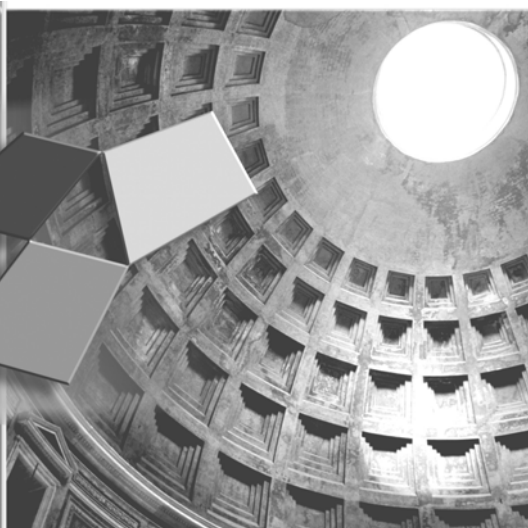


# Μαθαίνοντας Γεωμετρία

με το

## THE GEOMETER'S SKETCHPAD®




Έκδοση

# 4

## Βιβλίο Μαθητή



Key Curriculum Press



# THE GEOMETER'S SKETCHPAD<sup>®</sup>

ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ  
ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

***Βιβλίο Μαθητή***

# Περιεχόμενα

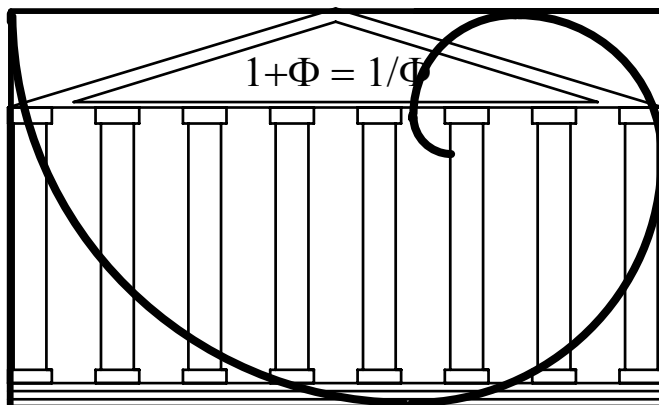
<b>Η προέλευση του Sketchpad .....</b>	<b>1</b>
<b>Υποδειγματικές δραστηριότητες .....</b>	<b>2</b>
Ιδιότητες της ανάκλασης.....	3
Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων.....	6
Το ευθύγραμμο τμήμα του Euler .....	8
Το θεώρημα του Morley .....	10
Το θεώρημα του Ναπολέοντα.....	12
Κατασκευή ρόμβων .....	14
Τετράπλευρα μέσων.....	15
Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο.....	16
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού .....	19
Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος.....	22
Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .....	23
Λόγοι εμβαδών .....	26
Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων .....	29
Η απόδειξη του Leonardo da Vinci.....	32
Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους .....	35
Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα.....	37
Μέσα χορδών .....	44
Γραφήματα οικογένειας παραβολών.....	49
Διάμεσοι ενός τριγώνου.....	53
Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου.....	55
Ύψη ενός τριγώνου.....	57
Διχοτόμοι ενός τριγώνου .....	60
Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων.....	62
Ιδιότητες ρόμβων .....	64
Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων .....	66
Εμβαδόν/περίμετρος τριγώνου .....	69
Εμβαδόν ενός τραπεζίου .....	70
Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας .....	73
Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – $\gamma\pi\gamma$ ;.....	75
Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – $\pi\pi\gamma$ ; .....	76
Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών.....	78

(κενή σελίδα)

# Η προέλευση του Sketchpad

Το *The Geometer's Sketchpad* αναπτύχθηκε ως μέρος του Προγράμματος Οπτικής Γεωμετρίας, ενός προγράμματος χρηματοδοτούμενου από το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών (NSF) υπό τη διεύθυνση του δρ Eugene Klotz στο Swarthmore College και της δρ Doris Schattschneider στο Moravian College, Pennsylvania.

Πέραν του Sketchpad, το Πρόγραμμα Οπτικής Γεωμετρίας έχει παραγάγει τα Stella Octangula και τα Πλατωνικά Στερεά: βίντεο, βιβλία δραστηριοτήτων και άλλο υλικό, όλα δημοσιευμένα από τις Εκδόσεις Key Curriculum Press. Το καλοκαίρι του 1987 άρχισε τη συνεργασία του με το Πρόγραμμα Οπτικής Γεωμετρίας ο δημιουργός και προγραμματιστής του Sketchpad Nicholas Jackiw. Ένα χρόνο αργότερα ο Jackiw ξεκίνησε ένα σοβαρό έργο προγραμματισμού. Το Sketchpad για



Παρ' ότι αποτελεί αντικείμενο σχετικής διαμάχης, ορισμένοι αρχιτέκτονες και μαθηματικοί θεωρούν ότι ο Παρθενώνας σχεδιάστηκε βάσει του κανόνα της χρυσής τομής. Το σχέδιο αυτό δείχνει, σε αδρές γραμμές, την ένταξη του Παρθενώνα σε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Macintosh αναπτύχθηκε σε ένα ανοιχτό ακαδημαϊκό περιβάλλον στο οποίο πολλοί καθηγητές και άλλοι χρήστες πειραματίζονταν με προηγούμενες εκδόσεις του προγράμματος και αλληλεπίδρασαν με τον Jackiw. Ο τελευταίος προσελήφθη από τις Key Curriculum Press το 1990 για την παραγωγή της δεύτερης έκδοσης του λογισμικού που είχε δοκιμαστεί σε σχολικές τάξεις. Ένας πυρήνας τριάντα σχολείων αυξήθηκε σύντομα σε μια ομάδα που περιλάμβανε περισσότερα από πενήντα σχολεία, καθώς «το μήνυμα διαδιδόταν» και πολλοί είχαν πληροφορηθεί ή παρακολουθήσει επιδείξεις του Sketchpad σε συνέδρια. Το ανοιχτό περιβάλλον δημιουργίας του Sketchpad προκάλεσε μια απίστευτη πληθώρα δημιουργικής ανάδρασης και έναν έντονο ενθουσιασμό υπέρ του προγράμματος. Την εποχή της έκδοσής του, την άνοιξη του 1991, είχε ήδη χρησιμοποιηθεί από εκατοντάδες καθηγητές και μαθητές, αλλά και από άλλους λάτρεις της γεωμετρίας, και αποτελούσε το πλέον συζητημένο έως τότε και αναμενόμενο κομμάτι λογισμικού των σχολικών μαθηματικών.

Το πρώτο έτος του Sketchpad ο οίκος Key Curriculum Press άρχισε μια μελέτη σχετικά με τον τρόπο αποτελεσματικής χρήσης του προγράμματος στα σχολεία. Επιχορηγούμενη εν μέρει από ένα κονδύλι του Εθνικού Ιδρύματος Ερευνών για μικρές επιχειρήσεις, η έρευνα αυτή αντανακλάται σε αυτές τις σημειώσεις διδασκαλίας, στη σχολική ύλη και σε νέες εκδόσεις του Sketchpad. Η έκδοση του προγράμματος η οποία παρουσιάστηκε στην αγορά τον Απρίλιο του 1992 εισήγαγε βελτιωμένες δυνατότητες μετασχηματισμού και παρουσίασης. Επίσης, τα αναδρομικά αρχεία εντολών στην έκδοση αυτή κατέστησαν δυνατή, μεταξύ άλλων, την κατασκευή φράκταλ. Η πρώτη έκδοση του Sketchpad για Windows παρουσιάστηκε το Μάρτιο του 1993. Η έκδοση 3 για Macintosh και Windows, μια αρκετά αναβαθμισμένη έκδοση, παρουσιάστηκε τον Απρίλιο του 1995 και εμπεριείχε αναλυτικές και γραφικές δυνατότητες, κατασκευάσιμους γεωμετρικούς τύπους, τόξα, βελτιωμένο μαθηματικό συμβολισμό, εργαλεία αρχείων εντολών και μετασχηματισμούς κατά μετρήσεις. Η Έκδοση 4 του λογισμικού, η οποία κυκλοφορήθηκε το φθινόπωρο του 2001, επεκτείνει σημαντικά τη χρησιμότητα του προγράμματος σε μαθήματα άλγεβρας και λογισμού, εξελίσσοντας παράλληλα τόσο την ευκολία χειρισμού στις μικρότερες τάξεις όσο και τα εργαλεία συγγραφής υλικού με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα. Η έρευνα στις σχολικές τάξεις συνεχίζεται με σκοπό το σχηματισμό μιας βάσης για την περαιτέρω ανάπτυξη του λογισμικού καθώς και συνοδευτικού υλικού.

# Υποδειγματικές δραστηριότητες

Οι υποδειγματικές δραστηριότητες για τη σχολική τάξη θα σας δώσουν μια ιδέα για ορισμένα από τα είδη μαθησιακών εμπειριών τα οποία είναι δυνατά με το Sketchpad. Τα θέματα των δραστηριοτήτων κυμαίνονται από τη δημιουργία γεωμετρικών μορφών τέχνης έως τη μη ευκλείδεια γεωμετρία. Η παρακάτω λίστα παραθέτει τα ονόματα των υποδειγματικών δραστηριοτήτων του παρόντος βιβλίου.

## Λίστα υποδειγματικών δραστηριοτήτων

- *Ιδιότητες της ανάκλασης*
- *Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων*
- *Η ευθεία του Euler*
- *Το θεώρημα του Morley*
- *Το θεώρημα του Ναπολέοντα*
- *Κατασκευή ρόμβων*
- *Τετράπλευρα μέσων*
- *Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο*
- *Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού*
- *Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος*
- *Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*
- *Λόγοι εμβαδών*
- *Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων*
- *Η απόδειξη του Leonardo da Vinci*
- *Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους*
- *Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα*
- *Μέσα χορδών*
- *Γραφήματα οικογένειας παραβολών*
- *Διάμεσοι ενός τριγώνου*
- *Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου*
- *Ύψη ενός τριγώνου*
- *Διχοτόμοι ενός τριγώνου*
- *Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων*
- *Ιδιότητες ρόμβων*
- *Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων*
- *Εμβαδόν/Περίμετρος τριγώνου*
- *Εμβαδόν ενός τραπεζίου*
- *Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας*
- *Επίδειξη: Ισότητα Τριγώνων – γπγ*
- *Επίδειξη: Ισότητα Τριγώνων - ππγ*
- *Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών*

Το λογισμικό περιλαμβάνει επίσης πάνω από 100 δείγματα σχεδίων (αρχεία τύπου .gsp) δραστηριοτήτων, κατάλληλα για εξερεύνηση και πειραματισμό σε θέματα ευκλείδειας γεωμετρίας αλλά και γενικότερων γεωμετρικών εννοιών.

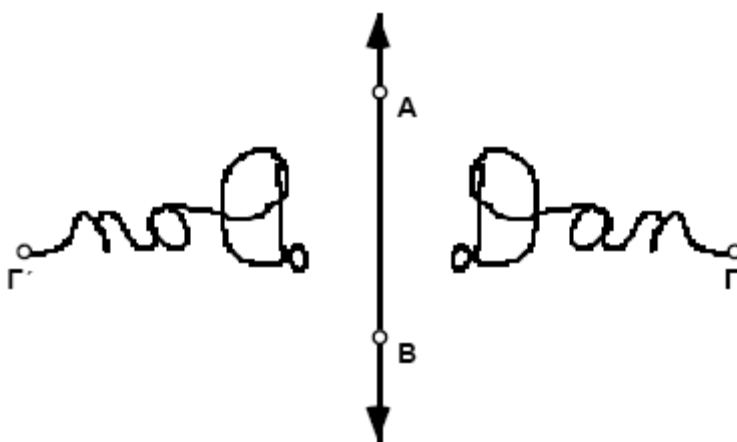
## Ιδιότητες της ανάκλασης

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Όταν παρατηρείτε τον εαυτό σας σε έναν καθρέφτη, σε ποια απόσταση μέσα στον καθρέφτη φαίνεται το είδωλό σας; Γιατί το είδωλο είναι ανεστραμμένο; Οι ανακλάσεις στη γεωμετρία διαθέτουν ορισμένες από τις ιδιότητες που παρατηρείτε σε έναν καθρέφτη. Στη δραστηριότητα αυτή θα ερευνήσετε τις ιδιότητες των ανακλάσεων, οι οποίες έχουν ως αποτέλεσμα την εμφάνιση του κατοπτρικού ειδώλου του πραγματικού αντικειμένου.

### Σχέδιο και έρευνα: Γράψιμο στον άξονα συμμετρίας

1. Κατασκευάστε κατακόρυφη ευθεία  $AB$ .
2. Κατασκευάστε σημείο  $\Gamma$  δεξιά της ευθείας.
3. Επιλέξτε την ευθεία  $AB$  ως άξονα συμμετρίας.
4. Δημιουργήστε την ανάκλαση του σημείου  $\Gamma$  για να κατασκευαστεί το σημείο  $\Gamma'$ .
5. Ενεργοποιήστε την εντολή Σχεδίαση Ίχνους: Σημεία για τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Gamma'$ .
6. Κάντε κλικ στον κενό χώρο και μετά επιλέξτε το σημείο  $\Gamma$ .
7. Μεταφέρετε το σημείο  $\Gamma$  έτσι ώστε να σχεδιάσει το όνομά σας.
- Ε1. Τι σχεδιάζει το σημείο  $\Gamma'$ ;
8. Προσπαθήστε να μεταφέρετε το σημείο  $\Gamma'$  έτσι ώστε το σημείο  $\Gamma$  να σχεδιάσει το όνομά σας.



Επιλέξτε τα δύο σημεία. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Σχεδίαση ίχνους σημείων** από το μενού **Προβολή**. Ένα σύμβολο επιλογής υποδηλώνει ότι η εντολή έχει ενεργοποιηθεί. Επιλέξτε την εντολή **Διαγραφή ίχνων**, για να διαγράψετε τα ίχνη.



## Ιδιότητες της ανάκλασης (συνέχεια)

### Σχέδιο και έρευνα: Ανάκλαση γεωμετρικών σχημάτων

Επιλέξτε τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Gamma'$ . Στο μενού **Προβολή** θα δείτε επιλεγμένη την εντολή **Σχεδίαση ίχνους σημείων**.

Επιλέξτε εκ νέου την εντολή, ώστε να αναιρεθεί η επιλογή της.

Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα (όλες τις κορυφές και τις ακμές). Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Ανάκλαση** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

9. Απενεργοποιήστε την εντολή Σχεδίαση ίχνους σημείων για τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Gamma'$ .

10. Κατασκευάστε το τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$ .

11. Κατασκευάστε την ανάκλαση του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  (πλευρές και κορυφές) ως προς την ευθεία  $AB$ .

12. Σύρτε τα διάφορα τμήματα κάθε τριγώνου και παρατηρήστε τον τρόπο με τον οποίο συσχετίζονται τα τρίγωνα. Επίσης, σύρτε τον άξονα συμμετρίας.

13. Μετρήστε το μήκος των πλευρών των τριγώνων  $\Gamma\Delta E$  και  $\Gamma'\Delta'E'$ .

Επιλέξτε τρία σημεία που ορίζουν τη γωνία με την κορυφή στο μέσο. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Γωνίας** από το μενού **Μέτρηση**.

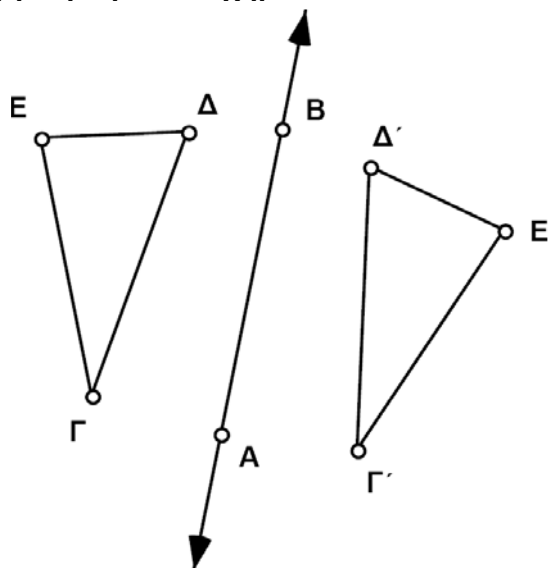
14. Μετρήστε μια γωνία του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  και την αντίστοιχη γωνία του τριγώνου  $\Gamma'\Delta'E'$ .

E2. Τι επίδραση έχει η ανάκλαση στα μεγέθη του μήκους και της γωνίας;

E3. Ένα σχήμα και το είδωλό του είναι πάντοτε όμοια; Διατυπώστε την απάντησή σας ως υπόθεση.

Η απάντησή σας στο ερώτημα E4. δείχνει, ότι μια ανάκλαση αντιστρέφει τον προσανατολισμό ενός σχήματος.

E4. Η αλφαβητική σειρά από το  $\Gamma$  στο  $\Delta$  και στο  $E$  αντιστοιχεί σε δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο προσανατολισμό των κορυφών του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$ ; Ποιος είναι ο προσανατολισμός των κορυφών  $\Gamma'$ ,  $\Delta'$  και  $E'$  στο ανακλασθέν τρίγωνο;





### Ιδιότητες της ανάκλασης (συνέχεια)

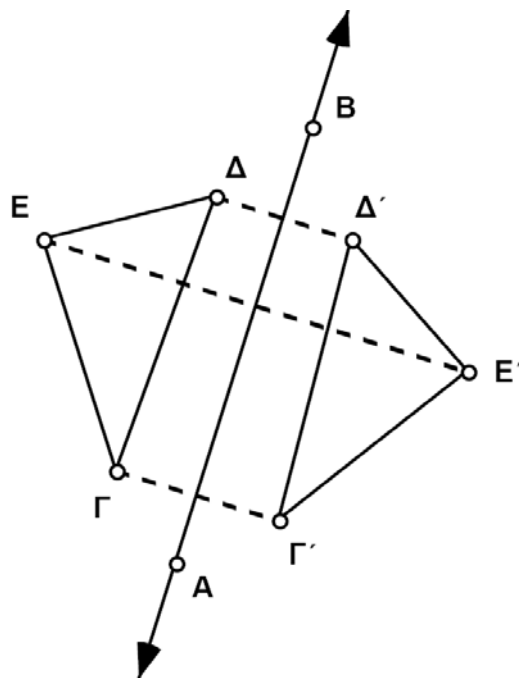
Το **Πάχος γραμμής** ορίζεται από το μενού **Προβολή**.

Ίσως θέλετε να κατασκευάσετε σημεία τομής και να μετρήσετε αποστάσεις για την αναζήτηση σχέσεων μεταξύ του άξονα συμμετρίας και των διακεκομμένων τμημάτων.

15. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν κάθε σημείο με το είδωλό του: το Γ με το Γ', το Δ με το Δ' και το Ε με το Ε'. Τα τμήματα να είναι διακεκομμένα.

16. Μεταφέρετε τα διάφορα μέρη του σχεδίου και παρατηρήστε τις σχέσεις μεταξύ των διακεκομμένων τμημάτων και του άξονα συμμετρίας.

Ε5. Πώς σχετίζεται ο άξονας συμμετρίας με ένα τμήμα που συνδέει ένα σημείο και το ανακλασθέν είδωλό του;



### Περαιτέρω εξερεύνηση

- Έστω ότι το Sketchpad δε διέθετε το μενού **Μετασχηματισμός**. Πώς θα κατασκευάζατε το κατοπτρικό είδωλο ενός δοθέντος σημείου ως προς μια ευθεία; Προσπαθήστε να απαντήσετε. Αρχίστε με ένα σημείο και μια ευθεία. Κατασκευάστε την ανάκλαση του σημείου ως προς την ευθεία χρησιμοποιώντας απλώς τα εργαλεία και το μενού **Κατασκευή**. Περιγράψτε τη μέθοδό σας.
- Χρησιμοποιήστε μια ανάκλαση για την κατασκευή ενός ισοσκελούς τριγώνου. Εξηγήστε τις ενέργειές σας.

## Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Στη δραστηριότητα αυτή θα εξετάσετε τι συμβαίνει στις συντεταγμένες σημείων κατά την ανάκλασή τους ως προς τους άξονες  $x$  και  $y$  στο επίπεδο συντεταγμένων.

Από το μενού  
**Γράφημα** επιλέξτε  
την εντολή  
**Εμφάνιση**  
**πλέγματος**.  
Βεβαιωθείτε ότι η  
εντολή **Τοποθέτηση**  
**σημείων** είναι  
επιλεγμένη στο  
μενού **Γράφημα**.

Κάντε διπλό κλικ  
στον άξονα για την  
επιλογή του ως  
άξονα συμμετρίας.

Επιλέξτε ολόκληρο  
το σχήμα. Κατόπιν  
επιλέξτε την εντολή  
**Ανάκλαση** από  
το μενού  
**Μετασχηματισμός**.

1. Εμφανίστε το πλέγμα.

2. Σχεδιάστε το τρίγωνο ΓΔΕ με  
τις κορυφές στο πλέγμα.

3. Μετρήστε τις συντεταγμένες  
κάθε κορυφής.

4. Επιλέξτε τον άξονα  $y$  ως άξονα  
συμμετρίας.

5. Δημιουργήστε την ανάκλαση  
του τριγώνου.

6. Μετρήστε τις συντεταγμένες των κορυφών του ειδώλου.

7. Σύρτε τις κορυφές σε διαφορετικά σημεία στο πλέγμα και αναζητήστε  
τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου και των  
συντεταγμένων του ανακλασθέντος ως προς τον άξονα  $y$  ειδώλου.

