ρ(Γ/Ω)=
   α. 2
   β. Ρ(Γ)
   γ. 1/Ρ(Γ)
   δ. $(Ρ(Γ))^2$

Θέμα 2

Αν $P(A\cap B)$ =0,18 και P(B)=0,3 και P(A)=0,6 να βρείτε την P(A/B) και την P(B/A).

Θέμα 3

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A. « ένας οδηγός δικυκλου δεν φορούσε κράνος ενώ οδηγούσε.»
B. «ένας οδηγός τραυματίστηκε σε τροχαίο ατύχημα»

Να γράψετε με λόγια τις παρακάτω πιθανότητες.

I) P(A/B)
II) P(B/A)

Θέμα 4

Περιγράψτε με ένα δικό σας παράδειγμα την έννοια της δεσμευμένης Πιθανότητας. Αν δε μπορείτε να βρείτε σκεφτείτε ένα αυτοκίνητο με ηλιοροφή.

Απαντήσεις

1. I) β
   II) β
2. $P(A/B)= P(A\cap B)/ P(B)=0,18/0,3 =0,6$
   $P(B/A)= P(A\cap B)/P(A) =0,18/0,6 = 0,3$

9.4 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Θέμα 1

I) Σε ένα καφενείο παίζεται ένα παιχνίδι με ζάρια ως εξής: ο καφετζής πληρώνει στον παίχτη τόσα χιλιάρικα όσα η ένδειξη του ζαριού που ρίχνει ο παίχτης. Ποιο το αναμενόμενο κέρδος του καφετζή;

Α. 4000

Β. 3000

Γ. 3500

Δ. 6000

II) Στο πείραμα της ανάρριψης ενός κέρματος 2 φορές η Μαθηματική Ελπίδα είναι:

Α. 2

Β. 3

Γ. 1

Δ. 0

Θέμα 2

Σ' ένα παιχνίδι ένας παίκτης ρίχνει ένα ζάρι. Ο παίκτης κερδίζει 20 δραχμ. εάν έρθει 2, 40 δραχμ. εάν έρθει 4, χάνει 30 δραχμές εάν έρθει 6 και ούτε κερδίζει ούτε χάνει αν έρθει άλλος αριθμός. Πόσες δραχμές αναμένεται να κερδίσει σ'ένα παιχνίδι;

Θέμα 3

Σ' ένα λαχνό υπάρχουν 200 βραβεία (κέρδη) των 5 χιλιάδων δραχμών, 20 βραβεία των 25 χιλιάδων δραχμών και 5 βραβεία των 100 χιλιάδων δραχμών. Εάν πρόκειται να μοιραστούν 10000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;

Θέμα 4

Προσπαθήσετε μόνοι σας να αιτιολογήσετε γιατί η έννοια την οποία διαπραγματεύεται το κεφάλαιο 5 λέγεται Μαθηματική Ελπίδα.

Απαντήσεις

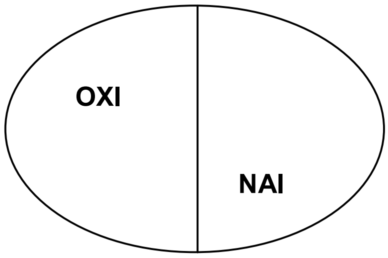
1. I) Γ

   II) Γ
2. 5
3. 0,2

9.5 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

Θέμα 1

Ο ΤΡΟΧΟΣ ΤΗΣ ΤΥΧΗΣ



I.) Ας θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε τον τροχό του ναι-όχι 5 φορές. Η 5^{η} σειρά από τις κούπες της ρωμαϊκής κρήνης ή η 5^{η} σειρά από το τρίγωνο του Pascal δίνουν ως πιθανά 32 διαφορετικά αποτελέσματα

1/32, 5/32, 10/32, 10/32, 5/32, 1/32

Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: "2 φορές ναι"

