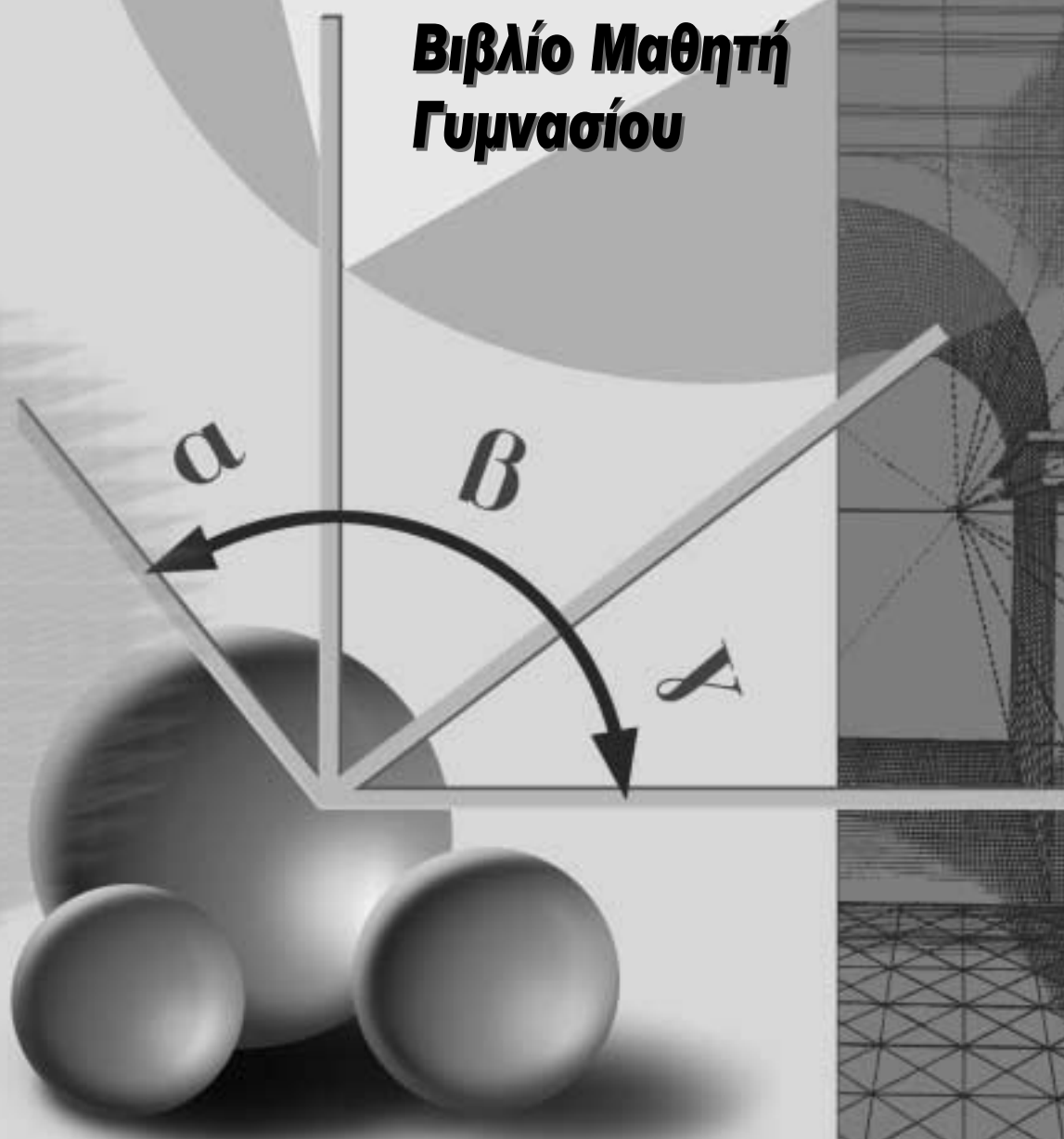




# *Cabri - geometry II*

**Βιβλίο Μαθητή  
Γυμνασίου**



Ινστιτούτο  
Τεχνολογίας  
Υπολογιστών



ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ  
*inter@ctive*





**ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

CABRI – GEOMETRY II: ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Συγγραφέας:** Μαρία Κορδάκη

Το λογισμικό **Cabri – geometry II** είναι προϊόν του IMAG (Ινστιτούτο για την Πληροφορική και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά) του Πανεπιστημίου Joseph Fourier της Γκρενόμπλ, και του CNRS (Εθνικό Κέντρο Επιστημονικής Έρευνας της Γαλλίας).

Το λογισμικό αυτό είναι αποτέλεσμα της εργασίας μιας επιστημονικής ομάδας αποτελούμενης από μαθηματικούς, καθηγητές και επιστήμονες της πληροφορικής, στα πλαίσια του παραπάνω εργαστηρίου.

Η συνολική προσπάθεια υποστηρίχθηκε από το Γραφείο Νέων Τεχνολογιών για την Εκπαίδευση του υπουργείου Παιδείας της Γαλλίας, στο Παρίσι.

Στη Γαλλία η έκδοση που υποστηρίζεται από τα Windows διανεμήθηκε σύμφωνα με την άδεια χρήσης λογισμικού «Licence Mixte» από το γαλλικό υπουργείο Παιδείας (1997).

Το λογισμικό **Cabri – geometry II** εξελληνίστηκε και διατίθεται αρχικά για χρήση στα Γυμνάσια, Λύκεια και ΤΕΕ που συμμετέχουν στην **Οδύσσεια – «Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας»**, το εθνικό πρόγραμμα που αφορά την παιδαγωγική ένταξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, και είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιου σχεδιασμού και υλοποίησης (1996-2001). Το 2001 στα 385 σχολεία της **Οδύσσειας** καθηγητές όλων των ειδικοτήτων αξιοποιούν υπολογιστές και δίκτυα στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους. Στο **Σχολικό Εργαστήριο της Κοινωνίας της Πληροφορίας** υποστηρίζεται η διδασκαλία όλων των μαθημάτων με διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Στο Γ' ΚΠΣ προβλέπεται η χρηματοδότηση της σταδιακής εξάπλωσης της **Οδύσσειας** σε περισσότερα σχολεία της χώρας μας.

**Διεύθυνση έργου:** Γιώργος Σορολοπίδης

**Αναπληρωτές υπεύθυνοι έργου:** Αρετή Βασιλογλου/Μαρία Καντήρου

**Μετάφραση λογισμικού και οδηγού χρήσης:** ORCO S.A.

**Επιστημονική και παιδαγωγική επιμέλεια:** Μαρία Κορδάκη

**Εκδοτική επιμέλεια:** Πάνος Ζευγώλης

**Επιμέλεια κειμένων:** Αντωνέτα Κώτση

**Υπεύθυνη παρακολούθησης υποέργων ΚΙΡΚΗΣ:** Σίλια Ρονιώτη

**Σύνδεσμος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου:** Κώστας Γαβριλίδης

**Σύνδεσμος Ινστιτούτου Τεχνολογίας Υπολογιστών:** Βασίλης Δαγδιλέλης

ISBN 960-03-3215-0

© Copyright Λογισμικού CABRILOG 1997. Αποκλειστική διάθεση για την ελληνική γλώσσα σε όλο τον κόσμο Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε., Αθήνα 2001

© Copyright Βιβλίου μαθητή Γυμνασίου Μαρία Κορδάκη – Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε., Αθήνα 2001

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος έργου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλυσή του με οποιονδήποτε τρόπο αναπαραγωγής έργου λόγου ή τέχνης, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν. 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης Βέρνης-Παρισιού, που κυρώθηκε με το ν. 100/1975. Επίσης απαγορεύεται η αναπαραγωγή της στοιχειοθεσίας, της σελιδοποίησης, του εξωφύλλου και γενικότερα της όλης αισθητικής εμφάνισης του βιβλίου, με φωτοτυπικές, ηλεκτρονικές ή οποιεσδήποτε άλλες μεθόδους, σύμφωνα με το άρθρο 51 του ν. 2121/1993. Κατόπιν ειδικής συμφωνίας με το ΥΠ.Ε.Π.Θ. επιτρέπεται η εκμετάλλευση του εξελληνισμένου προϊόντος με αντικείμενο τη χρήση του στα Ελληνικά Σχολικά Εργαστήρια σύμφωνα με το άρθρο 7, παρ. νί της σύμβασης με το ΠΤΥ για το Έργο Προσαρμογής Διεθνούς Εκπαιδευτικού Λογισμικού στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα – Ε24 ΚΙΡΚΗ.

**Επικοινωνία:**

Cabri – LEIBNIZ-IMAG

46 Avenue Félix Viallet

38031 Grenoble Cedex, France

Τηλ.: (33) 04 76 57 50 58, φαξ: (33) 04 76 57 50 57

www.cabri.net – e-mail: cabri@imag.fr

Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε.

Ζαλόγγου 11, 106 78 Αθήνα

Τηλ.: (01) 33 01 208, φαξ: (01) 38 22 530

www.kastaniotis.com/cabri – e-mail: cabri@kastaniotis.com

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	5
---------------	---

### *A' Τάξη Γυμνασίου*

1. Ευθεία και σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο.....	9
Δραστηριότητα 1α – Η ευθεία.....	9
Δραστηριότητα 1β – Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο.....	10
2. Κάθετες ευθείες.....	13
3. Παράλληλες ευθείες – Απόσταση παράλληλων ευθειών.....	15
Δραστηριότητα 1α.....	15
Δραστηριότητα 1β.....	16
4. Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος.....	19
Δραστηριότητα 1.....	19
Δραστηριότητα 2 – Προβλήμα.....	21
5. Γωνίες.....	23
Δραστηριότητα 1α – Γωνίες εφεξής.....	23
Δραστηριότητα 1β – Γωνίες κατακορυφήν.....	23
6. Παράλληλες ευθείες τεμνόμενες υπό τρίτης.....	25
7. Γωνίες και πλευρές ενός τριγώνου.....	27
8. Παραλληλόγραμμα και ιδιότητες παραλληλόγραμμων.....	29
9. Εμβαδά.....	33
Δραστηριότητα 1 – Εμβαδόν παραλληλόγραμμου – ορθογώνιου.....	33
Δραστηριότητα 2 – Εμβαδόν τριγώνου.....	34
Δραστηριότητα 3 – Εμβαδόν τραπέζιου.....	36

### *B' Τάξη Γυμνασίου*

1. Το πυθαγόρειο θεώρημα.....	41
2. Συντεταγμένες στο επίπεδο.....	43

3. Ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη οξείας γωνίας.....	45
4. Συμμετρία ως προς άξονα.....	49
5. Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα.....	51
Δραστηριότητα 1α.....	51
Δραστηριότητα 1β.....	52
6. Σχέση μεταξύ επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας.....	55
7. Κανονικά πολύγωνα – Μήκος και εμβαδόν κύκλου.....	57
8. Μήκος και εμβαδόν κύκλου.....	61

### *Γ' Τάξη Γυμνασίου*

1. Τρίγωνα και ίσα τρίγωνα.....	65
2. Ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων – Θεώρημα του Θαλή.....	67
3. Όμοια πολύγωνα και όμοια τρίγωνα.....	71
4. Εμβαδά των όμοιων σχημάτων.....	75
5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας.....	79
6. Σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.....	83
7. Νόμος των ημιτόνων.....	87
8. Νόμος των συνημιτόνων.....	89
9. Διανύσματα – Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων.....	91
Δραστηριότητα 1.....	91
Δραστηριότητα 2.....	93

### *Παράρτημα*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ.....	95
---	----

## Πρόλογος

Αγαπητέ μαθητή,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου περιέχει δραστηριότητες για την κατανόηση βασικών γεωμετρικών εννοιών μέσα στο περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri – geometry II. Με την πραγματοποίηση αυτών των δραστηριοτήτων θα σου δοθεί η ευκαιρία να μάθεις γεωμετρικές έννοιες μέσα από δημιουργικό πειραματισμό και να αναπτύξεις την κριτική σου σκέψη κατασκευάζοντας τη γνώση σου. Το κριτήριο με το οποίο έχουν κατασκευαστεί οι δραστηριότητες είναι να σου δίνεται η ευκαιρία να κατασκευάσεις τη γνώση σου μέσα από τον προβληματισμό και τη διατύπωση προτάσεων για το τι εσύ θεωρείς πιθανό να συμβαίνει σε κάθε περίπτωση. Το εκπαιδευτικό λογισμικό Cabri – geometry II αποτελεί ιδανικό περιβάλλον για την κατασκευή γεωμετρικών εννοιών μέσα από πειραματισμό. Σε αυτό το περιβάλλον, και με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, η γνώση που θα κατασκευάσεις θα είναι στερεή, διότι δε σου παρέχεται έτοιμη ούτε καλείσαι να την αποστηθίσεις. Επιπλέον, τις δραστηριότητες αυτές θα τις διεξάγεις δουλεύοντας ομαδικά με άλλους συμμαθητές σου στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου σου. Η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών για σένα, ενδεχομένως, δεν είναι κάτι ξένο και το πιο πιθανό είναι ότι έχεις προηγούμενη εμπειρία, η οποία και σε ευχαριστεί πολύ. Ως εκ τούτου, η εκμάθηση του μαθησιακού αυτού περιβάλλοντος αναμένεται ότι θα αποδειχθεί για σένα εύκολη και γρήγορη.