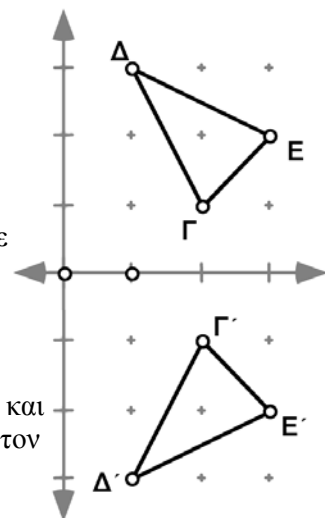
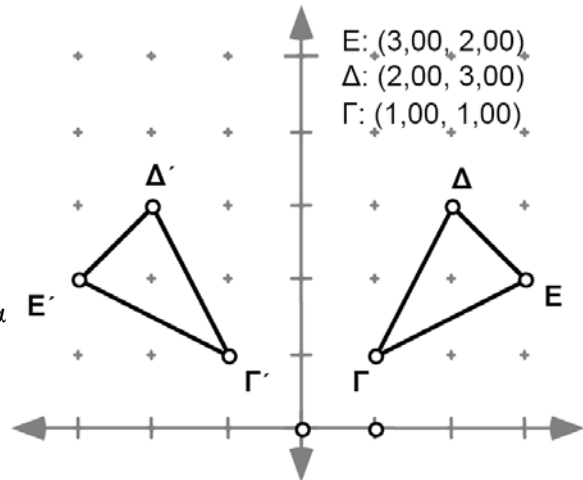
E1. Περιγράψτε οποιαδήποτε σχέση παρατηρείτε μεταξύ των  
συντεταγμένων των κορυφών του αρχικού τριγώνου και των  
συντεταγμένων των ανακλασθέντων ως προς τον άξονα  $y$  ειδώλων  
τους.



8. Επιλέξτε τον άξονα  $x$  ως άξονα συμμετρίας και  
δημιουργήστε ανάκλαση του αρχικού τριγώνου.

9. Πριν από τη μέτρηση των συντεταγμένων, μπορείτε  
να μαντέψετε την τιμή τους; Μετρήστε τις  
συντεταγμένες για να επιβεβαιώσετε την εικασία.

E2. Περιγράψτε οποιαδήποτε σχέση παρατηρείτε  
μεταξύ των συντεταγμένων των αρχικών σημείων και  
των συντεταγμένων των ανακλασθέντων ως προς τον  
άξονα  $x$  ειδώλων τους.



## **Ανακλάσεις στο επίπεδο συντεταγμένων (συνέχεια)**

### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

Σχεδιάστε μια ευθεία στο πλέγμα η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x$  (με άλλα λόγια, η ευθεία  $y = x$ ). Δημιουργήστε την ανάκλαση του τριγώνου σας ως προς την ευθεία αυτή. Τι παρατηρείτε σχετικά με τις συντεταγμένες των κορυφών αυτού του ειδώλου;

## Το ευθύγραμμο τμήμα του Euler

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Σε αυτή την έρευνα αναζητάτε μια σχέση μεταξύ τεσσάρων ειδικών σημείων ενός τριγώνου: του έγκεντρου, του περίκεντρου, του ορθόκεντρου και του κέντρου βάρους. Για αυτά τα ειδικά σημεία του τριγώνου θα χρειαστείτε Προσαρμοσμένα εργαλεία. Χρησιμοποιήστε τα σχετικά Προσαρμοσμένα εργαλεία που συνοδεύουν το Sketchpad.

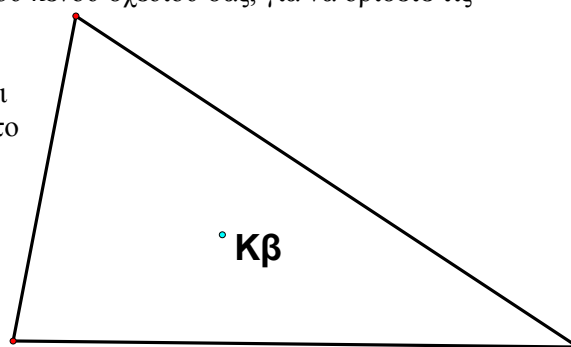
Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες**.

1. Ανοίξτε το αρχείο **Ευθύγραμμο τμήμα του Euler.gsp**. Αυτό το αρχείο περιέχει τέσσερα Προσαρμοσμένα εργαλεία με όνομα: Κέντρο βάρους, Πέρικεντρο, Έγκεντρο και Ορθόκεντρο. Πρόκειται για προκατασκευασμένα εργαλεία που σας διευκολύνουν να σχεδιάσετε τα παραπάνω τέσσερα ειδικά κέντρα του τριγώνου.

2. Επιλέξτε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Κέντρο βάρους** και κάντε κλικ με το ποντίκι σε τρία σημεία του κενού σχεδίου σας, για να ορίσετε τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

3. Στο τρίγωνο που δημιουργείται παρατηρήστε ότι εμφανίζεται το σημείο **Κβ** (Κέντρο βάρους).

4. Επιλέξτε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Πέρικεντρο** και κάντε κλικ με το ποντίκι σε τρία ίδια σημεία του τριγώνου σας όπως πριν, για να ορίσετε το ίδιο τρίγωνο στο οποίο θα σχεδιαστεί το περίκεντρό του.

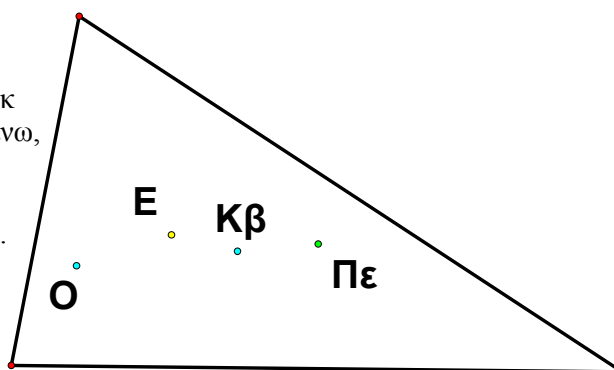


5. Εμφανίζεται το σημείο **Πε** (Πέρικεντρο).

6. Επιλέξτε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Έγκεντρο** και κάντε κλικ με το ποντίκι και πάλι σε τρία ίδια σημεία του τριγώνου σας όπως πριν, για να ορίσετε το ίδιο τρίγωνο στο οποίο θα σχεδιαστεί το έγκεντρό του. Εμφανίζεται το σημείο **Ε** (Έγκεντρο).

7. Επιλέξτε τέλος το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Ορθόκεντρο** και κάντε κλικ με το ποντίκι όπως παραπάνω, για να σχεδιαστεί το ορθόκεντρο. Εμφανίζεται το σημείο **Ο** (Ορθόκεντρο).

9. Τώρα θα πρέπει να έχετε ένα τρίγωνο και τα τέσσερα κέντρα του.



### Το ευθύγραμμο τμήμα του Euler (συνέχεια)

10. Σύρτε το τρίγωνο. Παρατηρήστε πώς συμπεριφέρονται τα τέσσερα σημεία.

E1. Τρία από τα τέσσερα σημεία είναι πάντοτε συγγραμμικά. Ποια είναι αυτά;



10. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει τα τρία συγγραμμικά σημεία και ονομάζεται *ευθύγραμμο τμήμα του Euler*.

11. Σύρτε και πάλι το τρίγωνο και αναζητήστε ενδιαφέρουσες σχέσεις αναφορικά με το ευθύγραμμο τμήμα του Euler. Εξετάστε ειδικά τρίγωνα, όπως το ισοσκελές και το ορθογώνιο.

E2. Περιγράψτε τυχόν ενδιαφέροντα ειδικά τρίγωνα που σχηματίζουν τα κέντρα του τριγώνου ή που βρίσκονται σε ενδιαφέρουσες θέσεις.



E3. Ποια από τα τρία σημεία είναι πάντοτε άκρα του ευθύγραμμου τμήματος του Euler και ποιο σημείο βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στα άκρα του;



Για τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων, επιλέξτε τα δύο σημεία. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Απόστασης** από το μενού **Μέτρηση**. (Η μέτρηση της απόστασης μεταξύ σημείων είναι ένας εύκολος τρόπος μέτρησης του μήκους ενός τμήματος μιας ευθείας.)

12. Μετρήστε τις αποστάσεις κατά μήκος των δύο τμημάτων του ευθύγραμμου τμήματος του Euler.

13. Σύρτε το τρίγωνο και αναζητήστε μια σχέση μεταξύ αυτών των μηκών.

E4. Πώς σχετίζονται μεταξύ τους τα μήκη των δύο τμημάτων του ευθύγραμμου τμήματος του Euler; Ελέγξτε την υπόθεσή σας μέσω του Υπολογιστή.



#### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Κατασκευή ενός κύκλου με κέντρο στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος του Euler διερχόμενου από το μέσο μιας από τις πλευρές του τριγώνου. Ο κύκλος ονομάζεται *κύκλος των εννέα σημείων* ή *κύκλος του Euler*. Το μέσο το οποίο διέρχεται είναι ένα από τα εννέα σημεία. Ποια είναι τα υπόλοιπα οκτώ; Υπόδειξη: έξι από αυτά σχετίζονται με τα ύψη και το ορθόκентρο.

2. Μετά από την κατασκευή του κύκλου των εννέα σημείων, όπως περιγράφεται προηγουμένως, σύρτε το τρίγωνό σας και ερευνήστε ειδικά τρίγωνα. Περιγράψτε τρίγωνα στα οποία τα εννέα σημεία συμπίπτουν.

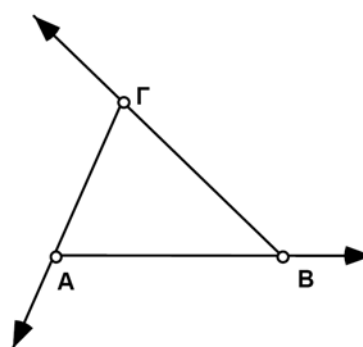
## Το θεώρημα του Morley

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Ίσως γνωρίζετε ότι η τριχοτόμηση μιας γωνίας με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη. Ωστόσο, το Sketchpad καθιστά εύκολη την τριχοτόμηση μιας γωνίας. Στην έρευνα αυτή θα τριχοτομήσετε τις τρεις γωνίες ενός τριγώνου και θα ανακαλύψετε ένα εκπληκτικό γεγονός σχετικά με τις τομές αυτών των τριχοτόμων.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Χρησιμοποιήστε το εργαλείο ημιευθειών για να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ. Σχεδιάστε τις ημιευθείες σας με αριστερόστροφη φορά όπως στο σχήμα.



Βήμα 1

2. Μετρήστε τη γωνία  $\angle BAF$ .

Κάντε κλικ σε μια μέτρηση για την εισαγωγή της σε έναν υπολογισμό.

3. Χρησιμοποιήστε τον Υπολογιστή για τη δημιουργία μιας έκφρασης για το μέτρο  $\angle BAF/3$ .

Κάντε διπλό κλικ στο σημείο Α για την επιλογή του ως κέντρου.

4. Επιλέξτε το σημείο Α ως κέντρο περιστροφής.

Επιλέξτε τον υπολογισμό. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή

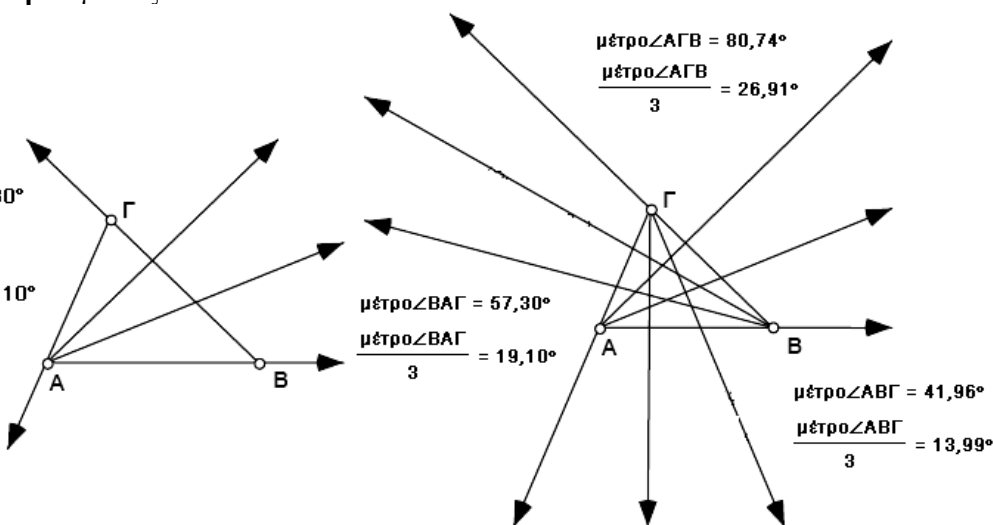
**Επιλογή γωνίας**  
από το μενού  
**Μετασχηματισμός.**

5. Επιλέξτε τη μέτρηση γωνίας μέτρο  $\angle BAF/3$ .

6. Περιστρέψτε την ημιευθεία ΑΒ κατά την επιλεγμένη γωνία. Περιστρέψτε την ημιευθεία που προκύπτει για την τριχοτόμηση της γωνίας  $\angle FAB$ .

μέτρο $\angle BAF = 57,30^\circ$

$$\frac{\text{μέτρο}\angle BAF}{3} = 19,10^\circ$$



Βήματα 2-6

Βήμα 7

### Το θεώρημα του Morley (συνέχεια)

7. Μετρήστε τις δύο άλλες γωνίες και επαναλάβετε τα βήματα 3-6 για τις γωνίες αυτές για την τριχοτόμησή τους.
8. Σύμφωνα με το θεώρημα του Morley, συγκεκριμένες τομές αυτών των τριχοτόμων σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Μπορείτε να το βρείτε; Σύρτε τις κορυφές του τριγώνου και παρατηρήστε τις τομές των τριχοτόμων.

Κατασκευάστε  
σημεία τομής και  
επιλέξτε τα. Κατόπιν  
επιλέξτε την εντολή  
**Εσωτερικό  
πολυγώνου** από το  
μενού **Κατασκευή**.

9. Αν πιστεύετε πως έχετε ανακαλύψει ποιες τομές σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, κατασκευάστε αυτά τα σημεία τομής και το εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου.
10. Σύρτε με τη βοήθεια του ποντικιού, ώστε να επαληθεύσετε ότι κατασκευάσατε το τρίγωνο με τα σωστά σημεία τομής. Εάν δεν είστε βέβαιοι με την πρώτη ματιά, προχωρήστε στις αναγκαίες μετρήσεις για να επιβεβαιώσετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

E1. Διατυπώστε το θεώρημα του Morley.



### Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε άλλες σχέσεις ή ειδικά τρίγωνα στο σχήμα σας.
2. Κατασκευάστε τις ημιευθείες που διέρχονται από τις κορυφές του αρχικού τριγώνου και τις απέναντι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου. Τι παρατηρείτε;
3. Κατασκευάστε ένα τρίγωνο χρησιμοποιώντας ευθείες αντί των ημιευθειών. Τριχοτομήστε ένα σύνολο εξωτερικών γωνιών. Μπορείτε να βρείτε ένα ισόπλευρο τρίγωνο μεταξύ των τομών αυτών των τριχοτόμων;

## Το θεώρημα του Ναπολέοντα

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Ο Γάλλος αυτοκράτορας Ναπολέον Βοναπάρτης θεωρούσε τον εαυτό του ως έναν ερασιτέχνη γεωμέτρη και αρεσκόταν στη συναναστροφή με μαθηματικούς. Το θεώρημα που θα εξετάσετε σε αυτή τη δραστηριότητα αποδίδεται σε αυτόν.

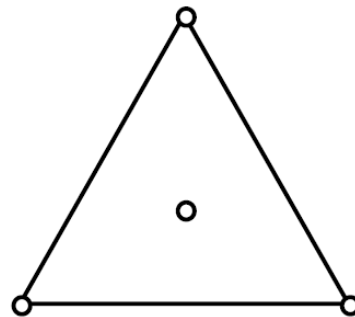
### Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες**, επιλέξτε το αρχείο **Ναπολεόντειο θεώρημα.gsp** και χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Τρίγωνο (από πλευρά)**.

Ένας τρόπος κατασκευής του κέντρου είναι να κατασκευάσετε δύο διαμέσους και το σημείο τομής τους.

Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Δημιουργία νέου εργαλείου...** από τα **Προσαρμοσμένα εργαλεία** στην Εργαλειοθήκη.

1. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο ή να κατασκευάσετε το τρίγωνο εξαρχής. Βεβαιωθείτε πως το τρίγωνο ελέγχεται από δύο κορυφές (όχι το κέντρο). Εάν χρησιμοποιήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο, επιλέξτε ένα τρίγωνο από πλευρά και προχωρήστε σε διαγραφή του εσωτερικού, εφόσον είναι απαραίτητο.

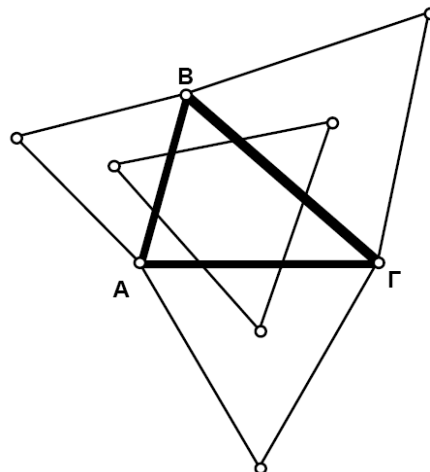


2. Κατασκευάστε το κέντρο του τριγώνου.
3. Αποκρύψτε τα μη απαραίτητα κατασκευασμένα στοιχεία, ώστε να απομείνει ένα τρίγωνο όπως στο σχήμα.

4. Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο με βάση την κατασκευή σας. Μπορείτε να του δώσετε ένα σχετικό όνομα, όπως **Κέντρο ισόπλευρου τριγώνου**.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσετε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων στις πλευρές ενός τυχαίου τριγώνου.

5. Ανοίξτε νέο σχέδιο.
6. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.





### Το θεώρημα του Ναπολέοντα (συνέχεια)

Βεβαιωθείτε για τη σύνδεση κάθε ισόπλευρου τριγώνου με ένα ζεύγος κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ. Εάν το ισόπλευρο τρίγωνό σας δεν είναι σωστό (επικαλύπτει το εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ) ή δε συνδέεται κατάλληλα με τις κορυφές, αναιρέστε την ενέργεια και προσπαθήστε εκ νέου.

7. Χρησιμοποιήστε το νέο Προσαρμοσμένο εργαλείο που δημιουργήσατε για την κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων σε κάθε πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.
8. Σύρτε το σχήμα ώστε να βεβαιωθείτε πως κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει συνδεθεί κατάλληλα με κάθε πλευρά.
9. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα κέντρα των ισόπλευρων τριγώνων.
10. Σύρτε τις κορυφές του αρχικού τριγώνου και παρατηρήστε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα κέντρα των ισόπλευρων τριγώνων. Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται εξωτερικό ναπολεόντειο τρίγωνο του τριγώνου ΑΒΓ.

Ε1. Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το θεώρημα του Ναπολέοντα;



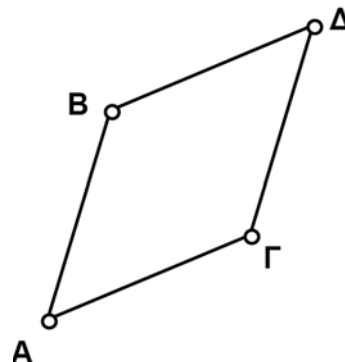
#### Περαιτέρω εξερεύνηση

Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν κάθε κορυφή του αρχικού τριγώνου με την πλέον απόμακρη κορυφή του ισόπλευρου τριγώνου στην απέναντι πλευρά. Τι μπορείτε να συμπεράνετε γι' αυτά τα τρία ευθύγραμμα τμήματα;

## Κατασκευή ρόμβων

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Πόσους τρόπους μπορείτε να σκεφτείτε για την κατασκευή ενός ρόμβου; Εξετάστε μεθόδους που χρησιμοποιούν το μενού **Κατασκευή**, το μενού **Μετασχηματισμός** ή συνδυασμούς αυτών. Σκεφτείτε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις διαγώνιους. Γράψτε μια σύντομη περιγραφή κάθε μεθόδου κατασκευής μαζί με τις ιδιότητες των ρόμβων στις οποίες βασίζεται κάθε μέθοδος.



Μέθοδος 1:

Ιδιότητες:

---

Μέθοδος 2:

Ιδιότητες:

---

Μέθοδος 3:

Ιδιότητες:

---

Μέθοδος 4:

Ιδιότητες:

## Τετράπλευρα μέσων

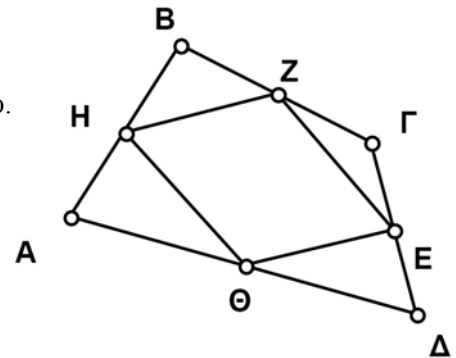
Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε κάτι το εκπληκτικό σχετικά με το τετράπλευρο που σχηματίζεται αν συνδέσετε τα μέσα των πλευρών ενός άλλου τετράπλευρου.

### Σχέδιο και έρευνα

Εάν επιλέξετε όλες τις πλευρές, μπορείτε να κατασκευάσετε ταυτόχρονα και τα τέσσερα μέσα σημεία.