Α. 10/32

Β. 5/32

Γ. 6/32

Δ. 0

II) Στον παραπάνω τροχό τύχης 4 φορές "ναι"

Α. 4/32

Β. 5/32

Γ. 6/32

Δ. 0

Θέμα 2

Σχεδιάστε μία Ρωμαική κρήνη και υπολογίστε τους συντελεστές του αναπτύγματος

$(\alpha+\beta)^4$

$(\alpha+\beta)^7$

Ποιους άλλους τρόπους μπορείτε να βρείτε για να υπολογίσετε τις παραπάνω δυνάμεις;

Θέμα 3

Σχεδιάστε δικά σας σχήματα αν μπορείτε και εξάγετε ανάλογα συμπεράσματα με αυτά του Κεφαλαίου 4.

Θέμα 4

Προσθέστε τους αριθμούς κάθε γραμμής στο τρίγωνο Pascal. Διακρίνετε κάποια κανονικότητα;

Θέμα 5

Τι παρατηρείτε για τους αριθμούς που βρίσκονται στη $3^η$ διαγώνιο;

Απαντήσεις

1 I) B

II) B

2. 1,4,6,4,1

5. Είναι τριγωνικοί αριθμοί.

9.6 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 6

Θέμα 1

1) Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $χ_1, χ_2, χ_3$ με σχετικές συχνότητες f_3, f_1, f_2 αντίστοιχα. Αν $f_1=2f_2$ και $f_3=40\%$ τότε $f_1=$

   A. 10%

   B. 60%

   Γ. 35%

   Δ. 70%

   E. 20%

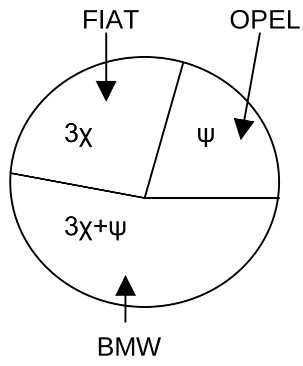
II) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα και να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΕΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ - ΤΑΞΗ Β΄ - ΤΜΗΜΑ $3^Ο$

Αποτελέσματα	**Μαθητές**	**%**
Άριστα	2	
Πολύ καλά	9	
Καλά	14	
Μέτρια		25
Απορρίπτεται		
Σύνολο:	35	

Θέμα 2

Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τις προτιμήσεις 270 ανδρών προς 3 διαφορετικά αυτοκίνητα. Αν 3χ+ψ=150 τότε να βρείτε το ποσοστό των ανδρών που προτιμά καθένα από τα αυτοκίνητα και να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



Θέμα 3

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την παραγωγή ενός εργοστασίου παραγωγής τηλεοράσεων κατά την πενταετία 1990-1995. Παρουσιάστε την παραγωγή του εργοστασίου σε ραβδόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Έτος	**Αριθμός συσκευών**
1990	65000
1991	70000
1992	75000
1993	50000
1994	80000
1995	60000

Θέμα 4

Δημιουργήστε εικονοδιαγράμματα που να αναπαριστούν μέτρηση αυτοκινήτων, ζώων, τηλεοράσεων κ.λ.π. σε δικά σας παραδείγματα.

Θέμα 5

Αναγράψτε όσα ιστορικά στοιχεία μπορείτε να βρείτε για τη Στατιστική. Να φέρετε εικόνες και πίνακες από εφημερίδες, από το Internet, από περιοδικά που να έχουν σχέση με προβλήματα Στατιστικής.

Θέμα 6

Δημιουργήστε δικά σας προβλήματα βρίσκοντας παραδείγματα από τη ζωή, δηλαδή από εκλογές, φάρμακα, δημοσκοπήσεις κ.λ.π.

Θέμα 7

Σχεδιάστε μόνοι σας στον υπολογιστή ραβδογράμματα, πιτοδιαγράμματα και ότι άλλο μπορείτε, παρμένα από τα παραπάνω προβλήματα.