Η πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνονται σε αυτό το βιβλίο μέσα στο περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri – geometry II θα σου δώσει ενθουσιασμό ώστε δυναμικά και δημιουργικά να προχωρήσεις, σε συνεργασία με τους συμμαθητές σου και με τη βοήθεια του καθηγητή σου, στην οικοδόμηση βασικών γεωμετρικών εννοιών. Στο περιβάλλον αυτό σου δίνεται, επίσης, η ευκαιρία να αντιμετωπίσεις τη μάθηση της γεωμετρίας ως μια επιτυχημένη

για σένα δραστηριότητα και όχι ως κάτι δύσκολο, μονότονο, απλησίαστο και χωρίς ενδιαφέρον. Ελπίζω ότι θα μπορέσεις να εκμεταλλευτείς τις ευκαιρίες που σου παρέχει η ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων που ακολουθούν, ώστε να ανοίξεις νέους δρόμους στη μάθησή σου.

Φιλικά

Μαρία Κορδάκη

**Εκπαιδευτικές δραστηριότητες  
για την Α', Β' και Γ' Γυμνασίου**





## Α' Τάξη Γυμνασίου

### Κεφάλαιο 5

Α' Τάξη – Ευθεία και σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο

1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα 1α – Η ευθεία

Έστω δύο σημεία Α και Β ενός επιπέδου. Α) Πόσες ευθείες άραγε μπορούν να τα διέρχονται; Β) Προβληματιστείτε για το πόσες ευθείες είναι δυνατόν να περάσουν μόνον από το σημείο Α.

#### Στόχος

Η διερεύνηση του πλήθους των ευθειών οι οποίες διέρχονται δύο ή ένα σημείο αντίστοιχα.

#### Κατασκευή:

- Κατασκευάστε μία ευθεία ορίζοντας δύο σημεία της Α και Β. Ονομάστε την ε.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Σημείο», κάντε δύο κλικ σε διαφορετικά σημεία της οθόνης του υπολογιστή.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ετικέτα» –στην τελευταία έκδοση χρησιμοποιούμε «Ονομασία»–, πληκτρολογήστε Α και Β για τα δύο σημεία αντίστοιχα.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ευθεία», κάντε κλικ στο σημείο Α, και στο σημείο Β.

#### Διερεύνηση

**Ερώτηση 1:** Μπορείτε να κατασκευάσετε και άλλη ευθεία η οποία να περνά από τα σημεία Α και Β και να μη συμπίπτει οπτικά με την ε;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ερώτηση 2:** Μετακινήστε την ευθεία  $\varepsilon$  κρατώντας την από το σημείο  $B$ . Τι παρατηρείτε; Πόσες ευθείες είναι δυνατόν να περάσουν από το σημείο  $A$ ;

### Απάντηση

---

---

---

---

---

---

### Δραστηριότητα 1β – Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο

Έστω δύο ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  του επιπέδου. **A)** Ποιες είναι άραγε οι δυνατές σχετικές θέσεις των δύο αυτών στο επίπεδο; **B)** Πώς άραγε μεταβάλλεται η γωνία των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$  όταν μεταβάλλεται η θέση τους στο επίπεδο;

### Στόχος

Η διερεύνηση των δυνατών θέσεων δύο ευθειών στο επίπεδο.

### Κατασκευή

- Σχεδιάστε δύο σημεία  $A$  και  $B$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε δύο ευθείες οι οποίες διέρχονται τα  $A$  και  $B$  και ονομάστε τις  $\varepsilon$  και  $\zeta$  αντίστοιχα.

### Οδηγίες:

- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Σημείο», κάντε δύο κλικ σε διαφορετικά σημεία της οθόνης του υπολογιστή.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ονομασία», πληκτρολογήστε  $A$  και  $B$  για τα δύο σημεία αντίστοιχα.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ευθεία», κάντε κλικ στο σημείο  $A$  και ένα επιπλέον κλικ σε άλλο σημείο της οθόνης του υπολογιστή.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ευθεία», κάντε κλικ στο σημείο  $B$  και ένα επιπλέον κλικ σε άλλο σημείο της οθόνης του υπολογιστή.
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ονομασία», πληκτρολογήστε  $\varepsilon$  και  $\zeta$  για τις δύο ευθείες αντίστοιχα.
- Μετακίνηση της ευθείας  $\zeta$ .
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Σημείο σε τομή» (επιλέγοντας τις δύο ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  αντίστοιχα).
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ονομασία» και πληκτρολογήστε  $\Gamma$  για το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$ .
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Γωνία», κάντε κλικ στα σημεία  $A$ ,  $\Gamma$  και  $B$ .

### Διερεύνηση

**Ερώτηση 1:** Μετακινήστε την ευθεία  $\zeta$  έτσι ώστε να περιστραφεί γύρω από το σημείο  $B$ . Ποιες είναι οι δυνατές θέσεις των δύο ευθειών;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ερώτηση 2:** Κατασκευάστε τη γωνία των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$  και μελετήστε τη μεταβολή της γωνίας αυτής κατά τη διάρκεια της μετακίνησης των δύο ευθειών με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Οι γωνίες των ευθειών	Οι ευθείες			
	Είναι παράλληλες	Είναι κάθετες	Τέμνονται	Ταυτίζονται



**Α' Τάξη – Κάθετες ευθείες**  
**1 Δραστηριότητα**  
**Χρόνος: 1 διδακτική ώρα**

**Δραστηριότητα**

Έστω δύο ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  του επιπέδου οι οποίες σχεδιάζονται έτσι ώστε να είναι κάθετες. Είναι δυνατό οι δύο αυτές ευθείες να είναι κάθετες ακόμα και όταν η μία δεν είναι οριζόντια και η άλλη κατακόρυφη;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της δυνατότητας διατήρησης της καθετότητας δύο ευθειών κατά την περιστροφή τους στο επίπεδο θεωρούμενων ως συστήματος ευθειών.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε δύο σημεία  $A$  και  $B$  και την ευθεία  $\varepsilon$ , η οποία τα διέρχεται.
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $\Gamma$  έξω από την ευθεία  $\varepsilon$  και την κάθετη ευθεία από το σημείο  $\Gamma$  προς την ευθεία  $\varepsilon$ .
- Ονομάστε τη νέα ευθεία  $\zeta$ .
- Ορίστε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$  και ονομάστε το  $\Delta$ .
- Σημειώστε τη γωνία των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$  και μετρήστε την.

**Διερεύνηση**

**Ερώτηση 1:** Επιλέξτε και μετρήστε τη γωνία  $B\Delta\Gamma$ . (Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Γωνία» και κάντε κλικ στα σημεία  $B$ ,  $\Delta$ ,  $\Gamma$  αντίστοιχα). Στη συνέχεια επιλέξτε την ευθεία  $\zeta$  από τα σημεία  $B$  ή  $\Gamma$  και μετακινήστε ή περιστρέψτε τη στην οθόνη του υπολογιστή. Τι συμπεραίνετε για την καθετότητα των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$  όταν αυτές μετακινούνται με τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ερώτηση 2:** Στη συνέχεια, επιλέξτε την ευθεία  $\varepsilon$  από το σημείο  $B$  και περιστρέψτε την. Τι συμπεραίνετε για την καθετότητα των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$  όταν αυτές μετακινούνται με τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Διατυπώστε τη γενίκευση**

.....

.....

## Α' Τάξη – Παράλληλες ευθείες – Απόσταση παράλληλων ευθειών

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα 1α

Έστω δύο ευθείες  $\epsilon$  και  $\zeta$  του επιπέδου οι οποίες σχεδιάζονται έτσι ώστε να είναι παράλληλες. Είναι δυνατόν να διατηρείται η παραλληλία τους όταν αυτές δεν είναι οριζόντιες, αλλά περιστρέφονται ως σύστημα στο επίπεδο; Τι συμβαίνει άραγε με τις αποστάσεις μεταξύ αυτών των παράλληλων ευθειών; Τι συμβαίνει άραγε με τις αποστάσεις μεταξύ των ευθειών αυτών κατά τη διάρκεια της περιστροφής τους ως συστήματος στο επίπεδο με τον τρόπο που προαναφέρθηκε;

#### Στόχος

Η διερεύνηση της διατήρησης της παραλληλίας ευθειών, όταν αυτές περιστρέφονται στο επίπεδο θεωρούμενες ως σύστημα ευθειών, και των μεταξύ τους αποστάσεων.

#### Κατασκευή

- Σχεδιάστε δύο σημεία  $A$  και  $B$  και την ευθεία  $\epsilon$ , που τα διέρχεται.
- Από ένα σημείο  $\Gamma$ , το οποίο βρίσκεται έξω από την ευθεία  $\epsilon$ , φέρτε την παράλληλη προς την ευθεία  $\epsilon$  και ονομάστε τη  $\zeta$ .

#### Διερεύνηση

**Ερώτηση 1:** Επιλέξτε την ευθεία  $\epsilon$  από το σημείο  $A$  ή  $B$ , την οποία και περιστρέψτε. Τι παρατηρείτε σχετικά με την παραλληλία των ευθειών κατά τη διάρκεια της περιστροφής τους στο επίπεδο της οθόνης του υπολογιστή με τον τρόπο που προαναφέρθηκε; Διατυπώστε συμπέρασμα.

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

#### Συμπέρασμα

.....

.....



**Ερώτηση 2:** Επιλέξτε τουλάχιστον τρία άλλα διαφορετικά σημεία στην ευθεία  $\zeta$  (χρησιμοποιήστε την επιλογή «Σημείο πάνω σε αντικείμενο»), τα οποία να ονομάσετε  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  και  $\Gamma_3$ . Από τα  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  και  $\Gamma_3$  φέρτε τις καθέτους στην  $\varepsilon$ , τις οποίες και ονομάστε  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ . Ορίστε τα σημεία τομής των  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  με την  $\varepsilon$  και ονομάστε τα  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  αντίστοιχα. Ορίστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma_1\Delta_1$ ,  $\Gamma_2\Delta_2$ ,  $\Gamma_3\Delta_3$  (με την επιλογή «Τμήμα» και κάντε κλικ στα σημεία που ορίζουν τα άκρα του) αντίστοιχα. Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma_1\Delta_1$ ,  $\Gamma_2\Delta_2$ ,  $\Gamma_3\Delta_3$  (με την επιλογή «Απόσταση και μήκος») αντίστοιχα. Τι συμπεραίνετε;

### Απάντηση

---

---

---

---

---

---

---

---

**Ερώτηση 3:** Επιλέξτε την ευθεία  $\varepsilon$  από το σημείο  $A$  ή  $B$  και περιστρέψτε την. Τι παρατηρείτε; Για τα μήκη των  $\Gamma_1\Delta_1$ ,  $\Gamma_2\Delta_2$ ,  $\Gamma_3\Delta_3$  τι υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε;

### Υπόθεση

---

---

---

---

---

---

---

---

### Δραστηριότητα 1β

#### Στόχος

Η διερεύνηση της διατήρησης της απόστασης δύο παράλληλων ευθειών κατά τη διάρκεια της περιστροφής τους στο επίπεδο θεωρούμενων ως συστήματος ευθειών.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε δύο σημεία  $A$  και  $B$  και την ευθεία  $\varepsilon$ , που τα διέρχεται.
- Φέρτε την κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon$  από το σημείο  $A$  και ονομάστε την  $\varepsilon_1$ .
- Πάρτε ένα σημείο  $K$  πάνω στην  $\varepsilon_1$  και στη συνέχεια φέρτε την παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon$  από το σημείο  $K$ .
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Τμήμα», ορίστε το τμήμα  $KA$ . Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Απόσταση και μήκος», μετρήστε το.

### Διερεύνηση

Επιλέξτε την ευθεία  $\varepsilon$  από το σημείο  $B$  και περιστρέψτε τη στην οθόνη του υπολογιστή. Τι παρατηρείτε σχετικά με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $KA$ ; Διατυπώστε υπόθεση.

### Διατύπωση υπόθεσης

---

---



**Α' Τάξη – Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος**  
**2 Δραστηριότητες**  
**Χρόνος: 1 διδακτική ώρα**

**Δραστηριότητα 1**

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και η μεσοκάθετός του  $\epsilon$ . Υπάρχει άραγε κάποια ιδιότητα που έχουν όλα τα σημεία της  $\epsilon$ ;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της βασικής ιδιότητας της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος.

**Κατασκευή**

- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Μεσοκάθετος» και κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τη μεσοκάθετό του  $\epsilon$ .
- Τοποθετήστε ένα σημείο  $K$  στην  $\epsilon$  και κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $KA$  και  $KB$ .
- Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $KA$  και  $KB$  και πινακοποιήστε τις τιμές τους αυτόματα, μετακινώντας το σημείο  $K$  πάνω στην  $\epsilon$ .

**Διερεύνηση**

1. Διερευνήστε τι συμβαίνει κατά τη μετακίνηση του σημείου  $K$  πάνω στην  $\epsilon$ .

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Παρατηρήστε πώς μεταβάλλονται τα μήκη των  $KA$  και  $KB$  στον πίνακα που δημιουργήθηκε.

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

Γενίκευση

1. Μπορείτε να αναγνωρίσετε μια ιδιότητα που έχουν τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος; Διατυπώστε υπόθεση.

Διατύπωση υπόθεσης

2. Μετακινήστε το σημείο  $B$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μήκη των  $KA$  και  $KB$ . Διερευνήστε την αλήθεια των υποθέσεων που διατυπώσατε προηγουμένως. Προχωρήστε στη διατύπωση γενίκευσης.

Γενίκευση

Αντίστροφα:

Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τη μεσοκάθετό του  $\varepsilon$ . Τοποθετήστε ένα σημείο  $\Lambda$  στην οθόνη του υπολογιστή σας έξω από την  $\varepsilon$  και κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Lambda A$  και  $\Lambda B$ . Μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα, μετακινώντας το σημείο  $\Lambda$  στην οθόνη του υπολογιστή.