1. Κατασκευάστε το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ .
2. Κατασκευάστε τα μέσα των πλευρών του.
3. Συνδέστε τα μέσα για την κατασκευή ενός άλλου τετράπλευρου  $EZH\Theta$ .
4. Σύρτε τις κορυφές του αρχικού τετράπλευρου και παρατηρήστε τη συμπεριφορά του νέου τετράπλευρου.

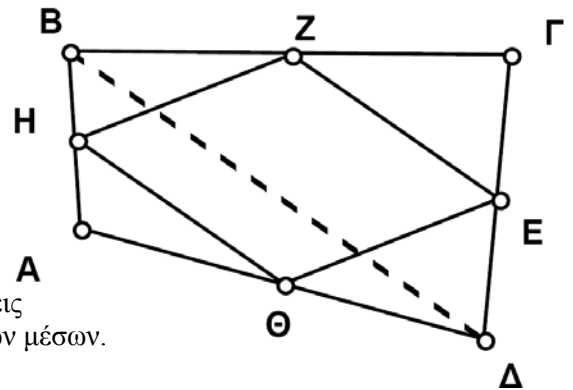


5. Μετρήστε το μήκος των τεσσάρων πλευρών του νέου τετράπλευρου.
6. Μετρήστε την κλίση των τεσσάρων πλευρών του νέου τετράπλευρου.

E1. Τι είδους τετράπλευρο φαίνεται πως είναι το τετράπλευρο των μέσων; Πώς υποστηρίζουν οι μετρήσεις αυτή την εικασία;



7. Κατασκευάστε μια διαγώνιο.
8. Μετρήστε το μήκος και την κλίση της διαγωνίου.
9. Σύρτε τις κορυφές του αρχικού τετράπλευρου και παρατηρήστε τη σχέση μήκους και κλίσης της διαγωνίου με τα μήκη και τις κλίσεις των πλευρών του τετράπλευρου των μέσων.



E2. Η διαγώνιος διαιρεί το αρχικό τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα. Κάθε τρίγωνο έχει ως ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του μια από τις πλευρές του τετράπλευρου των μέσων. Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός και όσα γνωρίζετε περί κλίσης και μήκους της διαγωνίου ώστε να δώσετε μια γραπτή εξήγηση για την ορθότητα της εικασίας στο Ερώτημα 1. Χρησιμοποιήστε ξεχωριστή σελίδα, αν είναι απαραίτητο.



## Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

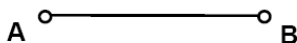
Στη δραστηριότητα αυτή θα ανακαλύψετε μια σχέση μεταξύ του μήκους ενός κύκλου και της διαμέτρου του. Ακόμη και αν γνωρίζετε αυτή τη σχέση, η έρευνα ίσως την παρουσιάσει κατά ένα διαφορετικό τρόπο.

### Σχέδιο και έρευνα

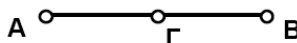
1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
2. Κατασκευάστε το σημείο  $\Gamma$ , δηλαδή το μέσο του  $AB$ .

Βεβαιωθείτε  
ότι ο δείκτης  
βρίσκεται  
ακριβώς στο  
σημείο  $B$   
όταν  
αφήσετε  
ελεύθερο το  
πλήκτρο του  
ποντικιού.

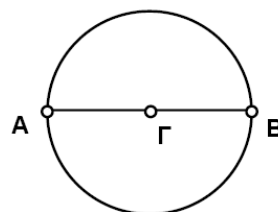
3. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας  $\Gamma B$ .



Βήμα 1



Βήμα 2



Βήμα 3

Επιλέξτε τον  
κύκλο και  
την εντολή  
**Μήκος  
κύκλου** από  
το μενού  
**Μέτρηση**.

4. Μετρήστε το μήκος του κύκλου.
5. Μετρήστε το τμήμα  $AB$  (τη διάμετρο του κύκλου).
6. Μικρύνετε τον κύκλο.

Επιλέξτε,  
κατά σειρά,  
τη μέτρηση  
του μήκους  
και τη  
μέτρηση του  
μήκους  
κύκλου. Στη  
συνέχεια  
επιλέξτε την  
εντολή  
**Πινακοποίη-  
ση** από το  
μενού  
**Γράφημα**.

7. Δημιουργήστε έναν πίνακα για τη μέτρηση του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος και τη μέτρηση του μήκους κύκλου.
8. Μεγαλώστε λίγο τον κύκλο. Κατόπιν προχωρήστε σε προσθήκη εγγραφής στον πίνακα.

### Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο (συνέχεια)

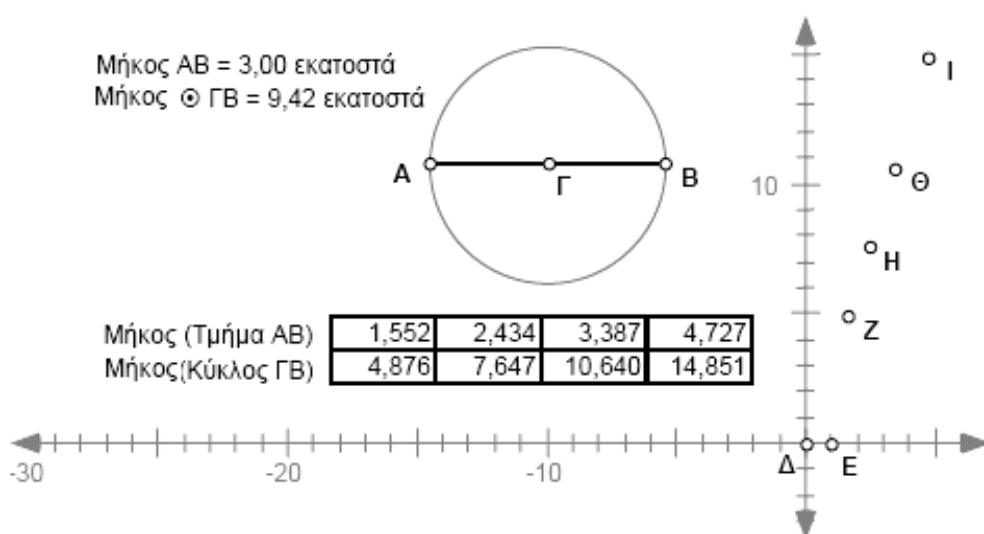
Κάντε διπλό κλικ στο εσωτερικό του πίνακα για την προσθήκη της εγγραφής.

9. Επαναλάβετε το βήμα 8 ωσότου ο πίνακας περιέχει τουλάχιστον τέσσερις εγγραφές.

Κάντε κλικ στο εσωτερικό του πίνακα για να επιλεγεί. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση δεδομένων πίνακα** από το μενού **Γράφημα**. Κάντε κλικ στο **Αποτύπωση**.

10. Αποτυπώστε τα δεδομένα του πίνακα. Ίσως χρειαστεί να σύρετε το σημείο E προς το σημείο Δ ώστε να προσαρμόσετε την κλίμακα των αξόνων σας προκειμένου να είναι ορατά τα σημεία.

**Αποτύπωση δεδομένων πίνακα** από το μενού **Γράφημα**. Κάντε κλικ στο **Αποτύπωση**.



E1. Περιγράψτε τα σημεία που εμφανίζονται στο γράφημα.



Επιλέξτε, κατά σειρά, τη μέτρηση της διαμέτρου και τη μέτρηση του μήκους κύκλου. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**.

11. Αποτυπώστε τις μετρήσεις της διαμέτρου και του μήκους κύκλου με συντεταγμένες (x, y). Αλλάξτε το χρώμα του σημείου, ώστε να διακρίνεται από άλλα σημεία του γραφήματος. Επίσης, ενεργοποιήστε την εντολή Σχεδίαση ίχνους σημείων από το μενού Προβολή.

12. Σύρετε το σημείο A ή το σημείο B για να τροποποιηθεί ο κύκλος. Παρατηρήστε το σημείο όπως αποτυπώνεται.

13. Κατασκευάστε μια ημιευθεία από το σημείο Δ προς οποιοδήποτε από τα αποτυπωμένα σημεία.

14. Μετρήστε την κλίση της ημιευθείας.

### Λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο (συνέχεια)

Ε2. Πώς σχετίζεται η κλίση της ημιευθείας με το λόγο μήκους κύκλου προς διάμετρο;



Ε3. Ποια είναι η σημασία του γεγονότος ότι όλα τα σημεία που αποτυπώνονται βρίσκονται πάνω σε αυτή την ημιευθεία;



Ε4. Ο λόγος μήκους κύκλου προς διάμετρο αναπαρίσταται με το γράμμα  $\pi$ . Συμπληρώστε τις ακόλουθες εκφράσεις χρησιμοποιώντας τον αριθμό  $\pi$ , το γράμμα C για το μήκος κύκλου και το γράμμα D για τη διάμετρο:

$$\pi = \frac{\quad}{\quad}$$
$$C = \frac{\quad}{\quad}$$

Ε5. Γράψτε μια σχέση για το μήκος κύκλου χρησιμοποιώντας τα C,  $\pi$  και  $\rho$  (ακτίνα κύκλου).



## Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

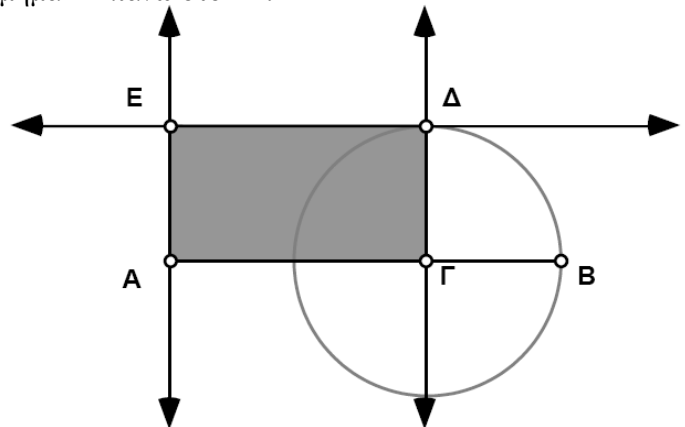
Έστω ότι διαθέτετε ένα συγκεκριμένο φράχτη και θέλετε να περιφράξετε τη μεγαλύτερη δυνατή ορθογώνια περιοχή. Ποιο ορθογώνιο θα επιλέγατε; Με άλλα λόγια, ποιο είδος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου έχει το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο; Θα ανακαλύψετε την απάντηση στα πλαίσια αυτής της έρευνας. Επίσης, αν έχετε ήδη μια ιδέα, η έρευνα αυτή θα σας βοηθήσει να επιβεβαιώσετε, αλλά και να θεμελιώσετε την ιδέα σας.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AG$  πάνω στο  $AB$ .

Επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , το σημείο  $A$  και το σημείο  $G$ . Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

3. Κατασκευάστε ευθείες κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και διερχόμενες από τα σημεία  $A$  και  $G$ .



Προσέξτε να αφήσετε ελεύθερο το πλήκτρο του ποντικιού όταν ο δείκτης είναι πάνω στο σημείο  $B$ .

4. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας  $GB$ .
5. Κατασκευάστε το σημείο  $\Delta$  στο σημείο τομής του κύκλου με την κάθετη ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $G$ .
6. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο  $\Delta$  και παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .

7. Κατασκευάστε το σημείο  $E$ , την τέταρτη κορυφή του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου  $AG\Delta E$ .

Επιλέξτε διαδοχικά τις κορυφές του ορθογώνιου. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εσωτερικού πολυγώνου** από το μενού **Κατασκευή**.

8. Κατασκευάστε το εσωτερικό  $AG\Delta E$ .
9. Μετρήστε το εμβαδόν και την περίμετρο αυτού του πολυγώνου.
10. Σύρτε το σημείο  $G$  εμπρός και πίσω ώστε να παρατηρήσετε τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το εμβαδόν και η περίμετρος του παραλληλόγραμμου.

### Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού (συνέχεια)

Επιλέξτε το σημείο A και το σημείο Γ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή

**Απόσταση** από το μενού **Μέτρηση**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τη μέτρηση του AE.



11. Μετρήστε τα AG και AE.  
E1. Χωρίς να κάνετε μέτρηση, δηλώστε πώς σχετίζεται το AB με την περίμετρο του ορθογώνιου. Εξηγήστε γιατί το παραλληλόγραμμο αυτό έχει σταθερή περίμετρο.



E2. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Γ παρατηρήστε ποιο ορθογώνιο σχήμα δίνει το μέγιστο εμβαδόν. Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, αυτό το σχήμα;

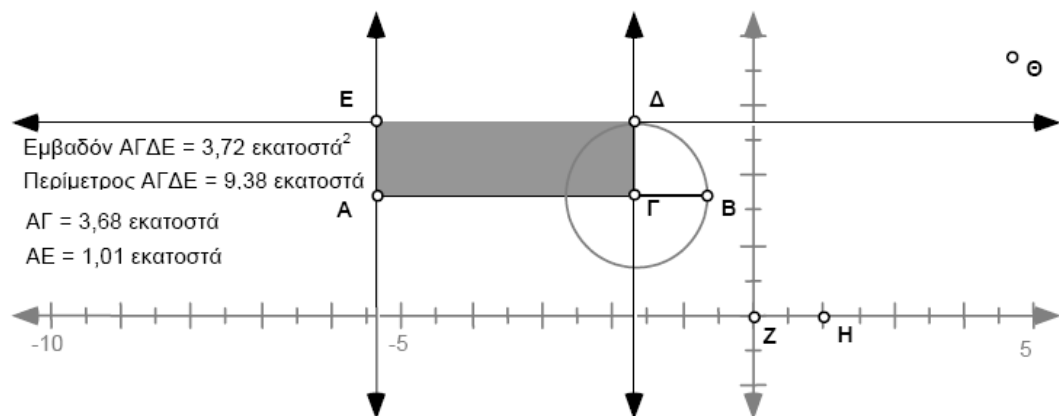
Στα βήματα 12-14 θα ανακαλύψετε τη σχέση αυτή με γραφικό τρόπο.

Επιλέξτε κατά σειρά τις μετρήσεις του AG και του εμβαδού του ΓΔΕΑ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή

**Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**. Εάν το σημείο Θ δεν είναι ορατό, μεταφέρετε το σημείο Η για την προσαρμογή της κλίμακας των αξόνων.

12. Αποτυπώστε το μέγεθος του AG και του εμβαδού του ΑΓΔΕ με (x, y). Θα πρέπει να λάβετε άξονες και ένα σημείο Θ όπως στο επόμενο σχήμα.

13. Σύρτε το σημείο Γ προκειμένου να μετακινηθεί το σημείο Θ, ώστε να αντιστοιχεί σε διαφορετικά μήκη πλευρών και εμβαδά.





### Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού (συνέχεια)

Επιλέξτε το σημείο Θ και το σημείο Γ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Γεωμετρικού τύπου** από το μενού **Κατασκευή**.

14. Για να δείτε ένα γράφημα όλων των δυνατών εμβαδών του παραλληλόγραμμου αυτού, κατασκευάστε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Θ όπως ορίζεται από το σημείο Γ. Τοποθετήστε το σημείο Γ έτσι ώστε το σημείο Θ να βρίσκεται στη μέγιστη τιμή του εμβαδού του παραλληλόγραμμου.

Μπορείτε να επιλέξετε το σημείο Θ και να μετρήσετε τις συντεταγμένες του.

- E3. Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου Θ στο γράφημα και εξηγήστε πώς σχετίζονται με τα μήκη των πλευρών και με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.



15. Μεταφέρετε το σημείο Γ έτσι ώστε το σημείο Θ να κινηθεί εμπρός και πίσω μεταξύ των δύο σημείων Ζ και Η στο γράφημα.

- E4. Δώστε τις συντεταγμένες των σημείων Ζ και Η στο γράφημα και εξηγήστε πώς σχετίζονται με τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.



### Περαιτέρω εξερεύνηση

- Διερευνήστε λόγους εμβαδού προς περίμετρο σε άλλα πολύγωνα. Διατυπώστε μια εικασία σχετικά με το είδος των πολυγώνων που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.
- Ποια είναι η εξίσωση του γραφήματος που κατασκευάσατε; Έστω  $ΑΓ = x$  και  $ΑΒ = P/2$ , όπου  $P$  είναι η περίμετρος (σταθερά). Γράψτε μια εξίσωση για το εμβαδόν  $ΑΓΔΕ$  σε συνάρτηση με τα  $x$ ,  $P$ . Για ποια τιμή του  $x$  (σε συνάρτηση με το  $P$ ) έχουμε μια μέγιστη τιμή του  $A$ ;

## Οπτική επίδειξη πυθαγόρειου θεωρήματος

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

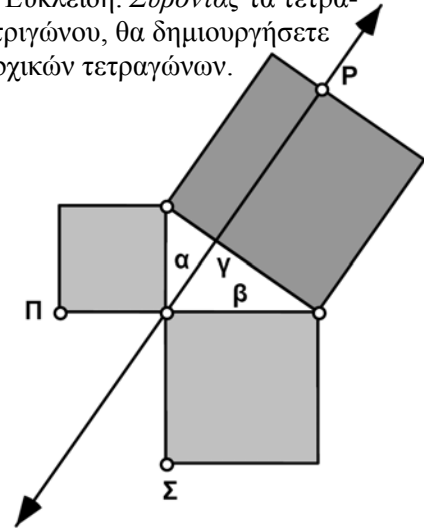
Στη δραστηριότητα αυτή θα πραγματοποιήσετε μια οπτική επίδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος βασισμένη στην απόδειξη του Ευκλείδη. Σύροντας τα τετράγωνα κατά μήκος των πλευρών του ορθογώνιου τριγώνου, θα δημιουργήσετε σχήματα χωρίς να μεταβάλετε το εμβαδόν των αρχικών τετραγώνων.

### Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες** κι επιλέξτε το αρχείο **Πυθαγόρειο.gsp**.

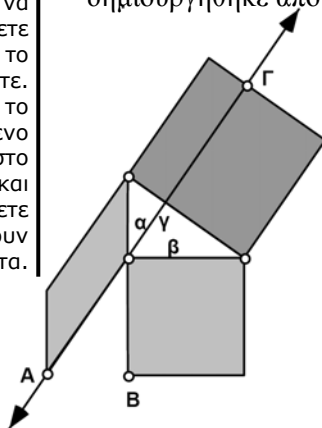
Κάντε κλικ σε ένα εσωτερικό πολυγώνου για την επιλογή του. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εμβαδού** από το μενού **Μέτρηση**.

1. Ανοίξτε το αρχείο **Πυθαγόρειο.gsp**. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με τετράγωνα στις πλευρές του.
2. Μετρήστε τα εμβαδά των τετραγώνων.
3. Σύρτε το σημείο Π ώστε να βρεθεί επάνω στην ευθεία που είναι κάθετος στην υποτεινούσα. Σημειώστε ότι καθώς το τετράγωνο γίνεται παραλληλόγραμμο το εμβαδόν του δε μεταβάλλεται.
4. Σύρτε το σημείο Σ ώστε να βρεθεί επάνω στην ευθεία. Θα πρέπει να συμπέσει με το σημείο Α έτσι ώστε τα δύο παραλληλόγραμμα να σχηματίζουν ένα ακανόνιστο σχήμα.

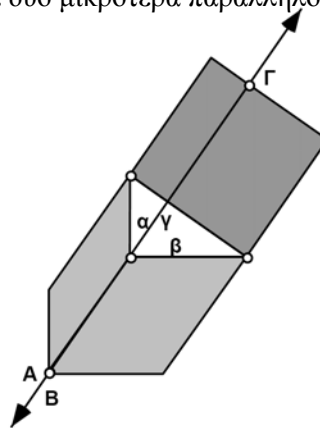


Προκειμένου να επιβεβαιώσετε ότι το σχήμα αυτό είναι όμοιο, μπορείτε να το αντιγράψετε και να το επικολλήσετε. Μεταφέρετε το επικολλημένο αντίγραφο στο κάτω σχήμα και θα διαπιστώσετε ότι ταιριάζουν απόλυτα.

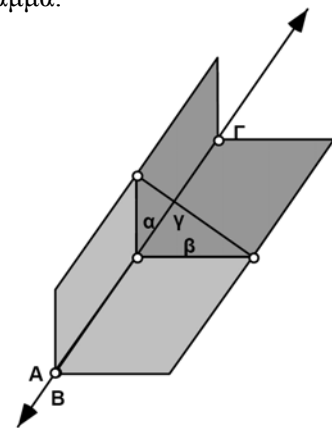
5. Σύρτε το σημείο Ρ έτσι ώστε το μεγάλο τετράγωνο να παραμορφωθεί και να γεμίσει το τρίγωνο. Το εμβαδόν αυτού του σχήματος δε μεταβάλλεται. Θα πρέπει να είναι όμοιο με το σχήμα που δημιουργήθηκε από τα δύο μικρότερα παραλληλόγραμμα.



Βήμα 3



Βήμα 4



Βήμα 5

Για επαλήθευση ότι αυτό ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, μεταβάλετε το σχήμα του κι επαναλάβετε.