Διερεύνηση

Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Lambda A$  και  $\Lambda B$  είναι ίσα;

Απάντηση

**Δραστηριότητα 2 – Πρόβλημα**

Τρία δέντρα είναι φυτεμένα σε έναν κήπο. Σχεδιάστε τα δέντρα ως σημεία στην οθόνη του υπολογιστή και ονομάστε τα Α, Β, Γ. Θέλουμε να τα ποτίσουμε με ένα ψεκαστικό μηχανήμα ώστε να ποτίζονται όλα με την ίδια ποσότητα νερού.

1. Σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετήσουμε το μηχανήμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Απάντηση**

Το μηχανήμα πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο .....

.....

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

2. Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με βάση τη γενίκευση που διατυπώσατε μέσα από την προηγούμενη εμπειρία σας;

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....



## Κεφάλαιο 6

Α' Τάξη – Γωνίες

1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

### Δραστηριότητα 1α – Γωνίες εφεξής

Έστω δύο γωνίες  $\varepsilon\text{Ο}\chi$  και  $\chi\text{Ο}\varepsilon$  οι οποίες είναι εφεξής και παραπληρωματικές και οι διχοτόμοι τους  $\delta_1$  και  $\delta_2$ . Τι συμβαίνει άραγε με τη γωνία  $\delta_1\text{Ο}\delta_2$ ;

### Στόχος

Η διερεύνηση του είδους της γωνίας που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών.

### Κατασκευή

- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ευθεία» και κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon$ .
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Σημείο σε αντικείμενο» και τοποθετήστε πάνω στην  $\varepsilon$  ένα σημείο  $\text{Ο}$ .
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ημιευθεία» και κατασκευάστε μια ημιευθεία  $\text{Ο}\chi$ .
- Επιλέξτε τις γωνίες  $\varepsilon\text{Ο}\chi$  και  $\chi\text{Ο}\varepsilon$  και μετρήστε τις.
- Επιλέξτε τις γωνίες  $\varepsilon\text{Ο}\chi$  και  $\chi\text{Ο}\varepsilon$  και κατασκευάστε τις διχοτόμους τους τις οποίες να ονομάσετε  $\delta_1$  και  $\delta_2$  αντίστοιχα.
- Επιλέξτε τη γωνία των διχοτόμων  $\delta_1\delta_2$  και μετρήστε την.

### Διερεύνηση

Περιστρέψτε την ημιευθεία  $\text{Ο}\chi$  στο επίπεδο της οθόνης του υπολογιστή και διερευνήστε τι συμβαίνει με τη γωνία των διχοτόμων των εφεξής παραπληρωματικών γωνιών. Διατυπώστε υπόθεση.

### Διατύπωση υπόθεσης

### Δραστηριότητα 1β – Γωνίες κατακορυφήν

Έστω δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\text{Ο}$  και  $\delta_1$  η διχοτόμος της γωνίας  $\varepsilon_1\text{Ο}\varepsilon_2$ . Διερευνήστε αν η ευθεία  $\delta_1$  έχει κάποια σημαντική ιδιότητα για την κατακορυφήν γωνία της  $\varepsilon_1\text{Ο}\varepsilon_2$ .



### Στόχος

Η διερεύνηση του είδους της γωνίας που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δύο κατακορυφών γωνιών.

### Κατασκευή

- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Ευθεία» και κατασκευάστε δύο τεμνόμενες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Χρησιμοποιήστε την επιλογή «Σημείο τομής» και κατασκευάστε το σημείο της τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , το οποίο να ονομάσετε  $O$ .
- Επιλέξτε τη γωνία  $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$  και κατασκευάστε τη διχοτόμο της, την οποία να ονομάσετε  $\delta_1$ .
- Επιλέξτε και μετρήστε τις γωνίες που σχηματίζει η  $\delta_1$  με την κατακορυφήν γωνία της  $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$ .
- Η  $\delta_1$  είναι σημαντική ευθεία για την κατακορυφήν γωνία της  $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$ ;

### Απάντηση

Περιστρέψτε την ευθεία  $\varepsilon_1$  στο επίπεδο της οθόνης του υπολογιστή και διερευνήστε τι συμβαίνει με τη διχοτόμο της γωνίας  $\varepsilon_1 O \varepsilon_2$ . Διατυπώστε υπόθεση.

### Διατύπωση υπόθεσης

---

---

**Α' Τάξη – Παράλληλες ευθείες τεμνόμενες υπό τρίτης**  
**1 Δραστηριότητα**  
**Χρόνος: 1 διδακτική ώρα**

**Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και μια τρίτη, την  $\varepsilon$ , η οποία να τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στα σημεία Β και Α αντίστοιχα. Στα σημεία αυτά σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Ποιες σχέσεις άραγε υπάρχουν μεταξύ των οκτώ αυτών γωνιών;

**Στόχος**

Η διερεύνηση του είδους των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ παράλληλων ευθειών τεμνόμενων υπό τρίτης.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε στην οθόνη του υπολογιστή δύο ευθείες παράλληλες, τις οποίες να ονομάσετε  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε μία τρίτη ευθεία που να τέμνει τις παράλληλες ευθείες, και ονομάστε την  $\varepsilon$ .
- Επιλέξτε όλες, και τις οκτώ γωνίες, που σχηματίζονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών και μετρήστε τις.
- Στη συνέχεια επιλέξτε την ευθεία  $\varepsilon$ , μετακινήστε τη στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές των οκτώ γωνιών που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Να διατυπώσετε υποθέσεις με βάση τα στοιχεία του πίνακα που κατασκευάσατε.

**Υπόθεση 1**

.....

.....

**Υπόθεση 2**

.....

.....

**Υπόθεση 3**

.....

.....

**Υπόθεση 4**

.....

.....

**Υπόθεση 5**

.....

.....

**Υπόθεση 6**

.....

.....

**Υπόθεση 7**

.....

.....

**Υπόθεση 8**

.....

.....

**Α' Τάξη – Γωνίες και πλευρές ενός τριγώνου****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τι συμβαίνει άραγε με το άθροισμα των γωνιών του; Υπάρχουν κάποιες σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου όταν αυτό είναι ισόπλευρο ή ισοσκελές; Πώς συνδέονται αυτές οι σχέσεις με τις πλευρές του τριγώνου στις περιπτώσεις αυτές;

**Στόχος**

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ γωνιών και μεταξύ γωνιών και πλευρών ενός τριγώνου.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και επιλέξτε τις γωνίες και τις πλευρές του, τις οποίες και να μετρήσετε και να πινακοποιήσετε αυτόματα.
- Υπολογίστε, επίσης, και πινακοποιήστε αυτόματα το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**Διερεύνηση**

Να μετακινήσετε την κορυφή  $A$  στην οθόνη του υπολογιστή και να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ των γωνιών και των πλευρών του.

1. Συγκεκριμένα, διερευνήστε τη σχέση μεταξύ γωνιών και πλευρών του τριγώνου όταν:

*A) το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

*B) το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.*

*Προχωρήστε στη διατύπωση αντίστοιχων υποθέσεων:*

*A) Όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.....*

*Αντίστροφα,*

*B) Όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.....*

*Αντίστροφα,*

2. Με βάση τα στοιχεία του πίνακα, διατυπώστε υπόθεση για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....



## Κεφάλαιο 7

### Α' Τάξη – Παραλληλόγραμμο και ιδιότητες παραλληλόγραμμων

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

Έστω ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Ποιες σχέσεις άραγε υπάρχουν μεταξύ των μηκών των πλευρών του; Ποιες σχέσεις άραγε υπάρχουν μεταξύ των γωνιών του; Υπάρχουν σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών; Εάν φέρουμε τις διαγώνιους του παραλληλόγραμμου και ορίσουμε το σημείο της τομής τους Ο, υπάρχουν άραγε κάποιες σχέσεις μεταξύ των τμημάτων στα οποία χωρίζονται οι διαγώνιοι από το σημείο Ο; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των γωνιών του παραλληλόγραμμου και των μηκών των διαγωνίων του; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών του παραλληλόγραμμου και της γωνίας των διαγωνίων του; Πότε ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, πότε ρόμβος και πότε τετράγωνο; Τι συμβαίνει με τα ύψη από δύο διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλόγραμμου προς τις απέναντι πλευρές του αντίστοιχα;

#### Στόχος

Η διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων ενός παραλληλόγραμμου, όπως και των ειδικών μορφών παραλληλόγραμμων.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Στη συνέχεια, επιλέξτε ένα σημείο της  $\varepsilon_1$  και κατασκευάστε μια τέμνουσα των παράλληλων ευθειών, την οποία να ονομάσετε  $\varepsilon_3$ .
- Επιλέξτε ένα άλλο σημείο της  $\varepsilon_1$  και κατασκευάστε την παράλληλη προς την  $\varepsilon_3$ , την οποία να ονομάσετε  $\varepsilon_4$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής των ευθειών  $\varepsilon_3$  και  $\varepsilon_4$  με τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και ονομάστε τα Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα.
- Στη συνέχεια κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ και μετρήστε τα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, τα οποία αποτελούν τις διαγώνιους του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ.
- Ορίστε το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ και ονομάστε το Ο.
- Στη συνέχεια μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ.
- Επιλέξτε τις γωνίες Α, Β, Γ, Δ του παραλληλόγραμμου, μετρήστε και πινακοποιήστε τις αυτόματα.
- Επιλέξτε, επιπλέον, τη γωνία των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ, μετρήστε και πινακοποιήστε την αυτόματα.

- Κατασκευάστε τα ύψη του παραλληλόγραμμου από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ και από την κορυφή Β προς την πλευρά ΓΔ και ονομάστε τα  $AE_1$  και  $BE_2$ , αντίστοιχα.

#### Διερεύνηση

Μετακινήστε την ευθεία  $\varepsilon_1$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα όλα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν για να διερευνήσετε για τις διαφορετικές μορφές του παραλληλόγραμμου ποιες σχέσεις υπάρχουν ανάμεσα στα διαφορετικά στοιχεία του.

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:**

1. Τι συμβαίνει με τα μεγέθη των πλευρών του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Τι συμβαίνει με τα μεγέθη των γωνιών του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Ποια είναι η σχέση των τμημάτων στα οποία τέμνονται οι διαγώνιοι του παραλληλόγραμμου;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις γωνίες του παραλληλόγραμμου και στα μήκη των διαγωνίων του; Πότε ένα παραλληλόγραμμα είναι ορθογώνιο;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

5. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα μήκη των πλευρών του παραλληλόγραμμου και στη γωνία των διαγωνίων του; Πότε ένα παραλληλόγραμμα είναι ρόμβος;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

6. Να διερευνήσετε πότε τα ύψη  $AE_1$  και  $BE_2$  βρίσκονται στο εσωτερικό του παραλληλόγραμμου, πότε συμπίπτουν με τις πλευρές του και αν είναι δυνατόν να βρίσκονται έξω από αυτό.

**Απάντηση**

.....

.....



.....

.....

.....

.....

**Α' Τάξη – Εμβαδά****3 Δραστηριότητες****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα και 20 λεπτά****Δραστηριότητα 1 – Εμβαδόν παραλληλόγραμμου – ορθογώνιου**

Πόσα παραλληλόγραμμα μπορείτε να σχεδιάσετε τα οποία να έχουν κοινή βάση και ίσα τα αντίστοιχα ύψη; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών τους; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών και των περιμέτρων τους; Ποιο παραλληλόγραμμο άραγε έχει τη μικρότερη περίμετρο;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της διατήρησης της επιφάνειας ενός παραλληλόγραμμου κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μορφής του, όπως και της σχέσης που έχει το εμβαδόν με την περίμετρό του.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα σημείο Α στην οθόνη του υπολογιστή και μία ευθεία  $\varepsilon_1$  η οποία να διέρχεται το Α.
- Από σημείο εκτός της ευθείας  $\varepsilon_1$ , κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_2$ , παράλληλη στην  $\varepsilon_1$ .
- Από το σημείο Α κατασκευάστε μία τέμνουσα των παράλληλων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και ονομάστε την  $\varepsilon_3$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  και ονομάστε το Β.
- Στη συνέχεια επιλέξτε ένα σημείο πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_1$  και ονομάστε το Δ.
- Από το σημείο Δ κατασκευάστε μια παράλληλη ευθεία στην  $\varepsilon_3$  και ονομάστε την  $\varepsilon_4$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_4$  και  $\varepsilon_3$  και ονομάστε το Γ.
- Στη συνέχεια κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το ΒΓ.
- Να φέρετε την κάθετη από το σημείο Α στην ευθεία  $\varepsilon_2$  και ονομάστε τη δ.
- Στη συνέχεια κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_2$  και δ και ονομάστε το Ε.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ, μετρήστε το και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Πολύγωνο», κατασκευάστε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Με την επιλογή «Απόσταση και μήκος», μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το εμβαδόν και την περίμετρό του.

**Διερεύνηση**

Μετακινήστε την ευθεία  $\varepsilon_3$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν, ώστε να διερευνήσετε κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μορφής του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ:

- 1) Ποια από τα στοιχεία του  $ABΓΔ$  παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μορφής του.

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

- 2) Ποια είναι η σχέση της περιμέτρου του παραλληλόγραμμου  $ABΓΔ$  με το εμβαδόν του και πότε έχουμε τη μικρότερη περίμετρο.