- E1. Με ποιον τρόπο αυτά τα όμοια σχήματα καταδεικνύουν το πυθαγόρειο θεώρημα; (Υπόδειξη: Εάν τα σχήματα είναι όμοια, τι γνωρίζετε για τα εμβαδά τους;)



## Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Η χρυσή τομή εμφανίζεται συχνά στη φύση: για παράδειγμα, στις αναλογίες του όστρακου ενός ναυτίλου ή και σε ορισμένες αναλογίες στο σώμα και στο πρόσωπό μας. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές εμφανίζουν τη χρυσή τομή ονομάζεται χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Σε ένα ορθογώνιο αυτού του είδους ο λόγος των διαστάσεων δύο πλευρών προς τη μεγάλη πλευρά ισούται με το λόγο της μεγάλης προς τη μικρή πλευρά. Τα χρυσά ορθογώνια παραλληλόγραμμο είναι ευχάριστα στην όραση, ίσως επειδή προσεγγίζουν το σχήμα του οπτικού πεδίου μας. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται συχνά στην αρχιτεκτονική και ιδιαίτερα στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική. Στη δραστηριότητα αυτή θα κατασκευάσετε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και θα βρείτε μια προσέγγιση της χρυσής τομής. Κατόπιν θα ανακαλύψετε πώς μέσα σε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούν να βρεθούν μικρότερα χρυσά παραλληλόγραμμο. Τέλος, θα κατασκευάσετε μια χρυσή σπείρα (σπειροειδή καμπύλη).

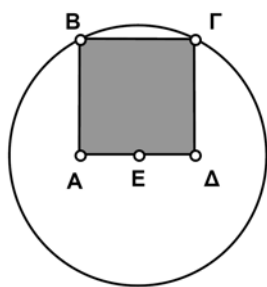


$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

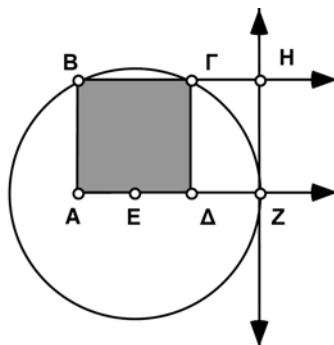
### Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες** κι επιλέξτε το αρχείο **Τετράγωνο.gsp**. Το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Τετράγωνο από ακμή** κατασκευάζει το τετράγωνο από τα δύο άκρα της πλευράς, όχι από το μέσο.

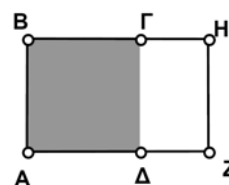
1. Χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο Τετράγωνο από ακμή για την κατασκευή ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ καθώς και του εσωτερικού του.
2. Προσανατολίστε το τετράγωνο έτσι ώστε τα σημεία ελέγχου σημεία Α και Β να βρίσκονται στην αριστερή πλευρά, το ένα πάνω από το άλλο.
3. Κατασκευάστε το μέσο Ε του τμήματος ΑΔ.
4. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΕΓ.



Βήματα 1-4



Βήματα 5-8



Βήματα 9-11

### Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (συνέχεια)

Διατηρήστε πατημένο το πλήκτρο του ποντικιού στο εργαλείο τμημάτων για την εμφάνιση της παλέτας εργαλείων σχεδίασης ευθύγραμμων αντικειμένων. Σύρτε το δείκτη προς τα δεξιά για να επιλέξετε το εργαλείο ημιευθειών.

5. Επεκτείνετε τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ με ημιευθείες όπως στο σχήμα.
6. Κατασκευάστε το σημείο Ζ στην τομή του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ με τον κύκλο.
7. Κατασκευάστε μια ευθεία κάθετη στο ΑΔ που διέρχεται από το σημείο Ζ.
8. Κατασκευάστε το σημείο Η στην τομή αυτής της καθέτου με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΖΗΒ είναι ένα χρυσό ορθογώνιο.

Επιλέξτε τα αντικείμενα και έπειτα την εντολή **Απόκρυψη** από το μενού **Προβολή**.

9. Αποκρύψτε την ευθεία, τις ημιευθείες, τον κύκλο και το σημείο Ε.
10. Αποκρύψτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΔΓ και ΒΓ.
11. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΗ, ΗΖ και ΖΑ.

12. Μετρήστε τα ΑΒ και ΑΖ.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ και ΑΒ και την εντολή **Λόγου** από το μενού **Μέτρηση**.

13. Μετρήστε το λόγο ΑΖ προς ΑΒ.
14. Υπολογίστε την έκφραση  $(\overline{ΑΒ} + \overline{ΑΖ})/ΑΖ$ .
15. Σύρτε το σημείο Α ή το σημείο Β ώστε να επαληθεύσετε ότι το παραλληλόγραμμό σας παραμένει πάντοτε χρυσό.

Ε1. Η χρυσή τομή (λόγος) αναπαρίσταται συχνά με το γράμμα Φ. Γράψτε μια προσέγγιση για το Φ.

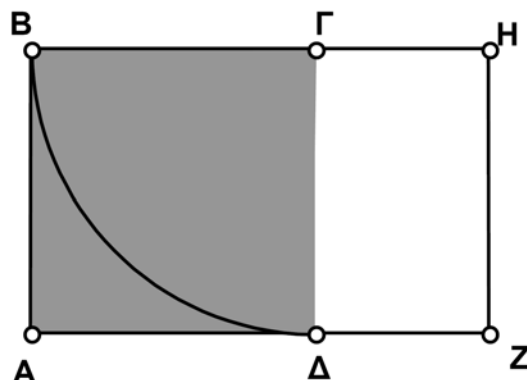


Συνεχίστε την έρευνα του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και προχωρήστε στην κατασκευή μιας χρυσής σπείρας.

16. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΓΒ.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τον κύκλο και τα σημεία Β και Δ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Τόξου σε κύκλο** από το μενού **Κατασκευή**.

17. Κατασκευάστε τόξο κύκλου από το σημείο Β στο σημείο Δ. Κατόπιν αποκρύψτε τον κύκλο.



### Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (συνέχεια)

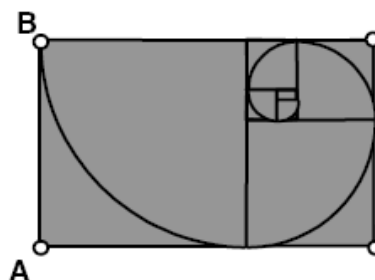
Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα (αλλά όχι τις μετρήσεις). Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Δημιουργία νέου εργαλείου..** από τα Προσαρμοσμένα εργαλεία στην Εργαλειοθήκη.

18. Δημιουργήστε Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή.
19. Κατασκευάστε το παραλληλόγραμμο όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Κατόπιν χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για τα σημεία Z και Δ. Θα πρέπει να διαπιστώσετε ότι το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται από το Προσαρμοσμένο εργαλείο είναι απόλυτα προσαρμοσμένο στην περιοχή ΔΖΗΓ.
- E2. Διατυπώστε μια υπόθεση σχετικά με την περιοχή ΔΖΗΓ.



Εάν κατά τη χρήση του Προσαρμοσμένου εργαλείου το παραλληλόγραμμό σας δεν είναι κατάλληλο, αναιρέστε την ενέργεια και δοκιμάστε εκ νέου στα σημεία με την αντίθετη σειρά.

20. Συνεχίστε τη χρήση του Προσαρμοσμένου εργαλείου εντός του χρυσού παραλληλόγραμμου για τη δημιουργία μιας χρυσής σπείρας. Αποκρύψτε μη απαραίτητα σημεία.



### Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Έστω ότι η μικρή πλευρά του χρυσού παραλληλόγραμμου έχει μήκος 1 και η μεγάλη πλευρά μήκος  $\Phi$ . Γράψτε μια σχέση αναλογίας μεταξύ των πλευρών, πολλαπλασιάστε χιαστί και χρησιμοποιήστε τον τύπο του τετραγώνου για τον υπολογισμό μιας ακριβούς τιμής του  $\Phi$ .
2. Υπολογίστε τα  $\Phi^2$  και  $1/\Phi$ . Πώς συνδέονται οι αριθμοί αυτοί με το  $\Phi$ ; Με αλγεβρικές πράξεις, δείξτε γιατί ισχύουν αυτές οι σχέσεις.

## Λόγοι εμβαδών

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Στην εξερεύνηση αυτή θα ανακαλύψετε μια σχέση μεταξύ εμβαδών όμοιων σχημάτων.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ, όπου το μήκος του AB είναι μεγαλύτερο του μήκους του ΓΔ.

Για την κατασκευή του εσωτερικού, επιλέξτε τις κορυφές. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εσωτερικού τετράπλευρου** από το μενού **Κατασκευή**.

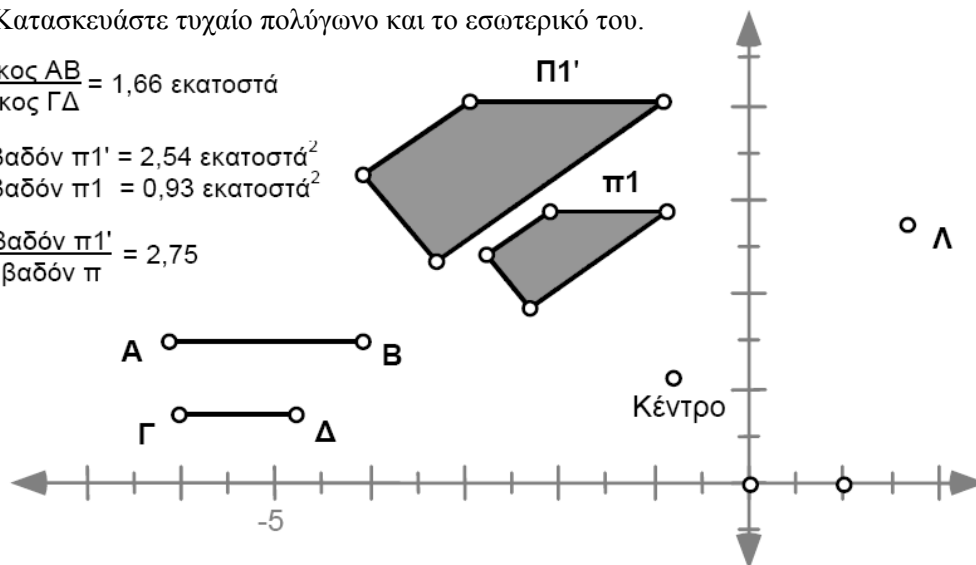
2. Κατασκευάστε τυχαίο πολύγωνο και το εσωτερικό του.

Μήκος AB = 1,66 εκατοστά  
Μήκος ΓΔ

Εμβαδόν π1' = 2,54 εκατοστά<sup>2</sup>

Εμβαδόν π1 = 0,93 εκατοστά<sup>2</sup>

Εμβαδόν π1' / Εμβαδόν π = 2,75



Κάντε διπλό κλικ στο σημείο για την επιλογή του ως κέντρου.

3. Κατασκευάστε ένα σημείο στο εξωτερικό του πολυγώνου και επιλέξτε το ως κέντρο.

Επιλέξτε τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ και κατόπιν την εντολή **Επιλογή λόγου** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

4. Επιλέξτε το λόγο AB/ΓΔ.

Διατηρώντας επιλεγμένα τα AB και ΓΔ, επιλέξτε την εντολή **Λόγου** από το μενού **Μέτρηση**.

5. Μετρήστε το λόγο AB/ΓΔ.

Επιλέξτε το πολύγωνο και κατόπιν την εντολή **Αυξομείωση** από το μενού **Μετασχηματισμός**.

6. Εκτελέστε αυξομείωση των κορυφών, των πλευρών και του εσωτερικού του πολυγώνου κατά τον επιλεγμένο λόγο. (Εάν το AB είναι μεγαλύτερου μήκους από το ΓΔ, το είδωλο πρέπει να είναι μεγαλύτερο του αρχικού αντικειμένου.)

### Λόγοι εμβαδών (συνέχεια)

7. Μετρήστε το λόγο μιας πλευράς του μετασχηματισμένου πολυγώνου προς την αντίστοιχη πλευρά του αρχικού πολυγώνου.

8. Μετρήστε το λόγο ενός διαφορετικού ζεύγους αντίστοιχων πλευρών.

9. Σύρτε τα σημεία και παρατηρήστε τους λόγους που μετρήσατε.

E1. Πώς σχετίζεται ο λόγος ενός ζεύγους μηκών αντίστοιχων πλευρών με το λόγο αυξομείωσης;



10. Μετρήστε τα εμβαδά των πολυγώνων.

11. Υπολογίστε το λόγο του εμβαδού του μετασχηματισμένου πολυγώνου προς το εμβαδόν του αρχικού πολυγώνου.

12. Επιλέξτε, κατά σειρά, τη μέτρηση του λόγου του μήκους των πλευρών και του υπολογισμού του λόγου των εμβαδών. Επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**. Έτσι, θα δημιουργηθεί ένα ζεύγος αξόνων και ένα σημείο, του οποίου οι συντεταγμένες είναι οι δύο αριθμοί που επιλέξατε παραπάνω. Εάν δεν μπορείτε να δείτε το αποτυπωμένο σημείο, μεταφέρετε το σημείο (1, 0) πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων για να προσαρμοστεί η κλίμακα των αξόνων.

13. Με επιλεγμένο αυτό το σημείο (σημείο Λ στο προηγούμενο διάγραμμα), επιλέξτε την εντολή **Σχεδίαση ίχνους σημείων** από το μενού **Προβολή**.

14. Σύρτε το σημείο Β ώστε να πειραματιστείτε με διαφορετικούς παράγοντες κλίμακας. Το αποτυπωμένο σημείο θα διαγράψει ένα γράφημα του λόγου του μήκους των πλευρών ως προς το λόγο των εμβαδών για διάφορα παρόμοια σχήματα.

E2. Για την ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ μήκους πλευρών και εμβαδών, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα για ορισμένους ειδικούς λόγους μήκους πλευρών και κατόπιν γενικεύστε για κάθε συντελεστή κλίμακας  $\alpha/\beta$ .

Λόγοι μήκους πλευρών	2	3	1	1/2	1/10	$\alpha/\beta$
Λόγοι εμβαδών						

E3. Διατυπώστε τα ευρήματά σας σε μορφή υπόθεσης.



E4. Εξηγήστε πώς το σχήμα του γραφήματος στο σχέδιό σας υποστηρίζει την υπόθεσή σας.



## **Λόγοι εμβαδών (συνέχεια)**

### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Μετακινήστε το σημείο A κοντά στο σημείο Γ. Δημιουργήστε ένα κουμπί ενεργειών για την προσθήκη κίνησης στο σημείο B πάνω στο τμήμα ΓΔ. Περιγράψτε τη δράση του κουμπιού.
2. Σύρτε το κέντρο αυξομείωσης. Εξηγήστε γιατί το σημείο Λ (αποτυπωμένο σημείο) δε μετακινείται.
3. Ποια είναι η σχέση του λόγου όγκων όμοιων στερεών με το λόγο των επιφανειακών εμβαδών τους και το λόγο των αντίστοιχων μηκών; Εξετάστε το θέμα αυτό με υπολογισμό των όγκων και των επιφανειακών εμβαδών δύο κιβωτίων, όπου το μήκος, το πλάτος και το ύψος του ενός είναι διπλάσια των αντίστοιχων διαστάσεων του άλλου.



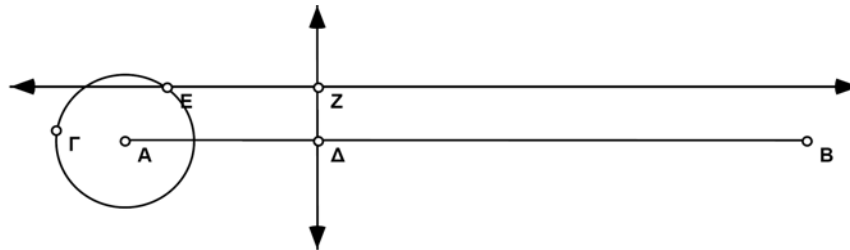
## Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Στην εξερεύνηση αυτή θα κατασκευάσετε μια μηχανή κινούμενων γραφικών, η οποία σχεδιάζει μια ειδική καμπύλη γνωστή ως *ημιτονοειδές κύμα*. Παραλλαγές ημιτονοειδών καμπυλών είναι τα γραφήματα *περιοδικών συναρτήσεων*, δηλαδή επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η κίνηση ενός εκκρεμούς και της παλίρροιας της θάλασσας περιγράφονται από περιοδικές συναρτήσεις.

Τα βήματα κατασκευής είναι τα εξής:

1. Κατασκευάστε οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα AB.



2. Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα AG.

3. Κατασκευάστε σημείο Δ στο τμήμα AB.

Επιλέξτε σημείο Δ  
και τμήμα AB και  
κατόπιν την εντολή  
**Κάθετη ευθείας**  
από το μενού  
**Κατασκευή**.

4. Κατασκευάστε ευθεία κάθετη στο AB και διερχόμενη από το σημείο Δ.

5. Κατασκευάστε σημείο E στον κύκλο.

6. Κατασκευάστε ευθεία παράλληλη στο τμήμα AB και διερχόμενη από το σημείο E.

7. Κατασκευάστε σημείο Z, δηλαδή το σημείο τομής της κάθετης ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ με την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο E.

- E1. Σύρτε το σημείο Δ και περιγράψτε τι συμβαίνει στο σημείο Z. (Μην ανησυχείτε, δεν πρόκειται για πονηρή ερώτηση!)



- E2. Σύρτε το σημείο E γύρω από τον κύκλο και περιγράψτε τη συμπεριφορά του σημείου Z.



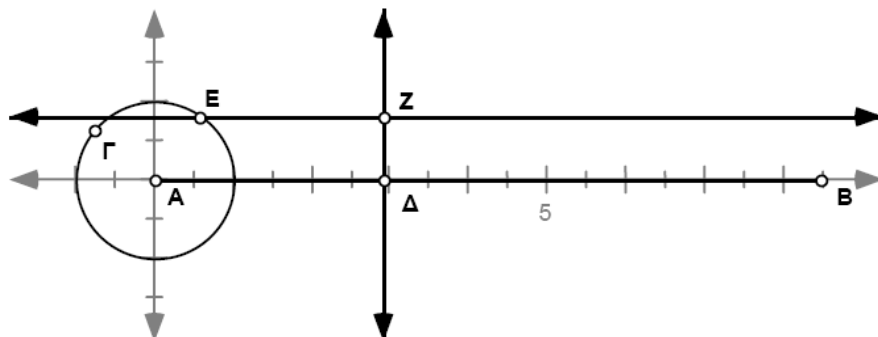
### Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων (συνέχεια)

Ε3. Σύντομα θα δημιουργήσετε μια κίνηση στο σχέδιό σας η οποία συνδυάζει αυτές τις δύο κινήσεις. Όμως πρώτα προσπαθήστε να μαντέψετε τη διαδρομή του σημείου Z όταν το σημείο Δ κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος και το σημείο E κινείται γύρω από τον κύκλο. Σχεδιάστε τη διαδρομή που θεωρείτε σωστή παρακάτω.



Επιλέξτε, κατά σειρά, το σημείο Δ, το τμήμα AB, το σημείο E και τον κύκλο. Έπειτα επιλέξτε την εντολή **Κουμπιά ενεργειών: Προσθήκη κίνησης** από το μενού **Επεξεργασία**. Χρησιμοποιήστε τα αναδυόμενα μενού στην καρτέλα Προσθήκη κίνησης για την επιλογή των ρυθμίσεων των κινούμενων γραφικών σε κάθε περίπτωση.

8. Δημιουργήστε κουμπί ενεργειών για την προσθήκη κίνησης μονής κατεύθυνσης στο σημείο Δ του τμήματος AB και στο σημείο E του κύκλου.
9. Επιλέξτε το σημείο Z και κατόπιν την εντολή Σχεδίαση ίχνους σημείου από το μενού Προβολή.
10. Μετακινήστε το σημείο Δ έτσι ώστε να βρίσκεται δεξιά του κύκλου.
11. Κάντε κλικ στο κουμπί Προσθήκη κίνησης.
- Ε4. Σχεδιάστε τη διαδρομή που διαγράφει το σημείο Z. Μοιάζει η πραγματική διαδρομή με εκείνη που μαντέψατε στο ερώτημα Ε3.; Σε τι διαφέρουν;
12. Επιλέξτε τον κύκλο και κατόπιν την εντολή Ορισμός μοναδιαίου κύκλου από το μενού Γράφημα. Πρέπει να σχεδιαστεί ένα γράφημα με την αρχή των αξόνων στο σημείο A. Το σημείο B πρέπει να ανήκει στον άξονα x. Η συντεταγμένη y του σημείου Z πάνω από το τμήμα AB είναι η τιμή του ημιτόνου της γωνίας EAD.



### **Σχεδίαση ημιτονοειδών κυμάτων (συνέχεια)**

- E5. Εάν ο κύκλος έχει ακτίνα ίση με μια μονάδα του γραφήματος, πόσο είναι το μήκος κύκλου του σε μονάδες γραφήματος; Υπολογίστε το μόνοι σας. Μη χρησιμοποιήσετε το Sketchpad για τη μέτρηση του μήκους κύκλου, επειδή το πρόγραμμα θα τη μετρήσει σε ίντσες ή εκατοστά (ανάλογα με τη ρύθμισή σας στην καρτέλα «Επεξεργασία/Προτιμήσεις») και όχι σε μονάδες γραφήματος.



13. Μετρήστε τις συντεταγμένες του σημείου B.
14. Τροποποιήστε το ευθύγραμμο τμήμα και τον κύκλο και συνεχίστε να πειραματίζεστε με τα κινούμενα γραφικά ωσότου η καμπύλη αρχίσει να διαγράφει ξανά την τροχιά που διέγραψε προηγουμένως, αντί να σχεδιάζει μια νέα καμπύλη κάθε φορά (διατηρήστε το σημείο B στον άξονα x).
- E6. Ποια είναι η σχέση μεταξύ της συντεταγμένης x του σημείου B και του μήκους του κύκλου (σε μονάδες γραφήματος); Εξηγήστε την απάντησή σας.