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

- 3) Πώς αιτιολογείται η διατήρηση του εμβαδού του παραλληλόγραμμου  $ABΓΔ$ .

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

### Δραστηριότητα 2 – Εμβαδόν τριγώνου

Έστω ένα παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και η διαγώνιός του  $ΑΓ$ . Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ του εμβαδού του παραλληλόγραμμου  $ABΓΔ$  και του εμβαδού του τριγώνου  $ABΓ$ ; Μπορείτε με βάση αυτή τη σχέση να κατασκευάσετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου; Πόσα τρίγωνα άραγε μπορείτε να σχεδιάσετε τα οποία να έχουν κοινή βάση και ίσα τα αντίστοιχα ύψη; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών τους; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών και των περιμέτρων τους; Ποιο τρίγωνο άραγε έχει τη μικρότερη περίμετρο;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του εμβαδού ενός τριγώνου και ενός παραλληλόγραμμου με κοινή βάση και ίσα ύψη, η διερεύνηση της διατήρησης της επιφάνειας ενός τριγώνου κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μορφής του, όπως και της σχέσης του εμβαδού και της περιμέτρου του.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα σημείο Α στην οθόνη του υπολογιστή και μία ευθεία  $\varepsilon_1$  η οποία να διέρχεται το Α.
- Από σημείο εκτός της ευθείας  $\varepsilon_1$ , κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_2$ , παράλληλη στην  $\varepsilon_1$ .
- Από το σημείο Α κατασκευάστε μία τέμνουσα των παράλληλων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και ονομάστε την  $\varepsilon_3$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  και ονομάστε το Β.
- Στη συνέχεια επιλέξτε ένα σημείο πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_1$  και ονομάστε το Δ.
- Από το σημείο Δ κατασκευάστε παράλληλη ευθεία στην  $\varepsilon_3$  και ονομάστε την  $\varepsilon_4$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_4$  και  $\varepsilon_3$  και ονομάστε το Γ.
- Κατόπιν κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το ΔΑ.
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Πολύγωνο», κατασκευάστε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Με την επιλογή «Απόσταση και μήκος», μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το εμβαδόν και την περίμετρό του.
- Κατασκευάστε το τμήμα ΑΓ και το τρίγωνο ΑΓΔ. Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα την περίμετρο και το εμβαδόν του.
- Κατασκευάστε την κάθετη από το σημείο Γ προς την  $\varepsilon_1$ , και ονομάστε τη ζ.
- Κατασκευάστε, επίσης, το σημείο τομής της ζ με την  $\varepsilon_1$ , και ονομάστε το Ζ. Επίσης, κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΖ, μετρήστε το και πινακοποιήστε το αυτόματα.

**Διερεύνηση**

Μετακινήστε την ευθεία  $\varepsilon_3$  στην οθόνη του υπολογιστή και διερευνήστε κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μορφής του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ:

1. Τη σχέση του εμβαδού του τριγώνου ΑΓΔ με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ.

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Ποια από τα στοιχεία του τριγώνου  $ΑΓΔ$  παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μορφής του.

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

3. Ποια είναι η σχέση της περιμέτρου του τριγώνου  $ΑΓΔ$  με το εμβαδόν του και πότε έχουμε τη μικρότερη περίμετρο.

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

4. Πώς αιτιολογείται η διατήρηση του εμβαδού του τριγώνου  $ΑΓΔ$ .

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

**Δραστηριότητα 3 – Εμβαδόν τραπεζίου**

Έστω ένα τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ // ΓΔ$ ) και το μέσον  $Μ$  της πλευράς του  $ΓΔ$ . Κατασκευάστε μία ευθεία  $ΑΜ$  η οποία να τέμνει την προέκταση της  $ΒΓ$  στο σημείο  $Ε$ . Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ των τριγώνων  $ΑΜΔ$  και  $ΓΜΕ$ ; Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ του εμβαδού του τραπεζίου  $ΑΒΓΔ$  και του τριγώνου  $ΑΒΕ$ ; Μπορείτε με βάση αυτή τη σχέση να κατασκευάσετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του τραπεζίου;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του εμβαδού του τραπεζίου και του εμβαδού ενός

τριγώνου το οποίο έχει ύψος ίσο με αυτό του τραπεζίου και βάση ίση με το άθροισμα των βάσεων του.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  στην οθόνη του υπολογιστή και μία ευθεία  $\varepsilon_1$  η οποία να διέρχεται το  $A$ .
- Από σημείο  $B$  εκτός της ευθείας  $\varepsilon_1$ , κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_2$ , παράλληλη στην  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AD$  πάνω στην  $\varepsilon_1$  και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα  $BG$  πάνω στην  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $GD$ .
- Κατασκευάστε το μέσον  $M$  του ευθύγραμμου τμήματος  $GD$  και την ευθεία που διέρχεται τα σημεία  $A$  και  $M$ .
- Ορίστε το σημείο τομής της ευθείας αυτής με την  $\varepsilon_2$  και ονομάστε το  $E$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων  $AD$ ,  $AM$ ,  $DM$  και  $MG$ ,  $GE$ ,  $EM$ . Τι παρατηρείτε;

### Διερεύνηση

1. Μετακινήστε τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $G$  και  $D$  στην οθόνη του υπολογιστή και παρατηρήστε τι συμβαίνει με τα ευθύγραμμα τμήματα που προαναφέρθηκαν. Τι συμπέρασμα βγάξετε για τα τρίγωνα  $AMD$  και  $GME$ ; Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

2. Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα εμβαδά των σχημάτων  $AMD$  και  $GME$ . Μετακινήστε τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $G$  και  $D$  και παρατηρήστε τι συμβαίνει με τα εμβαδά των σχημάτων  $AMD$  και  $GME$ .

### Απάντηση

.....

### Αιτιολόγηση

3. Να κατασκευάσετε το τρίγωνο  $ABE$  και το τραπέζιο  $ABΓΔ$  (επιλογή Πολύγωνο), να μετρήσετε και να πινακοποιήσετε αυτόματα τα εμβαδά τους. Να μετακινήσετε τα σημεία  $A, B, Γ$  και  $Δ$  και να παρατηρήσετε τι συμβαίνει με τα εμβαδά των σχημάτων  $ABE$  και  $ABΓΔ$  που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση των εμβαδών αυτών σε σχέση με τις διαφορετικές μορφές του τραπεζίου  $ABΓΔ$  στην οθόνη του υπολογιστή;

### Απάντηση

### Αιτιολόγηση

4. Από το σημείο  $A$  να φέρετε την κάθετη στην ευθεία  $ε_2$  την οποία να ονομάσετε  $δ$ , και να κατασκευάσετε το σημείο τομής της  $δ$  με την  $ε_2$  το οποίο να ονομάσετε  $Δ_1$ . Στη συνέχεια, μετρήστε το  $ΑΔ_1$ . Μετρήστε, επίσης, τα ευθύγραμμα τμήματα  $ΒΓ$  και  $ΔΑ$ . Με βάση την έως τώρα εργασία σας, μπορείτε να κατασκευάσετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του τραπεζίου;

### Απάντηση

### Αιτιολόγηση

5. Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα την παράσταση  $E = (BG + DA)/2 \cdot AD_1$  και διερευνήστε τη σχέση της με το εμβαδόν του τραπεζίου  $ABGD_1E$ .

### Απάντηση





## B' Τάξη Γυμνασίου

### Κεφάλαιο 3

#### B' Τάξη – Το πυθαγόρειο θεώρημα

##### 1 Δραστηριότητα

**Χρόνος:** 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) και τα τετράγωνα που έχουν ως πλευρές τις  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$ . Υπάρχει άραγε κάποια σχέση που να συνδέει τα εμβαδά αυτών των τετραγώνων; Με βάση την εμπειρία που αποκτήσατε, μπορείτε να σκεφτείτε ποια σχέση μπορεί να υπάρχει μεταξύ των μηκών των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου  $AB\Gamma$ ;

#### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε την κάθετη  $\varepsilon$  από το σημείο  $A$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Επιλέξτε ένα σημείο  $\Gamma$  πάνω στην  $\varepsilon$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma B$  και το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$ .
- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AB$ .
- Κατασκευάστε την τομή  $B_1$  του κύκλου  $(A, AB)$  που προαναφέρθηκε και της ευθείας  $\varepsilon$ .
- Κατασκευάστε την κάθετη  $\delta$  από το σημείο  $B_1$  στην  $\varepsilon$ .
- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $BA$ .
- Κατασκευάστε την τομή  $B_2$  του κύκλου  $(B, BA)$  που προαναφέρθηκε και της ευθείας  $\delta$ .
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Πολύγωνο», κατασκευάστε το τετράγωνο  $AB_1B_2B$ .
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Ορισμός μακροεντολής», ορίστε μακροεντολή με αρχικά σημεία τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  και τελικά τις κορυφές  $B_1$  και  $B_2$  του τετραγώνου  $AB_1B_2B$ .
- Αποθηκεύστε τη μακροεντολή με την ονομασία «Μακροεντολή 1».
- Επιλέξτε τη μακροεντολή 1 με αρχικά σημεία  $A\Gamma$ .
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Τελικά αντικείμενα», ονομάστε τα τελικά αντικείμενα  $A_1$ ,  $A_2$  και κατασκευάστε το τετράγωνο  $AA_1A_2\Gamma A$ .
- Επιλέξτε τη μακροεντολή 1 με αρχικά σημεία  $B\Gamma$ .
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Τελικά αντικείμενα», ονομάστε τα τελικά αντικείμενα  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  και κατασκευάστε τα συμμετρικά τους  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  ως προς τα

Γ και Β αντίστοιχα.

- Κατασκευάστε το τετραγώνο  $B\Gamma\Gamma_2\Gamma_1B$ . Αποκρύψτε τους κύκλους και τις ευθείες ε και δ.
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα εμβαδά των 3 τετραγώνων που δημιουργήθηκαν ( $AB_1B_2B$ ,  $AA_1A_2\Gamma$ ,  $B\Gamma\Gamma_2\Gamma_1$ ), καθώς και τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα το άθροισμα  $AB_1B_2B + AA_1A_2\Gamma$ .

### Διερεύνηση

1. Μετακίνηση των κορυφών του τριγώνου  $AB\Gamma$  σε διαφορετικές θέσεις της οθόνης του υπολογιστή και αυτόματη πινακοποίηση των μεγεθών τα οποία προαναφέρθηκαν.

**Ερώτηση:** Με βάση την εμπειρία που αποκτήσατε, τι παρατηρείτε;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

2. Μέτρηση και αυτόματη πινακοποίηση των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Υπολογισμός και αυτόματη πινακοποίηση των  $(AB)^2$ ,  $(A\Gamma)^2$ ,  $(B\Gamma)^2$ , όπως και του αθροίσματος  $(AB)^2 + (A\Gamma)^2$ . Μετακίνηση των κορυφών του τριγώνου  $AB\Gamma$  σε διαφορετικές θέσεις της οθόνης του υπολογιστή και αυτόματη πινακοποίηση των μεγεθών τα οποία προαναφέρθηκαν.

**Ερώτηση:** Με βάση την εμπειρία που αποκτήσατε, μπορείτε να διατυπώσετε μια υπόθεση για τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός ορθογώνιου;

### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

**B' Τάξη – Συντεταγμένες στο επίπεδο****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και πάρτε όσα σημεία επιθυμείτε στο δεύτερο τεταρτημόριο τα οποία να ονομάσετε  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Στη συνέχεια να κατασκευάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ . Να πάρετε τα συμμετρικά αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων ως προς τους άξονες  $Ox'$ ,  $Oy$  και ως προς το σημείο  $O$ . Να ονομάσετε τις κορυφές των αντίστοιχων σχημάτων  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ . Ποιες είναι οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες κάθε σημείου με τα συμμετρικά του ως προς τους άξονες  $Ox'$ ,  $Oy$  και ως προς το σημείο  $O$ ;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της μεταβολής των τιμών των συντεταγμένων σημείου ως προς τους άξονες  $Oy$  και  $Ox'$  ορθοκανονικού συστήματος αξόνων, όπως και ως προς το σημείο τομής τους  $O$ .

**Κατασκευή**

- Εμφανίστε τους άξονες στην οθόνη του υπολογιστή, βαθμολογήστε τους και επιλέξτε πλέγμα (είναι το αντίστοιχο μιλιμετρέ χαρτί).
- Κατασκευάστε στο δεύτερο τεταρτημόριο όσα σημεία θέλετε, π.χ., τα  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  και  $A_7$ .
- Κατασκευάστε και τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα που επιθυμείτε, όπως, π.χ., τα  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7$ .
- Κατασκευάστε τα συμμετρικά αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων ως προς τον άξονα  $Ox'$  και  $Oy$ , χρησιμοποιώντας την επιλογή «Ανάκλαση» και κάνοντας κλικ στον αντίστοιχο άξονα. Με την επιλογή «Συμμετρία», κατασκευάστε τα συμμετρικά αυτών των τμημάτων, ως προς το κέντρο των αξόνων.
- Ονομάστε και υπολογίστε τις συντεταγμένες των κορυφών των σχημάτων που προέκυψαν και τοποθετήστε τις στον παρακάτω πίνακα.