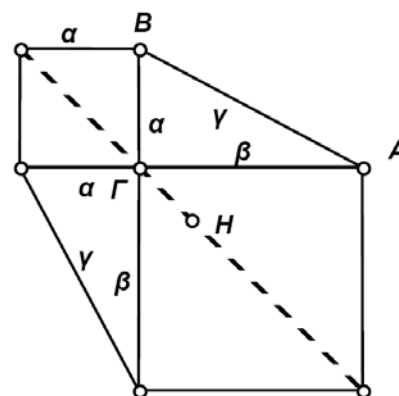
## Η απόδειξη του Leonardo da Vinci

Ο Ιταλός Leonardo da Vinci (1452-1519) ήταν ζωγράφος, μηχανικός, και εφευρέτης την εποχή της Αναγέννησης. Έγινε διάσημος από τον πίνακά του *Mona Lisa*. Επίσης, στον Leonardo da Vinci αποδίδεται η ακόλουθη απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος.

### Κατασκευή

Στο σχήμα αυτό  
δε χρειάζεται η  
κατασκευή  
τετραγώνου  
στην υποτείνουσα.

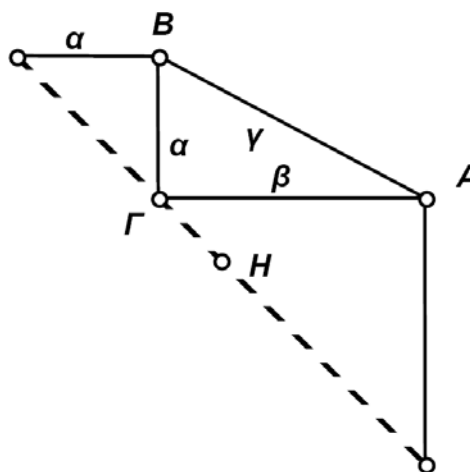
1. Κατασκευάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και από ένα τετράγωνο σε κάθε κάθετη πλευρά του όπως στο σχήμα.
2. Συνδέστε τις κορυφές των τετραγώνων για την κατασκευή ενός δεύτερου ορθογώνιου τριγώνου, όμοιου με το αρχικό τρίγωνο.
3. Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το σημείο Γ και που συνδέει τις δύο απώτερες κορυφές των τετραγώνων.



4. Κατασκευάστε το μέσο H αυτού του τμήματος.

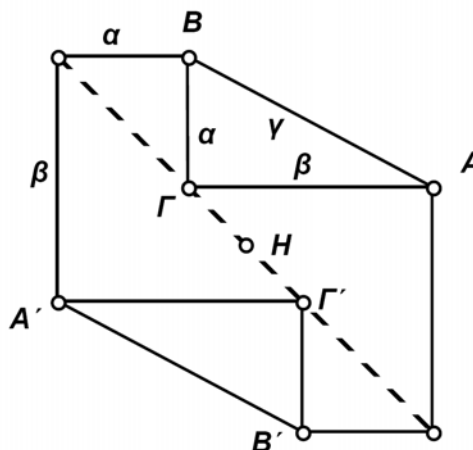
Το υπομενού  
**Κουμπιά  
ενεργειών**  
βρίσκεται στο  
μενού  
**Επεξεργασία.**

5. Το τμήμα αυτό διαιρεί το σχήμα σε δύο κατοπτρικά είδωλα. Επιλέξτε όλα τα τμήματα και σημεία στη μια πλευρά του τμήματος και δημιουργήστε ένα κουμπί ενεργειών Απόκρυψη/Εμφάνιση. Αλλάξτε την ετικέτα του σε Εμφάνιση ανάκλασης/Απόκρυψη ανάκλασης.
6. Κάντε διπλό κλικ στο κουμπί Απόκρυψη ανάκλασης. Θα πρέπει να δείτε το ήμισυ του σχήματος.

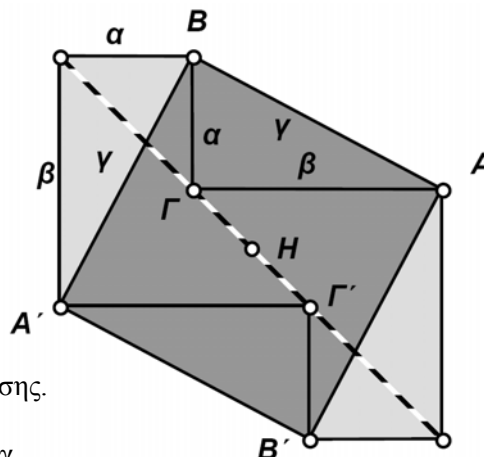


### Η απόδειξη του Leonardo da Vinci (συνέχεια)

7. Επιλέξτε το σημείο  $H$  ως κέντρο και περιστρέψτε ολόκληρο το σχήμα κατά γωνία  $180^\circ$  ως προς το  $H$ .
8. Επιλέξτε όλα τα αντικείμενα που αποτελούν το περιστραμμένο ήμισυ του σχήματος και δημιουργήστε κουμπι ενεργειών Απόκρυψης/Εμφάνισης. Αλλάξτε την ετικέτα του κουμπιού αυτού σε Εμφάνιση περιστροφής/Απόκρυψη περιστροφής. Μην αποκρύψετε ακόμη το περιστραμμένο ήμισυ.



9. Κατασκευάστε τα τμήματα  $A'B$  και  $B'A$ . Βλέπετε το τετράγωνο πλευράς  $\gamma$ ;
10. Κατασκευάστε το εσωτερικό του  $BA'B'A$  και των δύο γειτονικών του τριγώνων.
11. Επιλέξτε τα τμήματα  $A'B$  και  $B'A$  και τα τρία εσωτερικά σχήματα που κατασκευάσατε. Δημιουργήστε κουμπι ενεργειών Απόκρυψης/Εμφάνισης. Ονομάστε το κουμπι αυτό Εμφάνιση τετραγώνου  $\gamma$ /Απόκρυψη τετραγώνου  $\gamma$ .



## **Η απόδειξη του Leonardo da Vinci (συνέχεια)**

### **Έρευνα**

Από την εμπειρία αυτής της κατασκευής, ίσως έχετε μια καλή εικόνα του τρόπου απόδειξης του Leonardo da Vinci. Κάντε κλικ σε όλα τα κουμπιά απόκρυψης, κατόπιν πατήστε τα κουμπιά με την εξής σειρά: Εμφάνιση ανάκλασης, Εμφάνιση περιστροφής, Απόκρυψη ανάκλασης, Εμφάνιση τετραγώνου γ. Θα πρέπει να δείτε το μετασχηματισμό δύο ορθογώνιων τριγώνων με τετράγωνα στις κάθετες πλευρές τους σε δύο πανομοιότυπα ορθογώνια τρίγωνα με τετράγωνα στις υποτείνουσές τους. Εξηγήστε σε ένα συμμαθητή σας ή παρουσιάστε σε όλη την τάξη την απόδειξη του πυθαγόρειου θεωρήματος από τον Leonardo.

### **Απόδειξη**

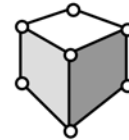
Η απόδειξη του Leonardo da Vinci είναι μια από τις κομψές αποδείξεις, στις οποίες το σχήμα αποκαλύπτει σχεδόν ολόκληρη την ιστορία. Δώστε μια γραπτή εξήγηση του γεγονότος ότι το αρχικό και το τελικό εξάγωνο έχουν ίσα εμβαδά και του τρόπου απόδειξης του πυθαγόρειου θεωρήματος μέσω αυτών των εξαγώνων.

## Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους

Μια πιο συνήθης περίπτωση της προοπτικής ενός σημείου συμβαίνει όταν υπάρχουν δύο σύνολα παράλληλων ευθειών, καθένα με το δικό του σημείο φυγής. Δεξιά βλέπετε το σχέδιο ενός στερεού με δύο σημεία φυγής. Για την κατασκευή του σχεδίου ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα.

σημείο φυγής

σημείο φυγής

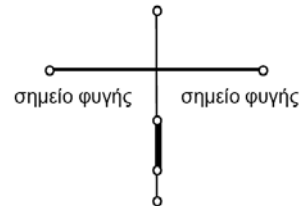


*Άνοιγμα νέου σχεδίου*

Για τη δημιουργία της κάθετης ευθείας, επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα και την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

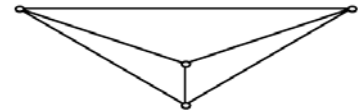
1. Κατασκευάστε τη γραμμή του ορίζοντα, την εμπρόσθια ακμή του στερεού και ευθύγραμμο τμήματα προς τα σημεία φυγής.

α. Σχεδιάστε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα πάνω από το μέσο της οθόνης. Αυτή είναι η γραμμή του ορίζοντα και τα άκρα της είναι το αριστερό και το δεξιό σημείο φυγής, αντίστοιχα.



β. Κατασκευάστε ένα σημείο σε κάποια θέση κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν κατασκευάστε μια ευθεία κάθετη στο τμήμα που να διέρχεται από το σημείο.

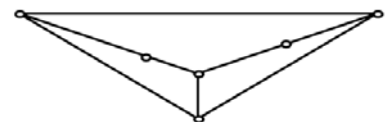
γ. Σε αυτή την κάθετη ευθεία κατασκευάστε ένα δεύτερο σημείο κάτω από την εγγραφή του ορίζοντα. Κατασκευάστε ένα παχύ ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία της κάθετης ευθείας. Αποκρύψτε την κάθετη ευθεία. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που απομένει είναι η εμπρόσθια ακμή του στερεού.



δ. Κατασκευάστε ευθύγραμμο τμήματα από το πάνω και κάτω σημείο της εμπρόσθιας ακμής προς τα σημεία φυγής.

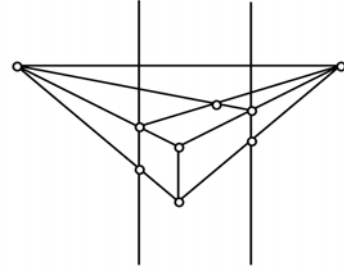
2. Κατασκευάστε τις ορατές ακμές του στερεού.

α. Κατασκευάστε δύο σημεία, ένα στην ευθεία που συνδέει το πάνω σημείο της εμπρόσθιας ακμής με το αριστερό σημείο φυγής και ένα στην αντίστοιχη ευθεία προς το δεξιό σημείο φυγής. Τα σημεία αυτά ελέγχουν το βάθος του στερεού.



### **Σχεδίαση στερεού σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους (συνέχεια)**

β. Κατασκευάστε ευθύγραμμα τμήματα από τα δύο σημεία που δημιουργήθηκαν στο τελευταίο βήμα (βήμα 2α) προς το αριστερό και προς το δεξιό σημείο φυγής. Κατασκευάστε το σημείο τομής αυτών των δύο τμημάτων.



γ. Κατασκευάστε κάθετες ευθείες που διέρχονται τα δύο σημεία που κατασκευάστηκαν στο βήμα 2α. Κατασκευάστε την τομή αυτών των ευθειών με τις ευθείες από το κάτω σημείο της εμπρόσθιας ακμής προς τα σημεία φυγής.

3. Ολοκληρώστε το σχέδιο (δείτε το σχέδιο στην αρχή αυτής της έρευνας).

α. Κατασκευάστε το εσωτερικό των πλευρών του κύβου και σκιάστε τις.

β. Αποκρύψτε τα ευθύγραμμα τμήματα που εκτείνονται προς τα σημεία φυγής και κατασκευάστε παχιά τμήματα ως ακμές του στερεού.

4. Μεταφέρετε τα σημεία που ελέγχουν το βάθος του στερεού ώστε να εμφανιστεί ως κύβος.

### **Ερωτήματα**

E1. Με ποιον τρόπο το στερεό εμφανίζεται ως κύβος;

E2. Ποιες ακμές της σχεδίασης του στερεού είναι μεταξύ τους παράλληλες;

E3. Εάν επεκταθούν οι μη παράλληλες ακμές του στερεού, πού θα τέμνονται;

E4. Τι θα συμβεί με τη μεταφορά του στερεού πάνω και κάτω μέσω της εμπρόσθιας ακμής του; Δεξιά και αριστερά;

### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Προσθέστε ευθείες στο σχέδιό σας ώστε να είναι πλήρες –ακόμη και αν σύρετε από την εμπρόσθια ακμή το στερεό πάνω από τη γραμμή του ορίζοντα.

2. Δημιουργήστε στο στερεό μια είσοδο και ένα ή δύο παράθυρα.

3. Δημιουργήστε μία σχεδίαση σε προοπτική δύο σημείων με εκτίμηση βάθους για ένα πιο πολύπλοκο αντικείμενο, π.χ., ένα κτίριο.

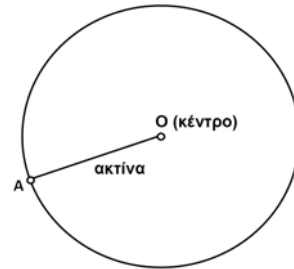
4. Τι συμβαίνει στην εικόνα του στερεού όταν η γραμμή του ορίζοντα δεν είναι οριζόντια στο σχέδιο;



## Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα

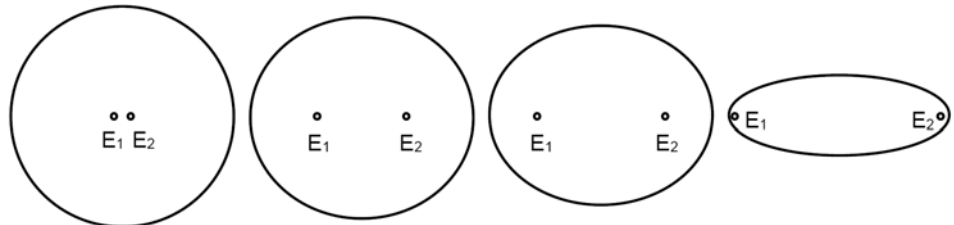
Στη δραστηριότητα αυτή θα εξερευνήσετε ίσως την πλέον κοινή μέθοδο κατασκευής μιας έλλειψης. Προκειμένου να θέσετε το πλαίσιο για την κατασκευή αυτή, πρέπει να κατανοήσετε το νόημα των όρων *κύκλος* και *έλλειψη*.

**Ορισμός:** *Κύκλος* είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε η απόσταση κάθε μέλους του συνόλου από ένα σταθερό σημείο (*κέντρο*) να είναι σταθερή.



Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο O με ένα σημείο στην περιφέρεια του κύκλου αποτελεί μια **ακτίνα** του κύκλου. Το τμήμα OA είναι μια ακτίνα του κύκλου στο σχήμα δεξιά.

Τώρα φανταστείτε ότι το κέντρο του κύκλου χωρίζεται σε δύο σημεία που απομακρύνονται μεταξύ τους. Καθώς μετακινούνται αυτά τα σημεία, το σχήμα του κύκλου παραμορφώνεται σε ελλειπτικό, ώστε να στεγάσει τα δύο «κέντρα». Τα σημεία αυτά ονομάζονται **εστιακά σημεία** ή **εστίες** ( $E_1$  και  $E_2$  είναι τα εστιακά σημεία στο παρακάτω σχήμα).



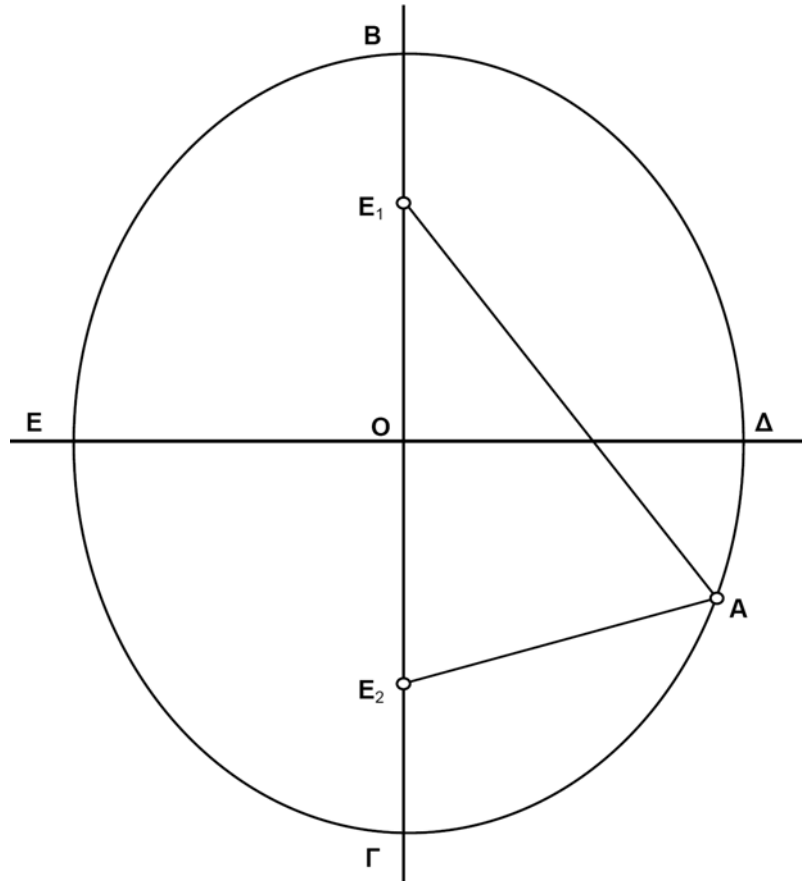
Για τον κύκλο η απόσταση μεταξύ κέντρου και οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας είναι πάντοτε η ίδια, δηλαδή *σταθερή*. Ποια είναι η αντίστοιχη συνθήκη για ένα σχήμα με δύο «κέντρα»; Για κάθε σημείο μιας έλλειψης υπάρχουν δύο αποστάσεις, μια από κάθε εστιακό σημείο. Αν το *άθροισμα* των αποστάσεων αυτών είναι σταθερό, έχουμε μια παρόμοια συνθήκη.

**Ορισμός:** *Έλλειψη* είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου από τις δύο **εστίες** να είναι σταθερό.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, αν επιλέξετε οποιοδήποτε σημείο της έλλειψης και υπολογίσετε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα δύο εστιακά σημεία, θα προκύπτει πάντοτε η ίδια αριθμητική τιμή. Ελέγξτε αυτό το αποτέλεσμα για την έλλειψη στο επόμενο σχήμα. Επιλέξτε τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές θέσεις για ένα σημείο A που κινείται πάνω στην έλλειψη και μετρήστε τις αποστάσεις κάθε θέσης από τις δύο εστίες.

**Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)**

Υπολογίστε τα αθροίσματα των δύο αποστάσεων. Πόσο πλησιάζουν αριθμητικά μεταξύ τους τα τέσσερα αθροίσματα;

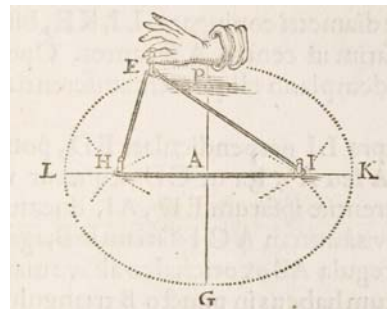


$AE_1$	$AE_2$	$AE_1 + AE_2$

## Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

### Κατασκευή ενός φυσικού μοντέλου

Τώρα που γνωρίζετε τι είναι μια έλλειψη, προχωρήστε στη σχεδιάσή της! Μια κοινή μέθοδος χρησιμοποιεί δύο πινέζες, ένα κομμάτι νήματος και ένα μολύβι. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι πινέζες στερεώνονται σε μια επίπεδη επιφάνεια και το νήμα τοποθετείται γύρω τους. Για τη χρήση της διάταξης, τεντώστε το νήμα με το μολύβι όπως στο σχήμα. Καθώς μετακινείτε το μολύβι γύρω γύρω από τις εστίες διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, η μύτη του μολυβιού χαράσσει μια έλλειψη.



Από το βιβλίο *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* του Ολλανδού μαθηματικού Frans van Schooten, 1646.

*Τι χρειάζεστε: Ένα κομμάτι κλωστής ή οδοντικού νήματος, δύο πινέζες, ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί και ένα μολύβι.*

1. Ενώστε τα άκρα του νήματος για το σχηματισμό ενός βρόχου. Επιλέξτε δύο σημεία στο χαρτί και στερεώστε το νήμα με τις δύο πινέζες. Ίσως χρειαστεί να επιμηκύνετε ή να κοντύνετε το νήμα, ώστε η έλλειψη να καλύπτει την επιφάνεια του χαρτιού αλλά να μην προεξέχει.
2. Τεντώστε το νήμα με το μολύβι.
3. Διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, μετακινήστε το μολύβι γύρω από τα εστιακά σημεία έτσι ώστε η μύτη του μολυβιού να χαράξει μια καμπύλη. Ίσως χρειαστεί να σηκώσετε τη μύτη από το χαρτί και να την επανατοποθετήσετε για τη χάραξη της πλήρους καμπύλης.

### Ερωτήματα

- E1. Δικαιολογήστε το γεγονός ότι αυτή η κατασκευή σχεδιάζει ελλείψεις. Με άλλα λόγια, εξηγήστε πώς αυτή η μέθοδος κατασκευής ικανοποιεί τον ορισμό μιας έλλειψης.
- E2. Πού βρίσκονται τα εστιακά σημεία της έλλειψης;
- E3. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της όταν τη σχεδιάσετε και πάλι με τις πινέζες σε μεγαλύτερη μεταξύ τους απόσταση. Τι συμβαίνει στην περίπτωση ελάττωσης της απόστασης αυτής;
- E4. Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις σας, τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με τα ευθύγραμμα τμήματα  $BE_1$  και  $GE_2$ ; (Δείτε το προηγούμενο μεγάλο σχήμα.)