Συντεταγμένες κορυφών σχήματος			
	Συμμ. ως προς $Oy$	Συμμ. ως προς $O$	Συμμ. ως προς $Ox'$
$A_1 =$	$B_1 =$	$\Gamma_1 =$	$\Delta_1 =$
$A_2 =$	$B_2 =$	$\Gamma_2 =$	$\Delta_2 =$
$A_3 =$	$B_3 =$	$\Gamma_3 =$	$\Delta_3 =$
$A_4 =$	$B_4 =$	$\Gamma_4 =$	$\Delta_4 =$



Συντεταγμένες κορυφών σχήματος			
	Συμμ. ως προς $O\psi$	Συμμ. ως προς $O$	Συμμ. ως προς $O\chi'$
$A_5 =$	$B_5 =$	$\Gamma_5 =$	$\Delta_5 =$
$A_6 =$	$B_6 =$	$\Gamma_6 =$	$\Delta_6 =$
$A_7 =$	$B_7 =$	$\Gamma_7 =$	$\Delta_7 =$

**Ερώτηση 1:**

Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των αρχικών σημείων (τα  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  και  $A_7$ ) και των συντεταγμένων των συμμετρικών τους ως προς τους άξονες  $O\chi, O\psi'$  και ως προς το σημείο  $O$ . Με βάση αυτή την εμπειρία, τι υποθέσεις μπορείτε να διατυπώσετε;

**Διατύπωση υπόθεσης 1**

.....

.....

**Διατύπωση υπόθεσης 2**

.....

.....

**Διατύπωση υπόθεσης 3**

.....

.....

**Ερώτηση 2:**

Μετακινήστε ορισμένα σημεία του σχήματός σας, π.χ. το  $A_1$  ή το  $A_2$ , στην οθόνη του υπολογιστή και διερευνήστε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των άκρων τους και των συντεταγμένων των συμμετρικών τους ως προς τους άξονες  $O\chi, O\psi'$  και ως προς το σημείο  $O$ . Τι μεταβολές παρατηρείτε στις συντεταγμένες των αντίστοιχων συμμετρικών σχημάτων;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

## Κεφάλαιο 4

### Β' Τάξη – Ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη οξείας γωνίας

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) και  $\Gamma$  η μία από τις οξείες γωνίες του. Ποια σχέση άραγε υπάρχει μεταξύ της μεταβολής της γωνίας  $\Gamma$  και της μεταβολής των τριγωνομετρικών αριθμών της (ημ, συν, εφ); Ποιοι είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών όπως  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$ ;

#### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της μεταβολής μιας οξείας γωνίας και της μεταβολής των τριγωνομετρικών αριθμών της (τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$  μοιρών).

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $OM$ .
- Επιλέξτε το σημείο  $B$  πάνω στον κύκλο, κατασκευάστε το συμμετρικό του  $B$  ως προς  $O$ , και ονομάστε το  $\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A$  πάνω στον κύκλο ( $O, OM$ ) και μετρήστε τη γωνία  $BA\Gamma$  προκειμένου να διαπιστώσετε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  και τη γωνία  $\Gamma$  και πινακοποιήστε αυτόματα τα μήκη τους.
- Υπολογίστε αυτόματα τους λόγους  $AB/B\Gamma$ ,  $A\Gamma/B\Gamma$  και  $AB/A\Gamma$ , ονομάστε τα  $\eta\mu\Gamma$ ,  $\sigma\upsilon\nu\Gamma$  και  $\epsilon\phi\Gamma$  αντίστοιχα και πινακοποιήστε τις αντίστοιχες τιμές τους.
- Μετακινήστε το σημείο  $A$  στην περιφέρεια του κύκλου ( $O, OM$ ) και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.
- Η μετακίνηση είναι καλό να γίνει έτσι ώστε το μήκος της πλευράς  $AB$  να αυξάνεται στις πρώτες 5-6 μορφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  ενώ θα μειώνεται στις επόμενες.
- Επιπλέον, μετακινήστε την κορυφή  $A$  ώστε η γωνία  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  να πάρει τις τιμές  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$  μοίρες αντίστοιχα.

#### Διερεύνηση

Διερευνήστε πώς συνδέεται η μεταβολή  $\alpha$ ) του μήκους της πλευράς  $AB$  με τη μεταβολή του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης της γωνίας  $\Gamma$ ,  $\beta$ ) του μήκους της πλευράς  $A\Gamma$  με τη μεταβολή του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης της γωνίας  $\Gamma$ ,  $\gamma$ ) της οξείας γωνίας  $\Gamma$  με τη μεταβολή του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης της. Διατυπώστε αντίστοιχες υποθέσεις:

*Διατύπωση υποθέσεων α' μέρους*

Διατύπωση υπόθεσης 1 .....

.....

Διατύπωση υπόθεσης 2 .....

.....

Διατύπωση υπόθεσης 3 .....

.....

*Διατύπωση υποθέσεων β' μέρους*

Διατύπωση υπόθεσης 1 .....

.....

Διατύπωση υπόθεσης 2 .....

.....

Διατύπωση υπόθεσης 3 .....

.....

*Διατύπωση υποθέσεων γ' μέρους*

Διατύπωση υπόθεσης 1 .....

.....

Διατύπωση υπόθεσης 2 .....

.....

Διατύπωση υπόθεσης 3 .....

.....

.....

δ) Ποιες είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών που αντιστοιχούν στις γωνίες των  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$  μοιρών αντίστοιχα;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....





## Κεφάλαιο 7

### B' Τάξη – Συμμετρία ως προς άξονα

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

A) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το συμμετρικό του  $A'B'\Gamma'$  ως προς άξονα συμμετρίας  $\varepsilon_1$ . Να διερευνήσετε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών τριγώνων.

B) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς ένα νέο άξονα συμμετρίας  $\varepsilon_2$ , το οποίο να ονομάσετε  $A''B''\Gamma''$ . Ποια σχέση άραγε υπάρχει μεταξύ των τριών αυτών τριγώνων;

#### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης ενός σχήματος και του συμμετρικού του ως προς άξονα συμμετρίας. Επιπλέον, η διερεύνηση της σχέσης ενός σχήματος και του συμμετρικού του ύστερα από αλληλουχία συμμετρίων ως προς άξονα.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το συμμετρικό του ως προς έναν άξονα  $\varepsilon_1$  και ονομάστε το  $A' B' \Gamma'$ .
- Κατασκευάστε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις πλευρές των δύο αυτών τριγώνων.

#### Διερεύνηση

1. Μετακινήστε την ευθεία  $\varepsilon_1$  στην οθόνη του υπολογιστή έτσι ώστε να βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  ή να διέρχεται μία κορυφή του. Πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

3. Κατασκευάστε το συμμετρικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς ένα νέο άξονα  $\varepsilon_2$  και ονομάστε το  $A'' B'' \Gamma''$ . Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις πλευρές του. Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή. Πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

- Δ) Κατασκευάστε το συμμετρικό του τριγώνου  $A'B'\Gamma'$  ως προς τον άξονα  $\varepsilon_2$  το οποίο ονομάστε  $\Delta EZ$ , και μετρήστε τις πλευρές του. Μετακινήστε τους άξονες εκ περιτροπής ή τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τι παρατηρείτε;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

## Β' Τάξη – Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα 1α

Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το συμμετρικό του  $A' B' \Gamma'$  ως προς σημείο  $O$ . Να διερευνήσετε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών τριγώνων.

#### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης ενός σχήματος και του συμμετρικού του ύστερα από αλληλουχία συμμετριών ως προς σημεία συμμετρίας.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ένα σημείο  $O$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε το συμμετρικό του  $AB\Gamma$  ως προς το σημείο  $O$  και ονομάστε το  $A' B' \Gamma'$ .
- Κατασκευάστε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις πλευρές των δύο τριγώνων.

#### Διερεύνηση

1. Μετακινήστε το σημείο  $O$  στην οθόνη του υπολογιστή έτσι ώστε το  $O$  να βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  ή να συμπίπτει με μία κορυφή του. Τι συμπεραίνετε;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

#### Απάντηση

.....

.....

3. Να κατασκευάσετε ένα σημείο  $O'$  και να πάρετε το συμμετρικό (επιλογή Ανάκλαση) του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς κέντρο συμμετρίας  $O'$ , το οποίο να ονομάσετε  $A''B''\Gamma''$ . Να κατασκευάσετε, να μετρήσετε και να πινακοποιήσετε αυτόματα τις πλευρές του. Να μετακινήσετε το κέντρο συμμετρίας  $O'$  και τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και να πινακοποιήσετε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

### Απάντηση

### Δραστηριότητα 1β

Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο στο περιβάλλον Cabri – geometry II. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των πλευρών ή των γωνιών του τριγώνου που κατασκευάστηκε; Διερευνήστε κατά πόσον υπάρχουν άξονες συμμετρίας στο ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και, στην περίπτωση που υπάρχουν, προσπαθήστε να τους προσδιορίσετε.

### Στόχος

Η κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου με τη βοήθεια των εργαλείων που χρησιμοποιούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων στο περιβάλλον Cabri – geometry II.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $B$  και Ακτίνα  $B\Gamma$ , όπως επίσης κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma B$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A$  της τομής των δύο αυτών κύκλων.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$ .
- Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$ , όπως και τις γωνίες  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .

### Διερεύνηση

1. Μετακινήστε τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή, πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν και διατυπώστε υπόθεση για το είδος του τριγώνου που σχηματίστηκε.

### Διατύπωση υπόθεσης

2. Αποκρύψτε τους κύκλους που κατασκεύασατε προηγουμένως. Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon$  η οποία να διέρχεται την κορυφή  $\Gamma$ . Κατασκευάστε, επίσης, το σημείο τομής της  $\varepsilon$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , το οποίο ονομάστε  $M$ . Κατασκευάστε και μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AM$  και  $MB$ . Κατασκευάστε το τρίγωνο  $BMG$  και πάρτε το συμμετρικό του  $M\Delta\Gamma$  (επιλογή Ανάκλαση) ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ . Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BM$ ,  $M\Delta$ ,  $B\Gamma$  και  $\Delta\Gamma$  και πινακοποιήστε αυτόματα τα μήκη τους. Κατόπιν, μετακινήστε την ευθεία  $\varepsilon$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Διερευνήστε πότε η ευθεία  $\varepsilon$  αποτελεί άξονα συμμετρίας του τριγώνου  $AB\Gamma$ , δηλαδή για ποια θέση της  $\varepsilon$  το συμμετρικό του τριγώνου  $BMG$  συμπίπτει με το τρίγωνο  $M\Delta\Gamma$ .

### Απάντηση



## Κεφάλαιο 8

**Β' Τάξη – Σχέση μεταξύ επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας**

**1 Δραστηριότητα**

**Χρόνος: 30 λεπτά**

### Δραστηριότητα

Να κατασκευάσετε έναν κύκλο με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AB$ . Στη συνέχεια να κατασκευάσετε την επίκεντρη γωνία  $\Delta_1 A \Delta_2$  και την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία  $\Delta_1 \Delta_3 \Delta_2$ . Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ αυτών των γωνιών;

### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας, οι οποίες σε ίσους κύκλους βαίνουν αντίστοιχα σε ίσα τόξα.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τον κύκλο κέντρου  $A$  και ακτίνας  $AB$ .
- Στη συνέχεια κατασκευάστε τρία σημεία πάνω στον κύκλο ( $A, AB$ ) και ονομάστε τα  $\Delta_1, \Delta_2$  και  $\Delta_3$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \Delta_3 \Delta_1$  και  $\Delta_3 \Delta_2$ .
- Μετρήστε τις γωνίες  $\Delta_1 \Delta_3 \Delta_2$  και  $\Delta_1 A \Delta_2$  και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές τους.

### Διερεύνηση

Μετακινήστε το σημείο  $\Delta_2$  πάνω στον κύκλο ( $A, AB$ ) και πινακοποιήστε τις τιμές των γωνιών που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:**

1. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας σε ίσα τόξα;



### Απάντηση

---

---

---

---

---

---

---

2. Κατασκευάστε το συμμετρικό του σημείου  $B$  ως προς το κέντρο  $A$  του κύκλου και ονομάστε το  $\Delta'$ . Μετακινήστε τα σημεία  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  πάνω στον κύκλο  $(A, AB)$  ώστε να συμπίπτουν με τα σημεία  $\Delta'$  και  $B'$  αντίστοιχα και η εγγεγραμμένη γωνία  $\Delta_1\Delta_3\Delta_2$  να βαίνει σε διάμετρο. Ποιο είναι το μέγεθος της γωνίας αυτής και ποια είναι η σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία;

### Απάντηση

---

---

---

---

---

---

---

**B' Τάξη – Κανονικά πολύγωνα – Μήκος και εμβαδόν κύκλου****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε έναν κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $OA_1$ . Στον κύκλο αυτό εγγράψτε ένα κανονικό οκτάγωνο. Στη συνέχεια να ενώσετε ανά δύο τις κορυφές του ώστε να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο στον ίδιο κύκλο.

**A)** Ποιες σχέσεις άραγε υπάρχουν μεταξύ των περιμέτρων, των δύο πολυγώνων ή των εμβαδών τους;

**B)** Αν κατασκευάσουμε διαφορετικούς κύκλους ποια σχέση άραγε υπάρχει μεταξύ των περιμέτρων, των δύο κύκλων ή των εμβαδών τους; Πώς επιδρά άη μεταβολή της ακτίνας του κύκλου στη γωνία του εγγεγραμμένου κανονικού πολύγωνα;

**Γ)** Διερευνήστε ποια σχέση μπορεί να υπάρχει μεταξύ της περιμέτρου ενός κανονικού πολύγωνα και του αριθμού των πλευρών του. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της περιμέτρου ενός κανονικού πολύγωνα και του περιγεγραμμένου σε αυτό κύκλου;

**Στόχος**

Η κατασκευή κανονικού πολύγωνα στο περιβάλλον Cabri – geometry II και η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ βασικών στοιχείων κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα  $OA_1$  και κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $OA_1$ .
- Κατασκευάστε σημείο  $A_2$  πάνω στον κύκλο  $(O, OA_1)$  και το ευθύγραμμο τμήμα  $OA_2$ . Μετρήστε τη γωνία  $A_1OA_2$ .

Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό οκτάγωνο.

- Διαιρέστε τη γωνία  $360^\circ/8=45^\circ$  και μετακινήστε το σημείο  $A_2$  στην περιφέρεια του κύκλου  $(O, OA_1)$ , έτσι ώστε η γωνία  $A_1OA_2$  να είναι  $45^\circ$  μοιρών.
- Στη συνέχεια, κατασκευάστε το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος  $OA_1$  ως προς το ευθύγραμμο τμήμα  $OA_2$ , έτσι ώστε να προκύψει ένα νέο ευθύγραμμο τμήμα. Ονομάστε το  $OA_3$ .
- Επαναλάβετε τη διαδικασία κατασκευής συμμετρικού του  $OA_{n-1}$  ευθύγραμμου τμήματος ως προς το εκάστοτε  $OA_n$  ευθύγραμμο, τόσες φορές ώστε να προκύψει το ζητούμενο κανονικό πολύγωνο. Σε αυτή την περίπτωση έξι φορές.
- Στη συνέχεια, ονομάστε τις υπόλοιπες κορυφές του κανονικού οκτάγωνα  $(OA_4, OA_5, OA_6, OA_7$  και  $OA_8)$ .
- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Πολύγωνο», κατασκευάστε το οκτάγωνο και το τετράγωνο συνδέοντας ανά δύο τις κορυφές του κανονικού οκτάγωνα.

### Διερεύνηση

Μετρήστε την πλευρά, τη γωνία, το εμβαδόν και την περίμετρο του κανονικού οκταγώνου και του τετραγώνου. Μετρήστε, επίσης, την ακτίνα  $OA_B$ , το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου  $(O, OA_1)$  και πινακοποιήστε τα αυτόματα. Μετακινήστε το  $A_1$  έτσι ώστε να μεταβληθεί η ακτίνα του κύκλου και πινακοποιήστε αυτόματα όλες τις τιμές που προαναφέρθηκαν. Τι σχέσεις μπορείτε να διαπιστώσετε;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:**

**1.** Ποια είναι η σχέση μεταξύ των περιμέτρων δύο κύκλων;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

**2.** Ποια είναι η σχέση μεταξύ των εμβαδών δύο κύκλων;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

**3.** Ποια είναι η σχέση μεταξύ των περιμέτρων των δύο πολυγώνων στον ίδιο κύκλο;

### Απάντηση

.....

.....

.....

4. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των εμβαδών των δύο πολυγώνων στον ίδιο κύκλο;

**Απάντηση**

5. Πώς μεταβάλλεται η γωνία του ενός κανονικού πολυγώνου το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο όταν μεταβάλλεται η ακτίνα του κύκλου;

**Απάντηση**

6. Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στην περίμετρο ενός κανονικού πολυγώνου και στον αριθμό των πλευρών του και πώς αυτή η περίμετρος συνδέεται με το μήκος του περιγεγραμμένου προς αυτό κύκλου;

**Απάντηση**



**B' Τάξη – Μήκος και εμβαδόν κύκλου****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω κύκλος κέντρο  $O$  και διαμέτρου  $BΓ$ . Στον κύκλο αυτό εγγράφουμε ορθογώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  και κατασκευάζουμε τους κύκλους με κέντρα  $O_1$  και  $O_2$  και τις διαμέτρους  $ΑΓ$  και  $ΒΓ$  αντίστοιχα. Να διερευνηθούν οι σχέσεις μεταξύ των περιμέτρων των τριών κύκλων, όπως και των εμβαδών τους αντίστοιχα. Επιπλέον, να διερευνηθούν οι σχέσεις μεταξύ των εμβαδών των τριών ημικυκλίων που προκύπτουν από τους τρεις αυτούς κύκλους.

**Στόχος**

Διερεύνηση των σχέσεων ακτίνας, μήκους και εμβαδού κύκλων.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα  $BΓ$  και το μέσον του  $O$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $ΟΓ$ , μετρήστε και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $ΟΓ$ . Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα την περίμετρο ( $Πκ1$ ) και το εμβαδόν του ( $Εκ2$ ).
- Κατασκευάστε σημείο  $A$  πάνω στον κύκλο ( $O, ΟΓ$ ) και το ευθύγραμμο τμήμα  $ΑΓ$ .
- Κατασκευάστε το μέσον  $O_1$  του  $ΑΓ$ . Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το ευθύγραμμο τμήμα  $O_1Γ$ .
- Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο  $O_1$  και ακτίνα  $O_1Γ$ . Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα την περίμετρο ( $Πκ2$ ) και το εμβαδόν του ( $Εκ2$ ).
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $ΑΒ$  και το μέσον του  $O_2$ .
- Κατασκευάστε και μετρήστε το ευθύγραμμο τμήμα  $O_2B$ .
- Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο  $O_2$  και ακτίνα  $O_2B$  και μετρήστε την περίμετρο και το εμβαδόν του.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα εμβαδά των ημικυκλίων τα οποία αντιστοιχούν στους κύκλους ( $O, ΟΓ$ ), ( $O_1, O_1Γ$ ) και ( $O_2, O_2B$ ).
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη  $ΟΓ/O_1Γ$ ,  $(ΟΓ/O_1Γ)^2$ ,  $Πκ1/Πκ2$ ,  $Εκ1/Εκ2$ .
- Τέλος, μετακινήστε το σημείο  $B$  ή το σημείο  $Γ$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές των στοιχείων που επιλέξατε προηγουμένως για πινακοποίηση.

**Διερεύνηση**

Να διερευνήσετε τη σχέση:

- Α) των περιμέτρων των κύκλων  $(O, OΓ)$ ,  $(O_1, O_1Γ)$  και των ακτίνων τους.  
Β) των εμβαδών των κύκλων  $(O, OΓ)$ ,  $(O_1, O_1Γ)$  και των ακτίνων τους.  
Γ) των εμβαδών των ημικυκλίων τα οποία αντιστοιχούν στους κύκλους  $(O, OΓ)$ ,  $(O_1, O_1Γ)$  και  $(O_2, O_2B)$ .

**Απάντηση Α**

---

---

---

---

---

---

---

**Απάντηση Β**

---

---

---

---

---

---

---

**Απάντηση Γ**

---

---

---

---

---

---

---

**Ειδικότερα, καλείστε να διερευνήσετε:**

*Ποια είναι η σχέση...*

- 1) ...του λόγου των περιμέτρων των κύκλων  $(O, OΓ)$ ,  $(O_1, O_1Γ)$  και του λόγου των ακτίνων τους.

**Απάντηση**

---

---

- 2) ...του λόγου των εμβαδών των κύκλων  $(O, OΓ)$ ,  $(O_1, O_1Γ)$  και του τετραγώνου του λόγου των ακτίνων τους.

### Απάντηση

- 3) ...του αθροίσματος των εμβαδών των ημικυκλίων τα οποία αντιστοιχούν στους κύκλους  $(O_1, O_1Γ)$  και  $(O_2, O_2B)$  και του εμβαδού του ημικυκλίου που αντιστοιχεί στον κύκλο  $(O, OΓ)$ .

### Απάντηση





**Γ' Τάξη Γυμνασίου – Κεφάλαιο 6****Γ' Τάξη – Τρίγωνα και ίσα τρίγωνα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και τις διαμέσους από τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$ , τις οποίες να ονομάσετε  $BZ$  και  $\Gamma E$ . Επιπλέον, να κατασκευάσετε τα ύψη από τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$ , τα οποία να ονομάσετε  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ , και τις διχοτόμους των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$ , τις οποίες να ονομάσετε  $BM$  και  $\Gamma N$ . Να διερευνήσετε ποιες σχέσεις μπορεί να συνδέουν τα παραπάνω μεγέθη.

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων που έχουν οι διχοτόμοι των υψών και οι διάμεσοι ισοσκελούς τριγώνου.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το μέσον του  $\Delta$  του  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε τη μεσοκάθετο του  $B\Gamma$  και ονομάστε την  $\epsilon$ .
- Κατασκευάστε σημείο  $A$  πάνω στην  $\epsilon$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $AG$ .
- Κατασκευάστε τα μέσα  $Z$  και  $E$  των πλευρών  $AG$  και  $AB$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BZ$  και  $\Gamma E$ , μετρήστε και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AE$ ,  $BE$ ,  $AZ$  και  $\Gamma Z$  και μετρήστε τα.
- Κατασκευάστε τις καθέτους από τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  προς τις απέναντι πλευρές του τριγώνου, ορίστε τα σημεία τομής και ονομάστε τα  $K$  και  $\Lambda$ , αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ , μετρήστε και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Κατασκευάστε τις διχοτόμους των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$ , ορίστε τα σημεία τομής τους με τις απέναντι πλευρές του τριγώνου και ονομάστε τα  $M$  και  $N$ , αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BM$  και  $\Gamma N$ , μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα.

**Διερεύνηση**

1. Μετακινήστε τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές των παραπάνω ευθύγραμμων τμημάτων. Τι συμπεραίνετε;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

2. Με βάση τον πειραματισμό, μπορείτε να διατυπώσετε τη γενίκευση;

### Διατύπωση της γενίκευσης

.....

.....

### Ειδικότερα:

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $ABΓ$  συγκρίνετε:

- A) τις διαμέσους του  $BZ$  και  $ΓΕ$ ,
- B) τα ύψη του  $BK$  και  $ΓΛ$  και
- Γ) τις διχοτόμους του  $BM$  και  $ΓN$ .

Τι συμπεραίνετε;

### Απάντηση

A) .....

.....

B) .....

.....

Γ) .....

.....

**Γ' Τάξη – Ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων – Θεώρημα του Θαλή****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω τρεις παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  οι οποίες τέμνονται από ζεύγος ευθειών  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  στα σημεία A, B, Γ και A', B' και Γ' αντίστοιχα. Ποιες σχέσεις άραγε υπάρχουν μεταξύ των τμημάτων στα οποία χωρίζονται οι ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  από τις παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  αντίστοιχα;

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων των τμημάτων στα οποία τέμνονται δύο ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  από μία δέσμη παράλληλων ευθειών  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$ .

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ευθεία  $\varepsilon_1$  η οποία να διέρχεται ένα σημείο  $O_1$ .
- Στη συνέχεια κατασκευάστε την παράλληλη προς την  $\varepsilon_1$  από σημείο  $O_2$  έξω από αυτήν, και ονομάστε την  $\varepsilon_2$ .
- Επιπλέον, κατασκευάστε την παράλληλη προς την  $\varepsilon_2$  από σημείο  $O_3$  έξω από αυτήν, και ονομάστε την  $\varepsilon_3$ .
- Κατασκευάστε, επίσης, δύο ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  από τα σημεία  $O_4$  και  $O_5$  αντίστοιχα, οι οποίες να τέμνουν τις παράλληλες ευθείες που προαναφέρθηκαν.
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής της  $\zeta_1$  με τις  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  και ονομάστε τα A, B και Γ αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε επίσης τα σημεία τομής της  $\zeta_2$  με τις  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  και ονομάστε τα A', B' και Γ', αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε και μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BΓ, AΓ και τα A'B', B'Γ', A'Γ'.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τους λόγους AB/BΓ, A'B'/B'Γ', AB/AΓ και A'B'/A'Γ'.

**Διερεύνηση**

1. Μετακινήστε τις ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  από τα σημεία  $O_1$ ,  $O_2$  και  $O_3$  αντίστοιχα, όπως και τις ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  από τα σημεία  $O_4$  και  $O_5$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές των λόγων που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**


---



---



---

2. Μπορείτε να διατυπώσετε τη γενίκευση;

#### Διατύπωση της γενίκευσης

#### Ειδικότερα:

1. Συγκρίνετε τους λόγους των ευθύγραμμων τμημάτων  $AB/BΓ$ ,  $A'B'/B'Γ'$ , όπως και τους λόγους των ευθύγραμμων τμημάτων  $AB/ΑΓ$  και  $A'B'/A'Γ'$ .

#### Απάντηση

2. Όταν τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $BΓ$  είναι ίσα, τι συμπεραίνετε για τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα  $A'B'$  και  $B'Γ'$ ;

#### Συμπέρασμα

3. Μπορείτε να διατυπώσετε τη γενίκευση με βάση τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε;

#### Διατύπωση της γενίκευσης

4. Μπορείτε να προσδιορίσετε τι συμβαίνει όταν οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  τέμνονται από τις ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$  σε ίσα ευθύγραμμα τμήματα;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Γ' Τάξη – Όμοια πολύγωνα και όμοια τρίγωνα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα των πλευρών του  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$ . Ποιες σχέσεις άραγε υπάρχουν ανάμεσα στα στοιχεία του τριγώνου  $AB\Gamma$  και στο τρίγωνο  $M_1M_2M_3$ ;

**Στόχος**

Η διερεύνηση του είδους του τριγώνου του οποίου οι κορυφές αποτελούν μέσα των πλευρών ενός τυχαίου τριγώνου και, επίσης, των σχέσεων μεταξύ βασικών στοιχείων των τριγώνων αυτών.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα των πλευρών του  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ .
- Κατασκευάστε το τρίγωνο  $M_1M_2M_3$ .
- Κατασκευάστε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις πλευρές και τις γωνίες των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $M_1M_2M_3$ .
- Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

1. Διατυπώστε οποιεσδήποτε υποθέσεις μπορείτε για το είδος του τριγώνου  $M_1M_2M_3$ .