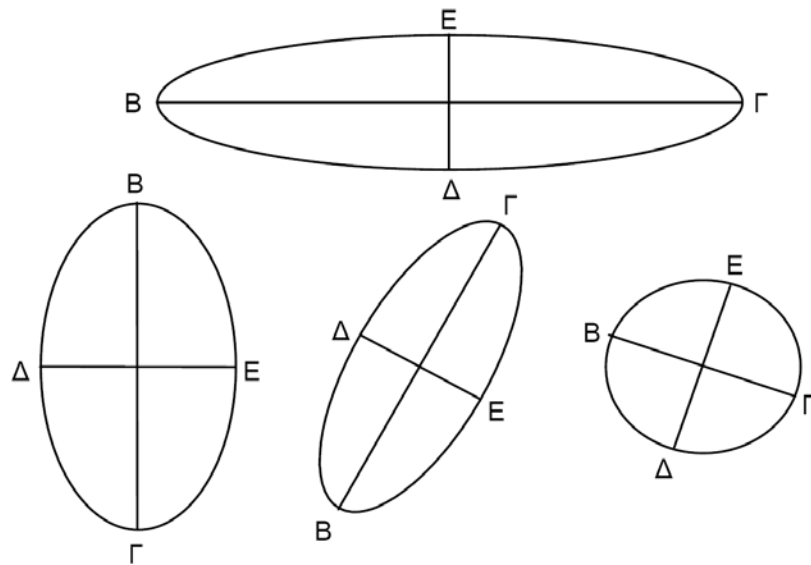
### **Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)**

- E5. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος ταυτίζονται. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.
- E6. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος απέχουν τόσο ώστε ολόκληρο το νήμα να είναι τεντωμένο και να έχει το μέγιστο μήκος του. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.

Ακολουθούν ορισμένες δραστηριότητες που θα σας βοηθήσουν να κατανοήσετε την έλλειψη που κατασκευάσατε.

### **Ερωτήματα**

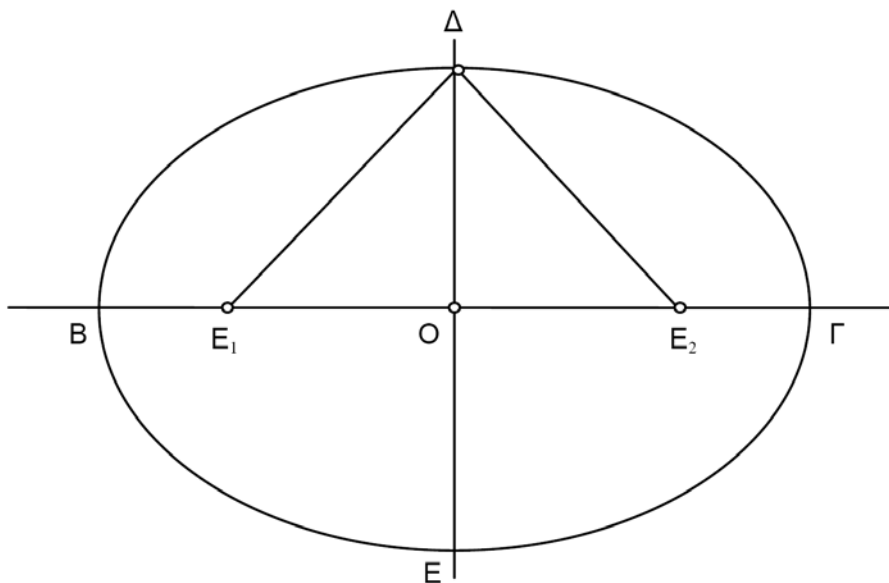
- E1. Σε κάθε έλλειψη αντιστοιχούν δύο σημαντικά ευθύγραμμα τμήματα, ο *μεγάλος άξονας* και ο *μικρός άξονας*. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα το τμήμα ΒΓ είναι ο μεγάλος άξονας και το τμήμα ΔΕ ο μικρός άξονας. Γράψτε έναν ορισμό του μεγάλου και του μικρού άξονα.



- E2. Σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδιάστε με τη βοήθεια του νήματος, των πινεζών και του μολυβιού μια άλλη έλλειψη. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα για τη σχεδίαση και μέτρηση του μεγάλου άξονά της. Χωρίς να προβείτε σε περαιτέρω μετρήσεις, πώς θα προσδιορίσετε το μήκος του νήματος;  
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μολύβι σας ώστε να τεντώσετε το νήμα. Στη συνέχεια, μετακινήστε το μολύβι γύρω από την έλλειψη ωσότου εντοπίσετε μια βολική θέση.

### Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Ε3. Στο επόμενο σχήμα το σημείο  $\Delta$  βρίσκεται στο ένα άκρο του μικρού άξονα της έλλειψης και τα σημεία  $E_1$  και  $E_2$  είναι οι εστίες της έλλειψης. Εάν το μήκος του μεγάλου άξονα  $B\Gamma$  είναι 9,5 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων  $\Delta E_1$  και  $\Delta E_2$ ; Μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!



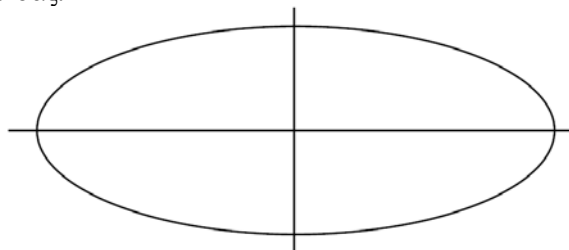
Ε4. Εάν το μήκος του μικρού άξονα  $\Delta E$  είναι 7,2 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των τμημάτων  $O E_1$  και  $O E_2$ ; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την απάντηση του ερωτήματος 3. Και πάλι μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!

Ε5. Στηριζόμενοι στις απαντήσεις στα ερωτήματα 2-4, ποια είναι η σχέση μεταξύ των τμημάτων  $O\Gamma$ ,  $O\Delta$  και  $O E_2$ ;

Ε6. Το παρακάτω σχήμα εμφανίζει μια έλλειψη και τους δύο άξονές της. Ζητείται ο εντοπισμός των δύο εστιών.

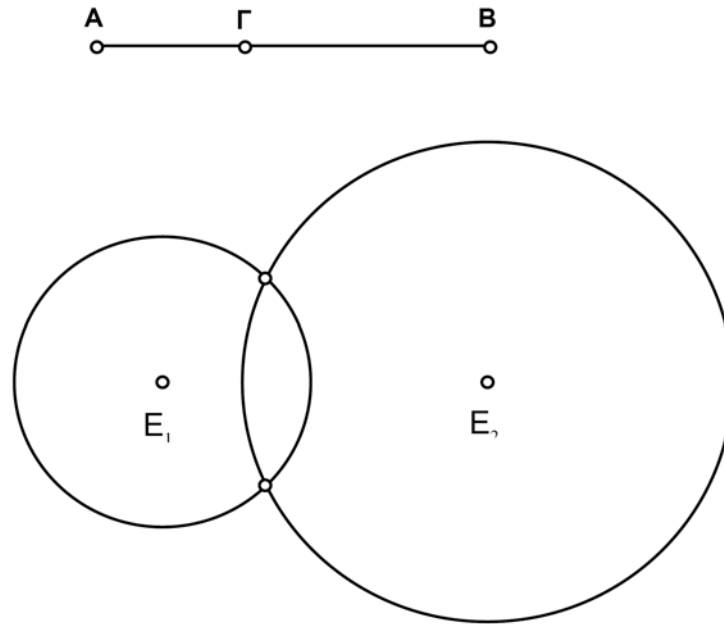
α. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα και έναν υπολογιστή για την εύρεση των εστιακών σημείων. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.

β. Βρείτε τα εστιακά σημεία με χρήση μόνο ενός διαβήτη. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.



## Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κάθε φορά που σχεδιάζετε μια νέα έλλειψη με μολύβι, νήμα και πινέζες, πρέπει να επανατοποθετείτε τις πινέζες και να χαράζετε το περίγραμμα με το μολύβι σας. Ένα μοντέλο του Sketchpad καθιστά ευκολότερη την εξερεύνηση μιας ποικιλίας ελλείψεων.



### Λεπτομέρειες κατασκευής

1. Κατασκευάστε μια ευθεία και αποκρύψτε τα σημεία ελέγχου της. Κατασκευάστε τα σημεία A, B και Γ στην ευθεία. Η θέση αυτών των σημείων είναι αυθαίρετη αλλά το σημείο Γ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B.
2. Αποκρύψτε την ευθεία και κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ.
3. Δημιουργήστε τις ετικέτες των σημείων E1 και E2 που αναπαριστούν τις εστίες της έλλειψής σας.
4. Χαράξτε έναν κύκλο με κέντρο το E1 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΑΓ. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο με κέντρο το E2 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΓΒ.
5. Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής των κύκλων. Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε το μοντέλο σας ώστε οι κύκλοι να τέμνονται. Επιλέξτε τα σημεία τομής και την εντολή Σχεδίαση Ιχνους τομών από το μενού Προβολή.
6. Σύρτε το σημείο Γ εμπρός και πίσω κατά μήκος του τμήματος ΑΒ. Το ίχνος των δύο σημείων πρέπει να αποτελεί μια έλλειψη.

## **Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)**

### **Ερωτήματα**

- E1. Εξηγήστε γιατί τα σημεία τομής των δύο κύκλων ικανοποιούν τον ορισμό μιας έλλειψης.
- E2. Πειραματιστείτε με διαφορετικές θέσεις των εστιακών σημείων και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της έλλειψης. Περιγράψτε τα ευρήματά σας.
- E3. Έστω ότι οι θέσεις των σημείων Α και Β παραμένουν σταθερές στην ευθεία. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων για την οποία είναι δυνατή η σχεδίαση μιας έλλειψης;
- E4. Μελετήστε ξανά τα βήματα της κατασκευής του μοντέλου. Όταν το σημείο Γ μετακινείται εμπρός και πίσω μεταξύ των σημείων Α και Β, η τομή των κύκλων διαγράφει μια έλλειψη. Ποιο είναι το μήκος του μεγάλου άξονα αυτής της έλλειψης;

Οι ελλείψεις που σχεδιάσατε σε αυτή τη δραστηριότητα είναι διαφορετικές. Ορισμένες είναι «λεπτές» και επιμήκεις, άλλες είναι «παχιές» και σχεδόν κυκλικές. Η **εκκεντρότητα** μιας έλλειψης είναι μια αριθμητική τιμή που καθορίζει το πάχος μιας έλλειψης.

*Ορισμός: Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης ορίζεται ως ο λόγος  $a/b$ , όπου*

*$a$ : η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων και  
 $b$ : η απόσταση μεταξύ των άκρων του μεγάλου άξονα*

- E5. Χρησιμοποιήστε τις εντολές του Sketchpad (Μέτρηση) Απόστασης και Υπολογισμός για τον προσδιορισμό της εκκεντρότητας της έλλειψής σας.

Θα χρειαστείτε τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ των εστιακών σημείων καθώς και του μήκους του μεγάλου άξονα. (Ποια σημεία έχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα;) Επιλέξτε τις δύο αποστάσεις και χρησιμοποιήστε την εντολή Υπολογισμός από το μενού Μέτρηση για τον υπολογισμό του λόγου τους.

- E6. Χρησιμοποιήστε το μοντέλο του Sketchpad για τη σχεδίαση διαφορετικών ελλείψεων. Παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η τιμή της εκκεντρότητάς τους. Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της εκκεντρότητας που είναι δυνατές για τις ελλείψεις που μπορούν να κατασκευαστούν στο σχέδιό σας;
- E7. Μπορούν δύο διαφορετικές ελλείψεις να έχουν την ίδια εκκεντρότητα; Αν ναι, σχεδιάστε με το χέρι δύο ελλείψεις με την ιδιότητα αυτή. Διαφορετικά, εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι δυνατόν.

## Μέσα χορδών

### Έρευνα 1: Μέσα παράλληλων χορδών

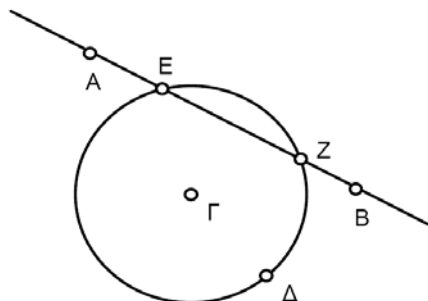
Σχεδιάστε με το Sketchpad το ίχνος των μέσων των χορδών κατά την παράλληλη μεταφορά μιας ευθείας. Για το σκοπό αυτό, πρέπει πρώτα να κατασκευάσετε τα μέσα. Κατόπιν χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες σχετικά με αυτόν το γεωμετρικό τόπο των μέσων ώστε να κατανοήσετε τις, παράλληλες προς μια ευθεία, εφαπτομένες, να απαντήσετε σε ερωτήματα και να δημιουργήσετε κατασκευές.

#### Κατασκευή Α

Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής με επιλογή του κύκλου και της ευθείας. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Τομών** από το μενού **Κατασκευή**.

Συνεχίστε με τη βοήθεια του Sketchpad το σχέδιο της ευθείας AB και του κύκλου ακτίνας ΓΔ.

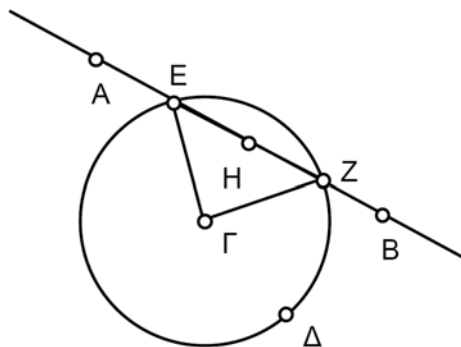
1. Μετακινήστε την ευθεία έτσι ώστε να τμήσει τον κύκλο σε δύο σημεία. Κατόπιν κατασκευάστε τα σημεία τομής E και Z μεταξύ ευθείας και κύκλου.



Ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου καλείται **χορδή**. Στο σχήμα αυτό το τμήμα EZ είναι η χορδή του κύκλου στην τέμνουσα AB.

Εφόσον το τμήμα βρίσκεται πάνω στην ευθεία, η επιλογή του ίσως είναι κάπως δύσκολη. Ενδέχεται, εκ παραδρομής, να επιλέξετε με το πρώτο κλικ την ευθεία. Αν ναι, κάντε εκ νέου κλικ ώστε να επιλεγεί το τμήμα.

2. Κατασκευάστε το τμήμα EZ και το μέσο του H.
3. Σχεδιάστε το ίχνος του σημείου H με επιλογή του σημείου και της εντολής Σχεδίαση ίχνους μέσου σημείου από το μενού Προβολή. (Για ένα έγχρωμο ίχνος, επιλέξτε το σημείο και ένα χρώμα από το μενού Προβολή.)
4. Προσθέστε στο σχήμα τα τμήματα ΓΕ και ΓΖ.





## Μέσα χορδών (συνέχεια)

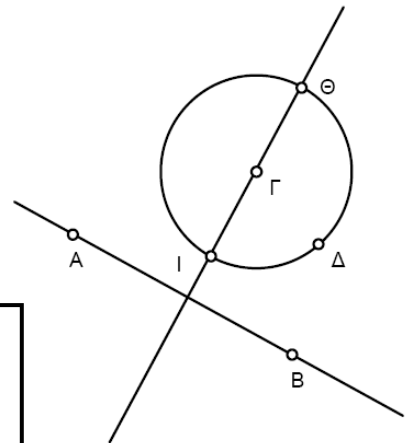
### Πειραματισμός

- ☞ Εκτελέστε παράλληλη μεταφορά της ευθείας.
- ☞ Μελετήστε το σχήμα ώστε να διαπιστώσετε τις σχέσεις μεταξύ των μερών του. Ειδικότερα, προβληματιστείτε σχετικά με τα ακόλουθα ερωτήματα:
  1. Ποιο είδος γεωμετρικού αντικειμένου προκύπτει από τη σχεδίαση του ίχνους του σημείου H; Πώς σχετίζεται αυτό το ίχνος με την ευθεία AB;
  2. Πόση είναι η γωνία ΓHZ; Τι είδους τρίγωνο είναι το ΓHZ;
  3. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΕΓZ; Πώς εξηγείται αυτό;

### Κατασκευή Β

Για την κατασκευή της κάθετης ευθείας, επιλέξτε το σημείο Γ και την ευθεία AB. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

Κατασκευάστε την ευθεία ε που διέρχεται το σημείο Γ και είναι κάθετη στην ευθεία AB. Κατασκευάστε τα σημεία Θ και Ι μέσω της τομής του κύκλου από την ευθεία ε. Αυτή η κάθετη ευθεία αποτελεί μια διάμετρο εφόσον από κατασκευής διέρχεται από το σημείο Γ.

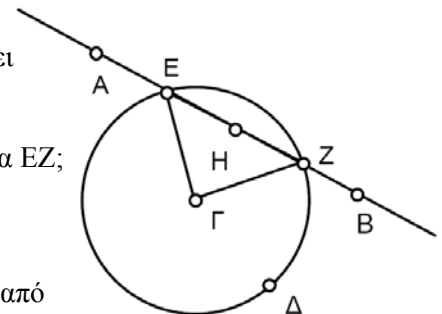


*Μια ευθεία είναι **διάμετρος** (ευθεία) ενός κύκλου αν διέρχεται το κέντρο του κύκλου. Μια χορδή είναι **διάμετρος** (χορδή) ενός κύκλου αν διέρχεται το κέντρο του κύκλου.*

Άρα διάμετρος μπορεί να είναι μια ευθεία ή μια χορδή.

### Ερωτήματα

- E1. Τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο προκύπτει από τη σχεδίαση ίχνους του σημείου H;
- E2. Πώς σχετίζεται το ίχνος του H με την ευθεία EZ;
- E3. Ποιο το μέγεθος της γωνίας ΓHZ;
- E4. Τι είδους ευθεία είναι η AB όταν διέρχεται από τα σημεία Θ ή Ι;



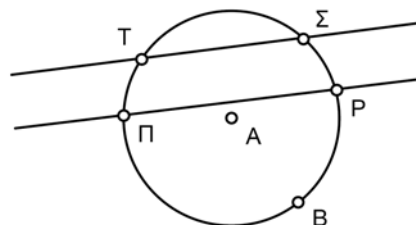
### Μέσα χορδών (συνέχεια)

- E5. Εξηγήστε γιατί το μέσο της χορδής EZ βρίσκεται στη διάμετρο που είναι κάθετος στην ευθεία AB. Υπόδειξη: Πώς συνδέεται η ευθεία ΘΙ με το τρίγωνο ΕΓΖ;
- E6. Σχεδιάστε μια ευθεία και έναν κύκλο. Πόσες ευθείες παράλληλες στη δοθείσα εφάπτονται στον κύκλο; Πώς μπορείτε να βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται στον κύκλο αυτές οι ευθείες;

### Προβλήματα - Τετράπλευρα

Κατασκευάστε έναν κύκλο και δύο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Π, Ρ, Σ και Τ όπως στο σχήμα.

1. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των αποστάσεων ΠΤ και ΡΣ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Κατασκευάστε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

2. Τι σχήμα έχει το τετράπλευρο ΠΡΣΤ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Έστω ότι οι ευθείες μεταφέρονται έτσι ώστε το ΠΡΣΤ να γίνει παραλληλόγραμμο. Τι μπορείτε να αναφέρετε περαιτέρω σχετικά με το σχήμα του ΠΡΣΤ στην περίπτωση αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

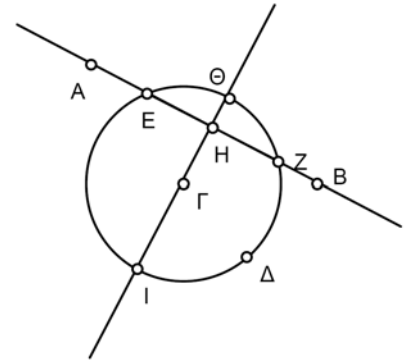
### Έρευνα 2: Σχεδίαση ίχνους του μέσου χορδής με μεταφορά μέσω σταθερού σημείου

Η προηγούμενη έρευνα επικεντρωνόταν στο ίχνος του μέσου μιας χορδής καθώς αυτή μεταφερόταν παράλληλα προς τον εαυτό της. Στην παρούσα έρευνα θα εξετάσετε το ίχνος του μέσου μιας χορδής καθώς η ευθεία, στην οποία ανήκει η χορδή, μεταφέρεται μέσω ενός σταθερού σημείου. Στη συνέχεια, θα έχετε τα απαραίτητα εργαλεία για την κατασκευή εφαπτομένων σε έναν κύκλο και διερχομένων από δοθέν σημείο.

## Μέσα χορδών (συνέχεια)

### Πειραματισμός

Χρησιμοποιήστε την κατασκευή από την Έρευνα 1 όπως φαίνεται στο σχήμα δεξιά. (Σημειώστε ότι οι ακτίνες ΓΕ και ΓΖ είναι κρυμμένες.)



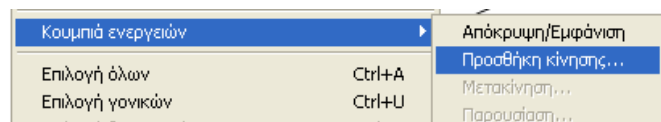
☞ Σχεδιάστε το ίχνος του σημείου H καθώς μεταφέρετε το σημείο B. Έτσι εξασφαλίζετε ότι η ευθεία AB διέρχεται από το σταθερό σημείο A.