**Υπόθεση 1**

.....

.....

**Υπόθεση 2**

.....

.....

**Υπόθεση 3**

.....

.....



**Ειδικότερα:**

Α) Συγκρίνετε τις γωνίες των τριγώνων  $M_1M_2M_3$  και  $AB\Gamma$  με βάση τα στοιχεία του πίνακα που κατασκευάσατε. Με βάση αυτήν τη σύγκριση, τι συμπεραίνετε για το είδος του τριγώνου  $M_1M_2M_3$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Συμπέρασμα**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....

Β) Ποια είναι η σχέση των πλευρών των τριγώνων  $M_1M_2M_3$  και  $AB\Gamma$ ;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Γ) Πότε το τρίγωνο  $M_1M_2M_3$  είναι ισοσκελές και πότε είναι ισόπλευρο;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις περιμέτρους και τα εμβαδά των τριγώνων  $M_1M_2M_3$  και  $AB\Gamma$ .

Α) Διερευνήστε τη σχέση των περιμέτρων των τριγώνων  $M_1M_2M_3$  και  $AB\Gamma$ .

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Β)** Διερευνήστε τη σχέση των εμβαδών των τριγώνων  $M_1M_2M_3$  και  $ABΓ$ .

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Γ' Τάξη – Εμβαδά των ομοίων σχημάτων****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε δύο ομόκεντρους κύκλους και να εγγράψετε σε καθέναν από αυτούς ένα κανονικό πολύγωνο (π.χ. ένα οκτάγωνο). Ποιες είναι άραγε οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων στοιχείων τους, όπως πλευρών, εμβαδών, περιμέτρων και ακτίνων των περιγεγραμμένων κύκλων;

**Στόχος**

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ βασικών στοιχείων ομοίων σχημάτων.

**Κατασκευή**

- Χρησιμοποιώντας την επιλογή «Κανονικό πολύγωνο», κατασκευάστε ένα κανονικό οκτάγωνο.
- Σε έναν ομόκεντρο κύκλο με τον κύκλο στον οποίο εγγράφηκε το προηγούμενο οκτάγωνο, εγγράψτε ένα ακόμη οκτάγωνο με τη διαδικασία που προαναφέρθηκε.
- Μετρήστε και πινακοποιήστε τις πλευρές, τις περιμέτρους και τα εμβαδά των δύο οκταγώνων, όπως και τις ακτίνες των περιγεγραμμένων σε αυτά κύκλων.
- Μετακινήστε τις κορυφές των οκταγώνων στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διατυπώστε υποθέσεις για όλες τις δυνατές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των σχημάτων.

**Υπόθεση 1**


---



---

**Υπόθεση 2**


---



---

**Υπόθεση 3**


---



---

#### Υπόθεση 4

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:**

1. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις πλευρές των κανονικών οκταγώνων και στις περιμέτρους τους;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

2. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις πλευρές των κανονικών οκταγώνων και στα εμβαδά τους;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

3. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα κανονικά οκτάγωνα και στις περιμέτρους τους;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

4. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στις ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα κανονικά οκτάγωνα και στα εμβαδά τους;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## Κεφάλαιο 7

### Γ' Τάξη – Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

- A) Να διερευνήσετε ποια σχέση μπορεί να υπάρχει μεταξύ μιας οξείας γωνίας ενός ορθογώνιου τριγώνου και των τριγωνομετρικών αριθμών της (ημ και συν).  
 B) Να διερευνήσετε ποιες σχέσεις μπορεί συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των συμπληρωματικών γωνιών.  
 Γ) Να διερευνήσετε τη μεταβολή των παρακάτω παραστάσεων όταν μεταβάλλεται η τιμή των γωνιών B και Γ.  
 Γ<sub>1</sub>) ημB-συνΓ, Γ<sub>2</sub>) ημB+συνΓ και Γ<sub>3</sub>) 2ημB.

#### Στόχος

Η διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ μιας οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου και των τριγωνομετρικών αριθμών της (τριγωνομετρικοί αριθμοί συμπληρωματικών γωνιών). Επίσης, η διερεύνηση της αλήθειας βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και την κάθετη ε από το A στο AB.
- Κατασκευάστε ένα σημείο Γ πάνω στην ε και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΓ.
- Κατασκευάστε, μετρήστε και πινακοποιήστε τις γωνίες B και Γ.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε τους λόγους ΑΓ/ΒΓ, ΑΒ/ΒΓ, οι οποίοι αποτελούν το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας B.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε τις τιμές των παραστάσεων ημB-συνΓ, ημB+συνΓ και 2ημB.
- Μετακινήστε τις κορυφές B και Γ του τριγώνου ABΓ στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, κάντε υποθέσεις για όλες τις δυνατές σχέσεις των στοιχείων του τριγώνου ABΓ και των παραστάσεων που υπολογίστηκαν.

#### Υπόθεση 1

.....

.....



### Υπόθεση 2

.....

.....

### Υπόθεση 3

.....

.....

### Υπόθεση 4

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να διερευνήσετε:**

1. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα σε μία οξεία γωνία του ορθογώνιου τριγώνου  $AB\Gamma$  και στους τριγωνομετρικούς αριθμούς της (ημ και συν).

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών (ημ και συν) γωνιών που έχουν άθροισμα  $90$  μοίρες (άρα συμπληρωματικών γωνιών).

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

3. Πώς μεταβάλλεται η τιμή των παρακάτω παραστάσεων όταν μεταβάλλεται η τιμή των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$ :

- α)  $\eta\mu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma$ ,
- β)  $\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma$  και
- γ)  $2\eta\mu B$ .

*Ποιες ερμηνείες δίνετε;*

**Απάντηση**

$\eta\mu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma =$  .....

επειδή .....

.....

$\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\eta\mu B$

επειδή .....

.....



**Γ' Τάξη – Σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Να διερευνήσετε την αλήθεια βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων όπως οι παρακάτω:

- A)  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon^2\omega = 1$   
 B)  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2 = 2$   
 Γ)  $\eta\mu\omega / \sigma\upsilon\omega = \epsilon\phi\omega$   
 Δ)  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\omega)^2 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\omega$   
 E)  $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2 = 1 - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\omega$

**Στόχος**

Η διερεύνηση της αλήθειας βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων όπως οι εξής:

- A)  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon^2\omega = 1$   
 B)  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2 = 2$   
 Γ)  $\eta\mu\omega / \sigma\upsilon\omega = \epsilon\phi\omega$   
 Δ)  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\omega)^2 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\omega$   
 E)  $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2 = 1 - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\omega$

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τους άξονες καρτεσιανών συντεταγμένων και πάρτε ένα σημείο A πάνω στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα OA και μετρήστε το.
- Φέρετε την κάθετη από το A στον άξονα Oχ, ορίστε το σημείο τομής B των δύο αυτών ευθειών, κατασκευάστε και μετρήστε το ευθύγραμμο τμήμα AB.
- Κατασκευάστε, επίσης, και μετρήστε τη γωνία BOA και το ευθύγραμμο τμήμα OB.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε τους λόγους AB/OA, OB/OA και AB/OB, οι οποίοι αποτελούν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας BOA=ω αντίστοιχα.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε τις τιμές των παραστάσεων.

$$K1 = \eta\mu\omega / \sigma\upsilon\omega$$

$$K2 = \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon^2\omega$$

$$K3 = (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2$$

$$K4 = (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\omega)^2$$

$$K5 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\omega$$

$$K6 = (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2$$

$$K7 = 1 - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\omega$$

- Μετακινήστε την κορυφή Α του τριγώνου BOA στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διατυπώστε υποθέσεις για τις τιμές των παραστάσεων που υπολογίστηκαν κατά τη διάρκεια της μεταβολής της γωνίας  $\omega$ .

**Υπόθεση 1:**  $\eta\mu\omega/\sigma\upsilon\nu\omega$

.....

.....

**Υπόθεση 2:**  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon^2\omega$

.....

.....

**Υπόθεση 3:**  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2$

.....

.....

**Υπόθεση 4:**  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2$

.....

.....

**Υπόθεση 5:**  $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2$

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στις εξής ερωτήσεις:**

1. Συσχετίστε τις τιμές στις στήλες 2 και 3 του παραπάνω πίνακα. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Συσχετίστε τις τιμές στις στήλες 6 και 7 του παραπάνω πίνακα. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**3.** Συσχετίστε τις τιμές στις στήλες 8 και 9 του παραπάνω πίνακα. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Γ' Τάξη – Νόμος των ημιτόνων**  
**1 Δραστηριότητα**  
**Χρόνος: 20 λεπτά**

**Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να διερευνήσετε ποιες σχέσεις μπορεί να συνδέουν τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  και τα ημίτονα των γωνιών που βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές αυτές.

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ πλευρών και τριγωνομετρικών αριθμών ενός τυχαίου τριγώνου.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , μετρήστε και πινακοποιήστε τις πλευρές του  $AB=\gamma$ ,  $B\Gamma=\alpha$ ,  $A\Gamma=\beta$ , καθώς και τις γωνίες του  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .
- Στη συνέχεια, υπολογίστε τους λόγους  $\alpha/\eta\mu A$ ,  $\beta/\eta\mu B$  και  $\gamma/\eta\mu\Gamma$  και πινακοποιήστε τους.
- Μετακινήστε τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διατυπώστε υπόθεση για όλες τις δυνατές σχέσεις των στοιχείων του τριγώνου  $AB\Gamma$  με τις παραστάσεις που υπολογίστηκαν.

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στην ερώτηση:**

*Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των λόγων  $\alpha/\eta\mu A$ ,  $\beta/\eta\mu B$  και  $\gamma/\eta\mu\Gamma$  που συνδέουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ ;*

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....



.....

.....

**Γ' Τάξη – Νόμος των συνημιτόνων****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 20 λεπτά****Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να διερευνήσετε ποιες σχέσεις μπορεί να συνδέουν τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  και τα συνημίτονα των γωνιών που βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές αυτές.

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ πλευρών και τριγωνομετρικών αριθμών ενός τυχαίου τριγώνου.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , μετρήστε και πινακοποιήστε τις πλευρές του  $AB=\gamma$ ,  $B\Gamma=\alpha$ ,  $A\Gamma=\beta$ , καθώς και τις γωνίες του  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .
- Στη συνέχεια υπολογίστε την τιμή των παραστάσεων  $\alpha^2$  και  $K=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sin A$  και πινακοποιήστε τις.
- Μετακινήστε τις κορυφές  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διατυπώστε μια υπόθεση για τον κανόνα ο οποίος πιθανώς συσχετίζει τις παραπάνω παραστάσεις στοιχείων του τριγώνου  $AB\Gamma$  οι οποίες υπολογίστηκαν.

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

**Ειδικότερα, καλείστε να απαντήσετε στην ερώτηση:**

Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των παραστάσεων  $\alpha^2$  και  $K=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sin A$  που συνδέουν γωνίες και πλευρές ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ ;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Κεφάλαιο 9

Γ' Τάξη – Διανύσματα – Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

2 Δραστηριότητες

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

### Δραστηριότητα 1

Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα διανύσματα  $\delta AB$ ,  $\delta A\Gamma$ ,  $\delta BA$ ,  $\delta B\Gamma$ ,  $\delta \Gamma A$ ,  $\delta \Gamma B$ . Εάν  $\delta AB + \delta A\Gamma = \delta A\Delta$ ,  $\delta BA + \delta B\Gamma = \delta BE$  και  $\delta \Gamma A + \delta \Gamma B = \delta \Gamma Z$ , τι συμπεραίνετε για το άθροισμα  $\delta A\Delta + \delta BE + \delta \Gamma Z$  και σε τι άραγε διαφέρει από το άθροισμα  $AB + A\Gamma + B\Gamma + BA + \Gamma A + \Gamma B$ ; Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των διανυσμάτων  $\delta A\Delta$ ,  $\delta BE$  και  $\delta \Gamma Z$  και των διαμέσων του τριγώνου  $AM$ ,  $BM_2$  και  $\Gamma M_3$  αντίστοιχα;

### Στόχος

Η κατανόηση της διαφοροποίησης των πράξεων μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων και διανυσμάτων μέσα από γνωστά γεωμετρικά σχήματα.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα διανύσματα  $AB$  και  $B\Gamma$ , και προσθέστε τα.
- Ονομάστε το άθροισμά τους διάνυσμα  $A\Delta$ , και μετρήστε το.
- Κατασκευάστε το σημείο τομής του  $A\Delta$  με τη  $B\Gamma$ , ονομάστε το  $M$  και μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BM$  και  $M\Gamma$ .
- Κατασκευάστε, επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα  $AM$ , και μετρήστε το.
- Στη συνέχεια, κατασκευάστε τα διανύσματα  $BA$  και  $B\Gamma$ , και προσθέστε τα.
- Ονομάστε το άθροισμά τους διάνυσμα  $BE$ , και μετρήστε το.
- Κατασκευάστε το σημείο τομής του  $BE$  με την  $A\Gamma$ , και ονομάστε το  $M_2$ .
- Κατασκευάστε, επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα  $BM_2$ , και μετρήστε το.
- Επιπλέον, κατασκευάστε τα διανύσματα  $\Gamma A$  και  $\Gamma B$ , και προσθέστε τα.
- Ονομάστε το άθροισμά τους διάνυσμα  $\Gamma Z$ , και μετρήστε το.
- Κατασκευάστε το σημείο τομής του  $\Gamma Z$  με την  $AB$ , και ονομάστε το  $M_3$ .
- Κατασκευάστε, επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma M_3$ , και μετρήστε το.
- Προσθέστε τα διανύσματα  $BE$  και  $A\Delta$ , ονομάστε το άθροισμά τους διάνυσμα  $\Gamma Z'$  και μετρήστε το.
- Πινακοποιήστε τα μεγέθη  $A\Delta$ ,  $AM$ ,  $BM$ ,  $M\Gamma$ ,  $BE$ ,  $BM_2$ ,  $\Gamma Z$ ,  $\Gamma M_3$  και  $\Gamma Z'$ .
- Μετακινήστε τις κορυφές  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διατυπώστε υποθέσεις με τις οποίες πιθανώς συσχετίζονται οι παραπάνω παραστάσεις στοιχείων του τριγώνου  $AB\Gamma$  οι οποίες υπολογίστηκαν.

### Υπόθεση 1

.....

.....

### Υπόθεση 2

.....

.....

### Υπόθεση 3

.....

.....

### Υπόθεση 4

.....

.....

### Υπόθεση 5

.....

.....

### Ειδικότερα:

1. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει ανάμεσα στο άθροισμα δύο διανυσμάτων που ξεκινούν από μία κορυφή ενός τριγώνου και έχουν μήκος ίσο με το μήκος των αντίστοιχων πλευρών του τριγώνου που ξεκινούν από αυτή την κορυφή και στην περιεχόμενη διάμεσο;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

2. Ζητείται να συμπληρωθούν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων:

$$\delta AB + \delta AG = \delta AD = \dots\dots\dots$$

$$\delta BA + \delta BG = \delta BE = \dots\dots\dots$$

$$\delta GA + \delta GB = \delta GZ = \dots\dots\dots$$

$$\delta AD + \delta BE = \delta GZ' = \dots\dots\dots$$

$$\delta GZ' + \delta GZ = \dots\dots\dots$$

**Δραστηριότητα 2**

Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα των πλευρών του  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$ . Εάν  $\delta AM_1$ ,  $\delta AM_2$  και  $\delta AM_3$  είναι τα διανύσματα που αντιστοιχούν στα ευθύγραμμα τμήματα  $AM_1$ ,  $AM_2$  και  $AM_3$ , να διερευνήσετε σε τι διαφέρει το άθροισμα  $\delta AM_1 + \delta AM_2 + \delta AM_3$  από το άθροισμα  $AM_1 + AM_2 + AM_3$ .

**Στόχος**

Η κατανόηση της διαφοροποίησης των πράξεων μεταξύ διανυσμάτων από αυτές των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων τους, με βάση το παράδειγμα των διαμέσων ενός τριγώνου θεωρούμενων ως διανυσμάτων.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$  των πλευρών του  $B\Gamma$ ,  $A\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα διανύσματα  $AM_1$ ,  $BM_2$  και  $GM_3$ .
- Προσθέστε τα διανύσματα  $AM_1$  και  $BM_2$  ως προς το σημείο  $\Gamma$  και ονομάστε το άθροισμά τους διάνυσμα  $\Gamma\Delta$ .
- Στη συνέχεια, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα διανύσματα  $\Gamma\Delta$  και  $GM_3$ .
- Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου στην οθόνη του υπολογιστή, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα τον οποίο προηγουμένως κατασκευάσατε, ποια υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε;

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

**Ειδικότερα:**

1. Ζητείται να συμπληρώσετε το δεύτερο μέλος της ισότητας:  
 $\delta AM_1 + \delta BM_2 + \delta GM_3 =$  .....
2. Σε τι διαφέρει το άθροισμα  $\delta AM_1 + \delta BM_2 + \delta GM_3$  από το άθροισμα  $AM_1 + BM_2 + GM_3$ ;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....



## Παράρτημα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ	
Σύνταξη – Αγγλικός Όρος	Συνάρτηση – Ελληνικός Όρος
ARCCOS(τιμή), arccos(), acos(), ArcCos()	Τόξο συνημιτόνου
ARGCH(τιμή), argch(), ArgCh()	Τόξο υπερβολικού συνημιτόνου
ARCSIN(τιμή), arcsin(), asin(), ArcSin()	Τόξο ημιτόνου
ARGSH(τιμή), argsh(), ArgSh()	Τόξο υπερβολικού ημιτόνου
ARCTAN(τιμή), arctan(), atan(), ArcTan()	Τόξο εφαπτομένης
ARGTH(τιμή), argth(), ArgTh()	Τόξο υπερβολικής εφαπτομένης
ROUND(τιμή), round(), Round()	Στρογγυλοποίηση (στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό)
SQR(τιμή), sqr(), Sqr(), Sq()	Στο τετράγωνο
COS(τιμή), cos(), Cos()	Συνημίτονο
COSH(τιμή), cosh(), CosH(), ch()	Υπερβολικό συνημίτονο
EXP(τιμή), exp(), Exp()	Εκθέτης ex
Log10(τιμή), Log10(), lg()	Δεκαδικός λογάριθμος
LN(τιμή), ln(), Ln()	Νεπέριος λογάριθμος
MAX(τιμή 1, τιμή 2), max(n1, n2), Max (n1, n2)	Μέγιστη τιμή ενός συνόλου τιμών (n1, n2)
MIN (τιμή 1, τιμή 2), min (n1, n2), Min (n1, n2)	Ελάχιστη τιμή ενός συνόλου τιμών (n1, n2)
Π, Π, PI, pi, Pi	Τιμή του π
CEIL(τιμή), ceil(), Ceil()	Στρογγυλοποίηση προς τα πάνω (στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό)
FLOOR(τιμή), floor(), Floor()	Στρογγυλοποίηση προς τα κάτω (στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό)
10^(τιμή)	Δυνάμεις του 10
SQRT(τιμή), sqrt(), Sqrt(), SqRt(), _	Τετραγωνική ρίζα
SIN(τιμή), sin (), Sin()	Συνημίτονο
SINH(τιμή), sinh(), SinH(), sh()	Υπερβολικό συνημίτονο
TAN(τιμή), tan(), Tan()	Εφαπτομένη
TANH(τιμή), tanh(), TanH(), th()	Υπερβολική εφαπτομένη
ABS(τιμή), abs(), Abs()	Απόλυτη τιμή
Random(), random(), Rand(), rand()	Τυχαίος αριθμός από 0 έως 1
INV	Ορίζει την αντίστροφη συνάρτηση για sin, cos, tan, pi, in, log





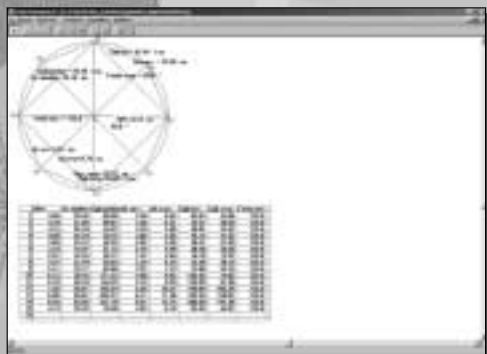
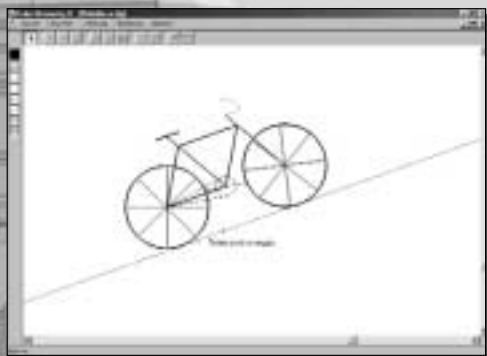
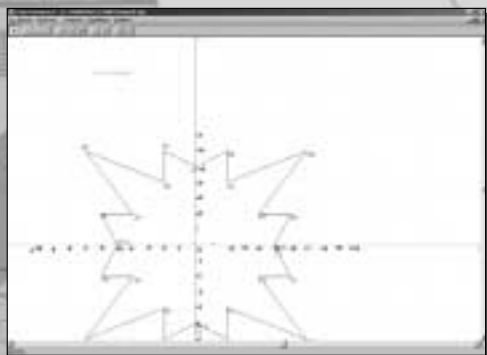
# Cabri - geometry II

## Το Cabri – geometry II

- είναι ένα δυναμικό περιβάλλον εκπαιδευτικού λογισμικού που υποστηρίζει την ανάπτυξη μιας διερευνητικής προσέγγισης στη διδασκαλία και στη μάθηση της γεωμετρίας.
- διαθέτει στοιχεία υψηλής αλληλεπίδρασης.
- αποτελεί ένα ανοικτό περιβάλλον μάθησης το οποίο διαθέτει εργαλεία στο μαθητή προκειμένου να μπορεί να επιλύει προβλήματα.
- υποστηρίζει τη διεπιστημονική προσέγγιση στη μάθηση της γεωμετρίας.

## Με το Cabri – geometry II μπορείτε

- να δημιουργήσετε και να αποθηκεύσετε στον υπολογιστή σας μακροκατασκευές για σημαντικές ή συχνά επαναλαμβανόμενες γεωμετρικές κατασκευές.
- να καταρτίσετε λίστα περιεχομένων, η οποία θα περιλαμβάνει τα θέματα στα οποία επιθυμείτε να επικεντρώσετε το ενδιαφέρον σας.
- να διερευνήσετε τις γεωμετρικές ιδιότητες για υποθέσεις ασκήσεων που βασίζονται στα πέντε ευκλείδια αξιώματα.
- να προσδιορίσετε γραφικά γεωμετρικούς τόπους.
- να αναδείξετε τα δυναμικά χαρακτηριστικά των σχημάτων με υλικό animation.
- να εκτυπώσετε επιφάνεια σχεδίου 8 1/2\*11.



Το λογισμικό **Cabri geometry II** εξελληνίστηκε και διανέμεται αρχικά για χρήση στα Γυμνάσια, Λύκεια και ΤΕΕ που συμμετέχουν στην **Οδύσσεια** – «Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας», το εθνικό πρόγραμμα που αφορά στην παιδαγωγική ένταξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, και είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιου σχεδιασμού και υλοποίησης (1996-2001). Το 2001 στα 385 σχολεία της **Οδύσσειας** καθηγητές όλων των ειδικοτήτων αξιοποιούν υπολογιστές και δίκτυα στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους. Στο **Σχολικό Εργαστήριο της Κοινωνίας της Πληροφορίας** υποστηρίζεται η διδασκαλία όλων των μαθημάτων με διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Στο Γ' ΚΠΣ προβλέπεται η χρηματοδότηση νέων δράσεων που στοχεύουν στην αξιοποίηση των ΤΠΕ στο σύνολο των Ελληνικών σχολείων.



Ελληνικά  
Σχολεία  
στην  
Κοινωνία  
της  
Πληροφορίας

**Η Οδύσσεια** περιλαμβάνει:

– μεταπτυχιακή εκπαίδευση 95 επιμορφωτών (καθηγητές όλων των ειδικοτήτων) σε εξειδικευμένα ετήσια πανεπιστημιακά προγράμματα, οι οποίοι αναλαμβάνουν τη

– διαρκή **ενδοσχολική επιμόρφωση** των 5.500 εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία της **Οδύσσειας** -και όχι μόνο- ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν το

– διερευνητικό, διαθεματικό **εκπαιδευτικό λογισμικό** (48 πακέτα αναπτύχθηκαν εξ αρχής και 14 διεθνώς καταξιωμένα προϊόντα προσαρμόστηκαν) για όλες τις τάξεις Γυμνασίου και Λυκείου και τις διάφορες ειδικότητες καθηγητών. Το εκπαιδευτικό λογισμικό αξιοποιείται στα

– 385 σχολεία με **σχολικά εργαστήρια** (με τοπική και εξ αποστάσεως τεχνική υποστήριξη), δικτυωμένα στο **Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο**.

Ο εξελληνισμός και η προσαρμογή του εκπαιδευτικού λογισμικού **Cabri geometry II** στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της **Κίρκης**, έργο της Δράσης II: «Εκπαιδευτικό λογισμικό» της **Οδύσσειας**. Η δημόσια χρηματοδότηση της προσαρμογής εξασφαλίζει ότι η τιμή πώλησης του παρόντος λογισμικού στην Ελληνική αγορά δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη στη διεθνή αγορά.

**Η Οδύσσεια** χρηματοδοτείται από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης (ΕΠΕΑΕΚ, Β' και Γ' ΚΠΣ) και το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Κοινωνίας της Πληροφορίας του Γ' ΚΠΣ, του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων (Επιβλεψη: Διευθύνσεις Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και Κοινωνικού Παισίου Στήριξης του ΥπΕΠΘ. Πιστοποίηση: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο). Ο σχεδιασμός, η επιστημονική τεχνική στήριξη, ο συντονισμός και η διοικητική και οικονομική διαχείριση γίνονται από το Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ε.Α. ΠΥ).

Στην υλοποίηση της **Οδύσσειας** συμμετέχουν πάνω από 1000 επιστήμονες, παιδαγωγοί, μηχανικοί και διοικητικοί υπάλληλοι, που εργάζονται σε 57 πανεπιστημιακά τμήματα, 53 εταιρίες και 18 μουσεία, ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα.

## ΦΟΡΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



## ΑΝΑΘΟΧΟΙ ΦΟΡΕΙΣ



## Κέντρο Πληροφόρησης Οδύσσειας:

Infodesk.Odyseia@cti.gr – <http://Odyseia.cti.gr/irkil/>