☞ Μελετήστε διεξοδικά το ίχνος. Τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο διαγράφεται από το μέσο;

### Προσθήκη κίνησης

Αυτή είναι μια τεχνική που θα αποδειχτεί χρήσιμη σε πολλές έρευνες αυτού του βιβλίου.

Επειδή το ίχνος του σημείου H ίσως εξαρτάται από τη θέση του σημείου A, βοηθά να χρησιμοποιήσετε ένα κουμπί Προσθήκης κίνησης για την επίτευξη της μεταφοράς. Να πώς γίνεται αυτό.



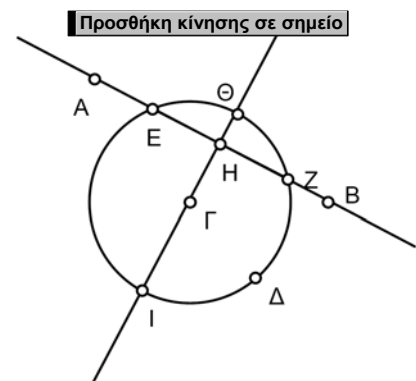
Ένας άλλος τρόπος παρατήρησης του ίχνους του H είναι η κατασκευή του γεωμετρικού τόπου αυτού του σημείου. Επιλέξτε το σημείο H, το σημείο B και τον κύκλο. Επιλέξτε την εντολή **Γεωμετρικού τόπου** από το μενού **Κατασκευή**.

1. Επιλέξτε το σημείο B και την περιφέρεια του κύκλου. Από το μενού Επεξεργασία επιλέξτε Κουμπί ενεργειών. Επιλέξτε Προσθήκη κίνησης από το αναδυόμενο υπομενού.

Εμφανίζεται ένα πλαίσιο διαλόγου.

2. Επιλέξτε 'Μία φορά μόνο' και κάντε κλικ στο ΟΚ. Κάντε κλικ στο κουμπί. Θα πρέπει να δείτε το σημείο B να μεταβαίνει στο σημείο Z του κύκλου και κατόπιν να μετακινείται γύρω από τον κύκλο. Επίσης, θα πρέπει να δείτε το ίχνος του σημείου H.

3. Χρησιμοποιήστε το κουμπί Προσθήκη κίνησης για να πειραματιστείτε με το ίχνος του σημείου H για διαφορετικές θέσεις του σημείου A.



## **Μέσα χορδών (συνέχεια)**

### **Ερωτήματα**

Τα παρακάτω ερωτήματα σας ζητούν να διατυπώσετε μια εικασία σχετικά με το ίχνος του σημείου  $H$  για καθεμιά από τρεις διαφορετικές θέσεις του σημείου  $A$ . Προσπαθήστε να είστε όσο το δυνατόν πιο ακριβείς σχετικά με το όνομα του αντικείμενου, το μέγεθος και τη θέση του.

- E1. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο  $A$  βρίσκεται εκτός του κύκλου;
- E2. Τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με την ευθεία  $AB$  όταν το σημείο  $B$  ταυτίζεται με το σημείο  $\Theta$  ή το σημείο  $Z$ ;
- E3. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο  $A$  βρίσκεται πάνω στον κύκλο;
- E4. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο  $A$  βρίσκεται εντός του κύκλου;

### **Προβλήματα κατασκευών**

*Ένα αντικείμενο για το ίχνος του σημείου  $H$ .* Στην Έρευνα 1 αποδείχτηκε ότι η ευθεία  $\Theta I$ , που είναι η μεσοκάθετος της χορδής, περιέχει το ίχνος του μέσου  $H$  της χορδής καθώς αυτή μετακινούταν παράλληλα προς τον εαυτό της. Θεωρήστε τις εξής τρεις δυνατότητες για το σημείο  $A$ : εκτός του κύκλου, πάνω στον κύκλο και εντός του κύκλου. Κατασκευάστε για κάθε περίπτωση ένα αντικείμενο, στο οποίο βρίσκεται το ίχνος του σημείου  $H$ , καθώς μεταφέρεται το σημείο  $B$ .

*Εφαπτομένες.* Μετακινήστε το σημείο  $A$  εκτός του κύκλου. Χρησιμοποιήστε το αντικείμενο που κατασκευάσατε προηγουμένως για την κατασκευή ευθειών εφαπτομένων στον κύκλο και διερχομένων από το σημείο  $A$ .

### **Ερώτημα**

Ποια είναι η καλύτερη δυνατή εξήγηση που μπορείτε να δώσετε για το σχήμα που διαγράφει το ίχνος του μέσου  $H$  όταν όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο  $A$ ; (Οι επόμενες έρευνες θα δώσουν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το ερώτημα αυτό.)

## Γραφήματα οικογένειας παραβολών

Η βολή ενός αντικειμένου στον αέρα έχει ως αποτέλεσμα μια καμπυλωμένη τροχιά, η οποία είναι πάντοτε μια **παραβολή**. Η παραβολή είναι το γράφημα μιας **δευτεροβάθμιας συνάρτησης**, δηλαδή οποιασδήποτε πολυωνυμικής συνάρτησης μιας μεταβλητής, που περιέχει ένα δευτεροβάθμιο όρο, ενώ κανένας άλλος όρος δεν είναι υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη του 2.

Στη δραστηριότητα αυτή θα κατασκευάσετε γραφήματα δευτεροβάθμιων συναρτήσεων της μορφής  $y = a(x - b)^2 + c$ .

### Σχέδιο

- Βήμα 1: Ανοίξτε ένα νέο σχέδιο και επιλέξτε Ορισμός συστήματος συντεταγμένων από το μενού Γράφημα.
- Βήμα 2: Κατασκευάστε το σημείο Γ στον άξονα x και μετρήστε την τετμημένη του.
- Βήμα 3: Η συντεταγμένη x του σημείου Γ θα είναι η μεταβλητή x. Σύρτε το σημείο Γ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής του  $x_{\Gamma}$ .
- Βήμα 4: Θα αποτυπώσετε ένα σημείο της συνάρτησης  $y = a(x - b)^2 + c$  με απώτερο σκοπό την αποτύπωση ολόκληρης της συνάρτησης. Το σημείο αυτό θα έχει τις συντεταγμένες  $(x_{\Gamma}, a(x_{\Gamma} - b)^2 + c)$ , καθώς  $y = a(x - b)^2 + c$ . Έχετε ήδη βρει μια έκφραση για το  $x_{\Gamma}$  αλλά χρειάζεστε ακόμη τιμές για τα a, b και c. Κατασκευάστε τρία σημεία στον άξονα y. Δημιουργήστε τις ετικέτες a, b και c, αντίστοιχα, για τα σημεία.
- Βήμα 5: Βρείτε τις τεταγμένες κάθε σημείου. Αυτές οι συντεταγμένες y είναι οι τιμές των a, b και c.
- Βήμα 6: Το σχέδιό σας πρέπει να εμφανίζει τώρα μετρήσεις των  $y_a$ ,  $y_b$  και  $y_c$ . Ο τύπος της παραβολής θα γίνει πολύ πιο σαφής αν αντικαταστήσετε τα a, b και c με αυτές τις τιμές. Με το εργαλείο κειμένου (όχι το εργαλείο βέλους επιλογής) κάντε διπλό κλικ στο  $y_a$  και αλλάξτε στην ετικέτα της μέτρησης το  $y[a]$  σε a. Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία για την αλλαγή του  $y_b$  σε b και του  $y_c$  σε c.
- Βήμα 7: Εφόσον έχετε μια μεταβλητή, το  $x_{\Gamma}$ , και ένα σύνολο από σταθερές, τα a, b και c, μπορείτε τώρα να υπολογίσετε μια τιμή του y για τη δευτεροβάθμια συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε αυτές τις τιμές στην οθόνη σας και στον Υπολογιστή για τη δημιουργία της έκφρασης  $y = a(x_{\Gamma} - b)^2 + c$ . Σύρτε το σημείο Γ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής της τιμής y της συνάρτησης όταν αλλάζει η μεταβλητή  $x_{\Gamma}$ .

### **Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)**

- Βήμα 8: Για την αποτύπωση ενός διατεταγμένου ζεύγους της δευτεροβάθμιας συνάρτησης, επιλέξτε κατά σειρά τα  $x_\Gamma$  και  $a(x_\Gamma - b)^2 + c$ , καθώς και την εντολή Αποτύπωση με  $(x, y)$  από το μενού Γράφημα. Σύρτε το σημείο  $\Gamma$  για να αλλάξει το  $x_\Gamma$  και παρατηρήστε διαφορετικά σημεία της δευτεροβάθμιας συνάρτησης. Μπορείτε να δείτε το σχήμα της παραβολής;
- Βήμα 9: Ολόκληρη η δευτεροβάθμια συνάρτηση είναι το σύνολο των δυνατών θέσεων του αποτυπωμένου σημείου  $(x_\Gamma, a(x_\Gamma - b)^2 + c)$  για διάφορες τιμές του  $x_\Gamma$ . Για τη δημιουργία αυτού του γραφήματος, επιλέξτε το σημείο  $\Gamma$  και το αποτυπωμένο σημείο, κατόπιν επιλέξτε Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί μια συνεχής καμπύλη ενός μέρους της παραβολής.

#### **Έρευνα**

1. Αλλάξτε τις θέσεις των τριών σημείων στον άξονα  $y$ . Περιγράψτε τον τρόπο επίδρασης της τιμής των  $a$ ,  $b$  και  $c$  στο σχήμα της παραβολής. Μην παραλείψετε να εξετάσετε και αρνητικές τιμές.

---

---

---

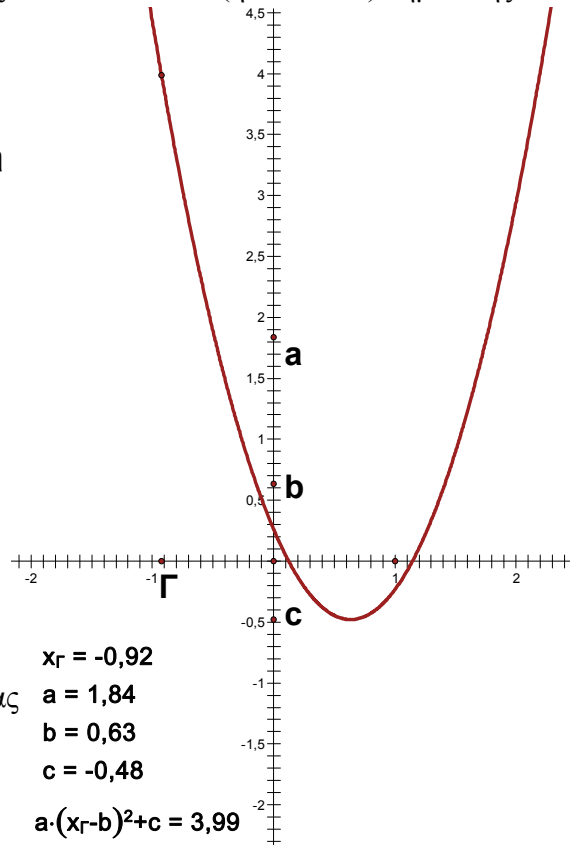
---

---

---

## Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

2. Η **κορυφή** μιας παραβολής είναι το ανώτατο (ή κατώτατο) σημείο της παραβολής. Κάντε κλικ με το εργαλείο σημείων για την τοποθέτηση ενός σημείου στην κορυφή της παραβολής και τη μέτρηση των συντεταγμένων του. (Βοηθά αν οι μετρήσεις σας έχουν ακρίβεια χιλιοστού.) Εξηγήστε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις τιμές των  $b$ ,  $c$  σε μια δευτεροβάθμια συνάρτηση για τον προσδιορισμό της κορυφής του γραφήματος.



### **Παρουσιάστε τις ιδέες σας μέσω δικτύου**

Συζητήστε τα ευρήματά σας με το συνεργάτη σας ή με την ομάδα σας. Για την παρουσίασή τους, μπορείτε να εκτυπώσετε ή να αποθηκεύσετε σχολιασμένα σχέδια ή να παρουσιάσετε τις ιδέες σας μέσω ενός δικτύου. Στο σχέδιό σας συγκρίνετε διαφορετικές παραβολές και δείξτε πώς επηρεάζεται το σχήμα τους από τις τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $c$ . Επίσης, εξηγήστε πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες των κορυφών τους με τις τιμές των  $b$ ,  $c$ . Ίσως θέλετε να προσθέσετε κίνηση στην παραβολή σας, ώστε να αλλάξετε το σχήμα της σύμφωνα με τη θέση ενός ή περισσότερων από τα σημεία  $a$ ,  $b$  και  $c$ .

### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Έστω ότι ρίχνετε μια μπάλα που φθάνει σε ύψος 10 μέτρων και τελικά προσγειώνεται σε απόσταση 5 μέτρων από σας. Σύρτε τα σημεία  $a$ ,  $b$  και  $c$  στο σχέδιό σας για την εύρεση μιας παραβολής που περιγράφει τη διαδρομή της μπάλας.

Υπόδειξη: Σύρτε το σημείο  $(1, 0)$  για να αλλάξει η κλίμακα, ώστε να μπορείτε να αναπαραστήσετε τα 10 μέτρα στον άξονα  $y$ . Επίσης, ίσως είναι σκόπιμο να αποτυπώσετε λίγα σημεία.

Σημειώστε την εξίσωση της παραβολής σας.

### **Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)**

2. α. Σε μια ελεύθερη βολή ένας παίκτης του μπάσκετ ύψους 2 μέτρων ρίχνει την μπάλα από απόσταση 5 μέτρων σε ένα καλάθι σε ύψος 3,3 μέτρων. Σύρτε τα σημεία a, b και c στο σχέδιό σας για την εύρεση μιας παραβολής που περιγράφει τη διαδρομή της μπάλας. Υποθέστε ότι κατά τη βολή τα χέρια του παίκτη βρίσκονται στο ίδιο ύψος με το κεφάλι του. Σημειώστε την εξίσωση της παραβολής σας.  
  
β. Πόσες διαφορετικές παραβολές μοντελοποιούν την κατάσταση στο ζήτημα α; Πόσες διαφορετικές ελεύθερες βολές είναι δυνατές;
3. Ίσως γνωρίζετε ήδη ότι δύο σημεία ορίζουν πάντοτε μία και μόνο ευθεία. Ορίζουν πάντοτε τρία σημεία ακριβώς μια παραβολή;
4. Δημιουργήστε με το Sketchpad το γράφημα μιας άλλης ενδιαφέρουσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία με αυτή για το γράφημα της παραβολής.



## Διάμεσοι ενός τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

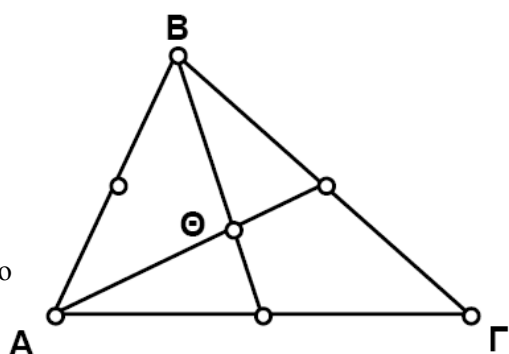
Η διάμεσος σε ένα τρίγωνο συνδέει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. Σε προηγούμενες έρευνες ενδεχομένως να ανακαλύψατε ιδιότητες των διχοτόμων, των μεσοκαθέτων και των υψών ενός τριγώνου. Μπορείτε να διατυπώσετε κάποια υπόθεση σχετικά με τις διαμέσους; Ορισμένες ιδιότητες ίσως μπορούν να προβλεφθούν, αλλά υπάρχουν και στις διαμέσους καινούρια στοιχεία.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.

2. Κατασκευάστε τα σημεία στο μέσο των τριών πλευρών.

3. Κατασκευάστε δύο από τις τρεις διαμέσους, η καθεμιά από τις οποίες συνδέει μια κορυφή με το σημείο στο μέσο της απέναντι πλευράς.



Εάν έχετε ήδη κατασκευάσει τρεις διαμέσους, επιλέξτε δύο από αυτές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Τομή**.

4. Κατασκευάστε το σημείο τομής των δύο διαμέσων.

5. Κατασκευάστε την τρίτη διάμεσο.

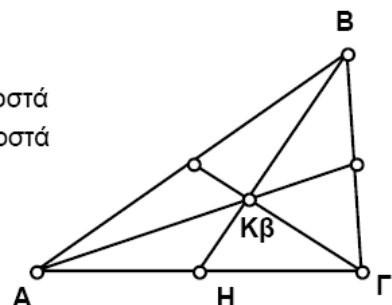
Ε1. Τι παρατηρείτε σχετικά με την τρίτη διάμεσο; Μεταφέρετε μια κορυφή του τριγώνου προκειμένου να επαληθεύσετε ότι η εικασία αυτή ισχύει για κάθε τρίγωνο.



Χρησιμοποιήστε το εργαλείο κειμένου και κάντε κλικ μια φορά στο σημείο ώστε να εμφανιστεί την ετικέτα του. Κάντε διπλό κλικ στην ετικέτα προκειμένου να την αλλάξετε.

6. Το σημείο τομής των διαμέσων ονομάζεται **κέντρο βάρους** του τριγώνου. Εμφανίστε την ετικέτα του και αλλάξτε την σε Κβ (αρχικά των λέξεων Κέντρο βάρους).

ΒΚβ = 2,1 εκατοστά  
ΚβΗ = 1,1 εκατοστά



Προτού μετρήσετε μια απόσταση μεταξύ δύο σημείων, επιλέξτε τα σημεία αυτά.

7. Μετρήστε την απόσταση από το Β έως το Κβ, καθώς και την απόσταση από το Κβ έως το σημείο Η στο μέσο του ΑΓ.

Απόσταση (Β έως Κβ)	2,08	1,50	1,20	2,13
Απόσταση (Κβ έως Η)	1,04	0,75	0,60	1,07

### Διάμεσοι ενός τριγώνου (συνέχεια)

8. Μεταφέρετε τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και αναζητήστε μια σχέση μεταξύ της ΒΚβ και της ΚβΗ.

Επιλέξτε τις δύο μετρήσεις. Κατόπιν επιλέξτε **Πινακοποίηση** από το μενού **Μέτρηση**.

9. Κατασκευάστε έναν πίνακα με αυτές τις δύο μετρήσεις.

10. Μεταβάλετε το τρίγωνο και κάντε διπλό κλικ στον πίνακα τιμών για την προσθήκη νέας εγγραφής.

11. Συνεχίστε να μεταβάλλετε το τρίγωνο και να προσθέτετε νέες εγγραφές στον πίνακα, ωσότου είστε σε θέση να διακρίνετε μια σχέση μεταξύ των αποστάσεων ΒΚβ και ΚβΖ.

Για την εισαγωγή μιας μέτρησης σε έναν υπολογισμό, κάντε κλικ μια φορά σ' αυτή.

12. Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις σας σχετικά με τις τιμές του πίνακα, χρησιμοποιήστε τον Υπολογιστή προκειμένου να δώσετε μια έκφραση με τις μετρήσεις, που θα παραμένει σταθερή ακόμη και όταν μεταβάλλονται οι μετρήσεις.

E2. Γράψτε την έκφραση που υπολογίσατε στο βήμα 12.



E3. Γράψτε μια εικασία σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο το κέντρο βάρους χωρίζει σε τμήματα καθεμιά από τις διαμέσους ενός τριγώνου.



Επιλέξτε τον πίνακα. Κατόπιν στο μενού **Γράφημα** επιλέξτε **Αποτύπωση δεδομένων πίνακα**. Στο πλαίσιο διαλόγου Αποτύπωση σημείων από τον πίνακα κάντε κλικ στην **Αποτύπωση** (εφόσον δεν επιθυμείτε να προβείτε σε αλλαγή οποιουδήποτε από τα δεδομένα).

13. Προχωρήστε σε αποτύπωση των δεδομένων του πίνακα. Θα πρέπει να λάβετε ένα γράφημα με αρκετά συγγραμμικά σημεία.

14. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από οποιαδήποτε δύο εκ των σημείων των δεδομένων και μετρήστε την κλίση της.

E4. Εξηγήστε τη σημασία της κλίσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία των δεδομένων.



### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο που κατασκευάζει το κέντρο βάρους ενός τριγώνου. Αποθηκεύστε το εργαλείο αυτό για μελλοντικές έρευνες σχετικά με το κέντρο βάρους ενός τριγώνου.

## Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ιδιότητες των μεσοκαθέτων ενός τριγώνου. Επίσης, θα μάθετε πώς να κατασκευάζετε έναν κύκλο που διέρχεται από κάθε κορυφή ενός τριγώνου.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.

2. Κατασκευάστε τα σημεία στο μέσο των πλευρών.

Επιλέξτε μια πλευρά και το σημείο στο μέσο της. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Κάθετης ευθείας**.

3. Κατασκευάστε δύο από τις τρεις μεσοκαθέτους του τριγώνου.

Κάντε κλικ στο σημείο τομής με το εργαλείο βέλους επιλογής ή με το εργαλείο σημείων. Εάν έχετε ήδη κατασκευάσει και τις τρεις μεσοκαθέτους, επιλέξτε δύο από αυτές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Τομής**.

4. Κατασκευάστε το σημείο Η, δηλαδή το σημείο τομής των μεσοκαθέτων.

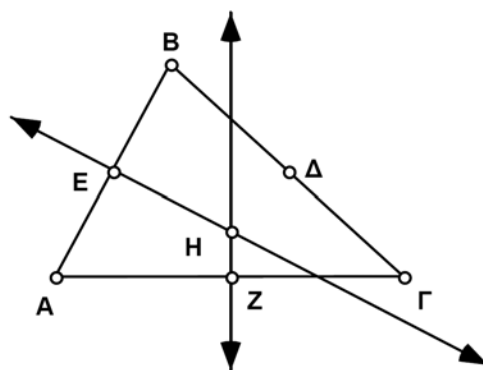
5. Κατασκευάστε την τρίτη μεσοκάθετο.

E1. Τι παρατηρείτε σχετικά με την τρίτη μεσοκάθετο (που δεν εμφανίζεται στο σχήμα); Μεταφέρετε μια κορυφή του τριγώνου προκειμένου να επαληθεύσετε ότι η εικασία αυτή ισχύει για κάθε τρίγωνο.

6. Μεταφέρετε μια κορυφή έτσι ώστε το σημείο Η να εισέρχεται και να εξέρχεται του τριγώνου. Κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης, παρατηρήστε τις γωνίες του τριγώνου.

E2. Σε ποιο είδος τριγώνου το σημείο Η βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου και σε ποιο είδος στο εσωτερικό του;

E3. Μεταφέρετε μια κορυφή ούτως ώστε το σημείο Η βρεθεί πάνω σε μια πλευρά του τριγώνου. Τι είδους τρίγωνο είναι αυτό; Πού ακριβώς βρίσκεται το σημείο Η;



## Μεσοκάθετοι ενός τριγώνου (συνέχεια)

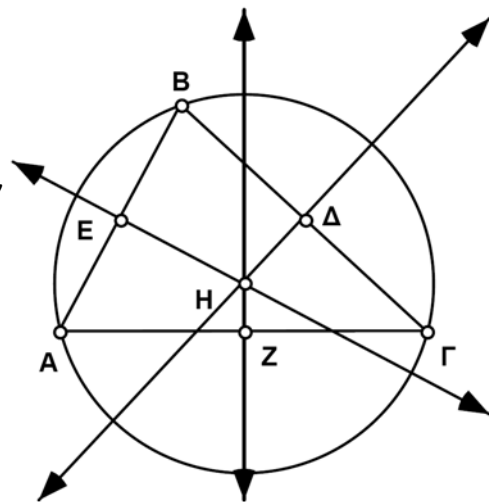
Επιλέξτε το σημείο H και μια κορυφή. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Απόσταση**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τις υπόλοιπες δύο κορυφές.

7. Μετρήστε την απόσταση κάθε κορυφής από το σημείο H.
8. Μεταφέρετε μια κορυφή του τριγώνου και παρατηρήστε τις αποστάσεις.

E4. Το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων ονομάζεται **περίκεντρο** του τριγώνου. Τι παρατηρείτε σχετικά με την απόσταση κάθε κορυφής του τριγώνου από το περίκεντρο;

Βεβαιωθείτε ότι αρχίζετε τον κύκλο σας στο σημείο H και τον ολοκληρώνετε με τον δρομέα σας ακριβώς πάνω στο σημείο A. Διαφορετικά, ενδέχεται ο κύκλος να μην παραμείνει περιγεγραμμένος όταν προβείτε σε κάποια μεταφορά. (Στην περίπτωση αυτή, αναιρέστε τα προηγούμενα και επαναλάβετε τη διαδικασία.)

9. Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο H και ακτίνα την HA. Αυτός είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABΓ.



### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Δημιουργήστε και αποθηκεύστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή του περίκεντρου ενός τριγώνου (με ή χωρίς τον περιγεγραμμένο κύκλο). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτό το εργαλείο σε άλλες έρευνες κατά την ανακάλυψη ιδιοτήτων άλλων ειδικών σημείων ενός τριγώνου.
2. Εξηγήστε γιατί το περίκεντρο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.  
Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σημείο στη μεσοκάθετο ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος. Γιατί το περίκεντρο ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου;
3. Προσπαθήστε να περιγράψετε έναν κύκλο γύρω από άλλα, πέραν του τριγώνου, σχήματα. Γράψτε τις προσπάθειές σας συμπεριλαμβάνοντας οποιαδήποτε πρόσθετη εικόνα θεωρήσετε αναγκαία.

## Ύψη ενός τριγώνου

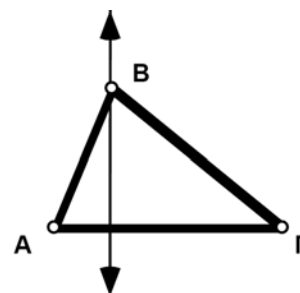
Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ορισμένες ιδιότητες των υψών ενός τριγώνου. Ένα **ύψος** είναι ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μια κορυφή ενός τριγώνου προς την απέναντι πλευρά (ή προς μια ευθεία που περιέχει την πλευρά). Η πλευρά στην οποία καταλήγει ένα ύψος ονομάζεται **βάση** του ύψους αυτού. Καθώς ένα τρίγωνο έχει τρεις πλευρές, διαθέτει και τρία ύψη. Εδώ θα κατασκευάσετε ένα ύψος και θα δημιουργήσετε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσετε αυτό το εργαλείο για την κατασκευή των άλλων δύο υψών.

### Σχέδιο και έρευνα

Επιλέξτε το σημείο B και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Κάθετης ευθείας**.

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ.
2. Κατασκευάστε μια ευθεία κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και διερχόμενη από το σημείο Β.

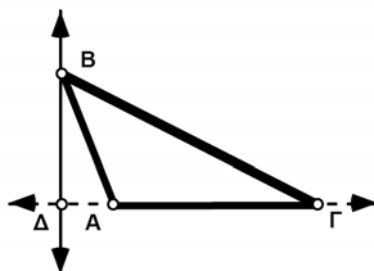


- Ε1. Εάν το τρίγωνό σας είναι οξυγώνιο, αυτή η κάθετη ευθεία θα τέμνει μια πλευρά του τριγώνου. Μεταφέρετε το σημείο B έτσι ώστε η ευθεία να βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου. Τι είδους τρίγωνο είναι αυτό;

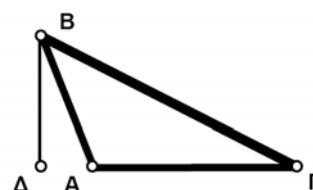


Διατηρώντας το πλήκτρο του ποντικιού πατημένο στο εργαλείο ευθύγραμμων τμημάτων, σύρτε το δείκτη προς τα δεξιά ώστε να επιλέξετε το εργαλείο ευθειών. Κατασκευάστε την ευθεία σας ώστε να διέρχεται τα άκρα της πλευράς του τριγώνου.

3. Με την κάθετη ευθεία στο εξωτερικό του τριγώνου, χρησιμοποιήστε μια ευθεία προκειμένου να προεκτείνετε την πλευρά ΑΓ έτσι ώστε να τέμνει την κάθετη.
4. Κατασκευάστε το σημείο Δ, δηλαδή το σημείο τομής της προεκτεταμένης πλευράς και της κάθετης ευθείας.
5. Αποκρύψτε τις ευθείες.
6. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, το οποίο είναι ένα από τα ύψη του τριγώνου.



Βήματα 3 και 4



Βήματα 5 και 6

### Ύψη ενός τριγώνου (συνέχεια)

7. Σύρτε τις κορυφές του τριγώνου και παρατηρήστε πώς συμπεριφέρονται τα ύψη του.

E2. Πού βρίσκεται το ύψος που κατασκευάσατε όταν η γωνία A είναι ορθή;



8. Μεταφέρετε το τρίγωνο έτσι ώστε να καταστεί εκ νέου οξυγώνιο (με το ύψος να βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου).

Επιλέξτε τα πάντα  
στο σχέδιό σας.  
Κατόπιν στα  
Προσαρμοσμένα  
εργαλεία της  
Εργαλειοθήκης  
επιλέξτε  
**Δημιουργία  
νέου εργαλείου...**

9. Δημιουργήστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή.

Το Προσαρμοσμένο  
εργαλείο που  
δημιουργήσατε, θα  
κατασκευάσει ένα  
τρίγωνο και ένα  
ύψος από μία εκ  
των κορυφών.  
Προκειμένου να το  
χρησιμοποιήσετε,  
επιλέξτε το από τα  
**Προσαρμοσμένα  
εργαλεία** και κάντε  
κλικ στις τρεις  
κορυφές του  
τριγώνου σας.

10. Εφαρμόστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο στις κορυφές του τριγώνου προκειμένου να κατασκευάσετε ένα δεύτερο ύψος. Μην ανησυχήσετε εάν, κατά τύχη, κατασκευάσετε το ήδη υπάρχον ύψος. Απλώς εφαρμόστε ξανά το Προσαρμοσμένο εργαλείο στις κορυφές, αλλά με διαφορετική σειρά, ωστόσο προκύψει ένα άλλο ύψος.

11. Χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή του τρίτου ύψους του τριγώνου.

12. Σύρτε το τρίγωνο και παρατηρήστε πώς συμπεριφέρονται τα τρία ύψη.

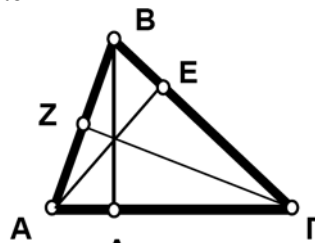
E3. Τι παρατηρείτε σχετικά με τα τρία ύψη όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο;



E4. Τι παρατηρείτε σχετικά με τα τρία ύψη όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο;



Όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, τα τρία ύψη δεν τέμνονται μεταξύ τους. Πιστεύετε ότι θα τέμνονταν και τα τρία στο ίδιο σημείο αν είχαν αρκετά μεγάλο μήκος; Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα προκειμένου να εξετάσετε αυτό το ερώτημα.



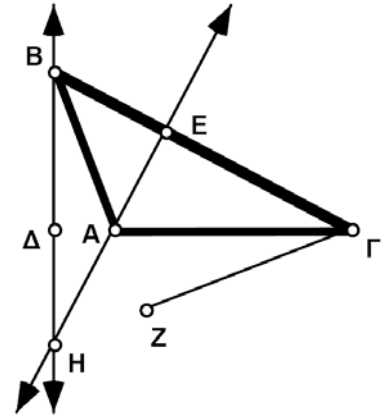
Βήμα 11

### Ύψη ενός τριγώνου (συνέχεια)

13. Βεβαιωθείτε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. Κατασκευάστε δύο ευθείες, κάθεμιά από τις οποίες περιέχει ένα ύψος.

Εάν έχετε ήδη κατασκευάσει τρεις ευθείες, επιλέξτε δύο από αυτές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Τομής**.

14. Κατασκευάστε το σημείο τομής τους. Το σημείο αυτό ονομάζεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



Βήματα 13 και 14

15. Κατασκευάστε μια ευθεία που περιέχει το τρίτο ύψος.

16. Μεταφέρετε το τρίγωνο και παρατηρήστε τις ευθείες.

E5. Τι παρατηρείτε σχετικά με τις ευθείες που περιέχουν τα ύψη;



### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

Αποκρύψτε τα πάντα στο σχέδιό σας εκτός από το τρίγωνο και το ορθόκεντρο. Δημιουργήστε και αποθηκεύστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο, το οποίο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε σε άλλες έρευνες σχετικά με τα ειδικά σημεία ενός τριγώνου.

## Διχοτόμοι ενός τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

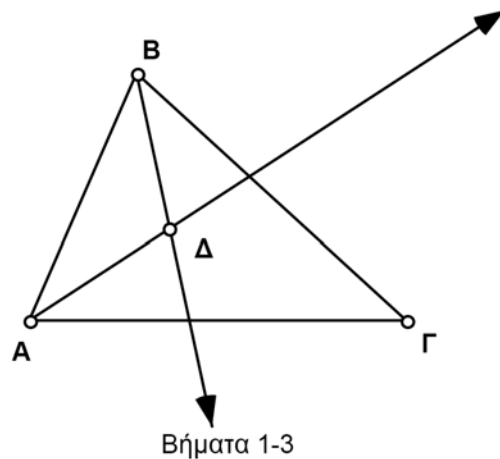
Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ορισμένες ιδιότητες των διχοτόμων ενός τριγώνου.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το τρίγωνο ABΓ.

Επιλέξτε τρία σημεία με την κορυφή της γωνίας ως δεύτερη κατά σειρά επιλογή. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Διχοτόμου γωνίας**.

2. Κατασκευάστε τις διχοτόμους για τις δύο από τις τρεις γωνίες, δηλαδή για τις γωνίες Α και Β.



Κάντε κλικ στην τομή με το εργαλείο βέλους επιλογής ή με το εργαλείο σημείων ή επιλέξτε τις δύο διχοτόμους και ακολούθως, στο μενού **Κατασκευή**, επιλέξτε **Τομής**.

3. Κατασκευάστε το σημείο Δ, δηλαδή το σημείο τομής των δύο διχοτόμων.

4. Κατασκευάστε τη διχοτόμο της γωνίας Γ.

E1. Τι παρατηρείτε σχετικά με την τρίτη διχοτόμο (που δεν εμφανίζεται στο σχήμα); Μεταφέρετε καθεμιά από τις κορυφές του τριγώνου προκειμένου να επαληθεύσετε ότι η παρατήρηση αυτή ισχύει για κάθε τρίγωνο.



Επιλέξτε το σημείο Δ και μια από τις πλευρές του τριγώνου. Κατόπιν, στο μενού **Μέτρηση**, επιλέξτε **Απόσταση**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τις υπόλοιπες δύο πλευρές.

5. Μετρήστε την απόσταση του σημείου Δ από κάθε πλευρά του τριγώνου.

6. Μεταφέρετε καθεμιά από τις κορυφές του τριγώνου και παρατηρήστε τις αποστάσεις.

E2. Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου ονομάζεται **έγκεντρο**. Γράψτε μια εικασία σχετικά με την απόσταση κάθε πλευράς του τριγώνου από το έγκεντρο.





### **Διχοτόμοι ενός τριγώνου (συνέχεια)**

#### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Ένας εγγεγραμμένος κύκλος είναι ένας κύκλος στο εσωτερικό ενός τριγώνου ο οποίος εφάπτεται σε καθεμιά από τις πλευρές του τριγώνου. Κατασκευάστε έναν εγγεγραμμένο κύκλο, ο οποίος παραμένει εγγεγραμμένος ανεξαρτήτως του τρόπου μεταφοράς των κορυφών του τριγώνου.

Υπόδειξη: Χρειάζεται να κατασκευάσετε μια κάθετη ευθεία.

2. Δημιουργήστε και αποθηκεύστε ένα Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή του έγκεντρου ενός τριγώνου (με ή χωρίς τον εγγεγραμμένο κύκλο). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εργαλείο αυτό σε άλλες έρευνες σχετικά με τα ειδικά σημεία ενός τριγώνου.
3. Εξηγήστε γιατί η τομή μεταξύ των διχοτόμων είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

Υπόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σημείο μιας διχοτόμου ισαπέχει από τις δύο πλευρές της γωνίας. Γιατί το έγκεντρο ισαπέχει από τις τρεις πλευρές του τριγώνου;

## Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες. Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εκτός από ίσες γωνίες διαθέτει πολλές ειδικές ιδιότητες.

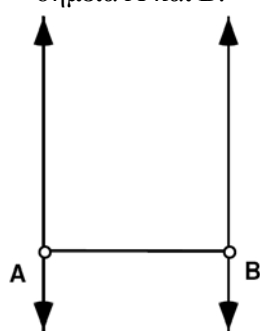
### Σχέδιο και έρευνα

Αρχικά θα κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του.

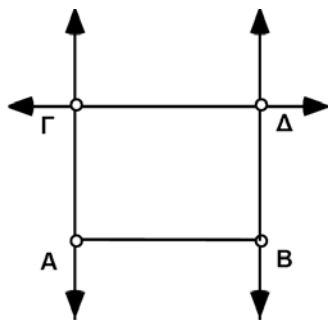
1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Επιλέξτε τα σημεία A και B καθώς και το ευθύγραμμο τμήμα AB. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Κάθετων ευθειών**. Θα εμφανιστούν αμέσως και οι δύο κάθετες ευθείες.

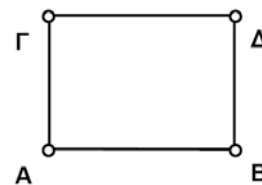
2. Κατασκευάστε ευθείες κάθετες στο τμήμα AB και διερχόμενες από τα σημεία A και B.



Βήματα 1 και 2



Βήματα 3-5



Βήμα 6

3. Κατασκευάστε το σημείο Γ στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο A.

4. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Γ και κάθετη στην ευθεία AG.

5. Κατασκευάστε την τέταρτη κορυφή, δηλαδή το σημείο Δ, στην τομή αυτής της ευθείας και της ευθείας που διέρχεται από το σημείο B.

6. Αποκρύψτε τις ευθείες και κατόπιν κατασκευάστε ευθύγραμμα τμήματα ώστε να ολοκληρώσετε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

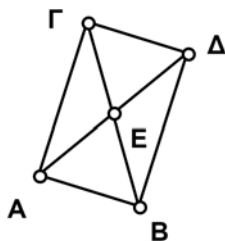
7. Μετρήστε τις πλευρές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.

8. Σύρτε τις διαφορετικές κορυφές του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου προκειμένου να βεβαιωθείτε ότι έχει κατασκευαστεί σωστά.

Παρατηρήστε τα μήκη των πλευρών καθώς σύρτε τις κορυφές.

### Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων (συνέχεια)

Ε1. Διατυπώστε μια εικασία σχετικά με τις πλευρές ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.



9. Κατασκευάστε τις διαγώνιους καθώς και το σημείο τομής τους.

Επιλέξτε ένα  
ευθύγραμμο τμήμα  
και κατόπιν στο  
μενού **Μέτρηση**  
επιλέξτε **Μήκους** ή  
επιλέξτε δύο ακραία  
σημεία και  
**Απόστασης**.

10. Σύρτε τμήματα του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και παρατηρήστε τις διαγώνιους. Μετρήστε μήκη που μοιάζουν να σχετίζονται μεταξύ τους.

Ε2. Γράψτε τουλάχιστον δύο εικασίες σχετικά με τις διαγώνιους ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Αν είναι απαραίτητο, χρησιμοποιήστε και δεύτερη σελίδα χαρτιού.



## Ιδιότητες ρόμβων

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Ο ρόμβος είναι ένα ισόπλευρο τετράπλευρο. Στην έρευνα αυτή θα ανακαλύψετε πολλές άλλες ιδιότητες των ρόμβων.

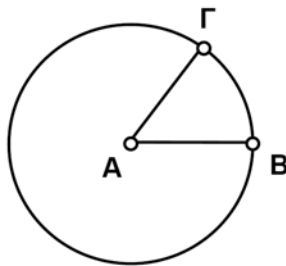
### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε τον κύκλο AB.

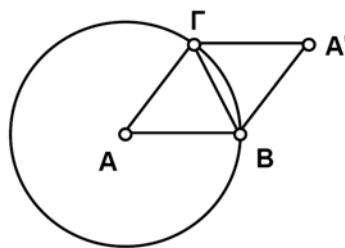
Βεβαιωθείτε ότι χρησιμοποιήσατε τα σημεία του κύκλου ως άκρα του ευθύγραμμου τμήματος AB.

2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AB.

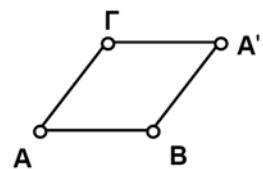
3. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AΓ, όπου το σημείο Γ ανήκει στον κύκλο.



Βήματα 1-3



Βήματα 4-6



Βήμα 7

4. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα BΓ.

Κάντε διπλό κλικ στο ευθύγραμμο τμήμα BΓ προκειμένου να το επιλέξετε ως άξονα συμμετρίας. Επιλέξτε το σημείο A καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα AΓ και AB. Κατόπιν στο μενού **Μετασχηματισμός** επιλέξτε **Ανάκλαση**.

5. Επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα BΓ ως άξονα συμμετρίας και προχωρήστε σε ανάκλαση του σημείου A, του ευθύγραμμου τμήματος AΓ και του ευθύγραμμου τμήματος AB ως προς αυτόν.

6. Αποκρύψτε τον κύκλο και το ευθύγραμμο τμήμα BΓ.

7. Μεταφέρετε διαφορετικές κορυφές του ρόμβου προκειμένου να βεβαιωθείτε ότι έχει κατασκευαστεί σωστά.

### Ιδιότητες ρόμβων (συνέχεια)

Για τη μέτρηση της κλίσης, πρώτα επιλέξτε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Κλίση**. Για τη μέτρηση μιας γωνίας, πρώτα επιλέξτε τρία σημεία με την κορυφή της γωνίας ως δεύτερη κατά σειρά επιλογή.



8. Μετρήστε την κλίση των πλευρών του ρόμβου καθώς και τις γωνίες του.

9. Μεταφέρετε διαφορετικές κορυφές και παρατηρήστε τις μετρήσεις αυτές.

E1. Γράψτε τουλάχιστον τρεις εικασίες σχετικά με τις πλευρές και τις γωνίες ενός ρόμβου.

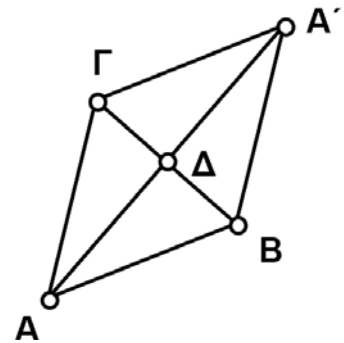
10. Κατασκευάστε τις διαγώνιους καθώς και το σημείο τομής τους.

Για τη μέτρηση ενός μήκους, επιλέξτε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Μήκους** ή επιλέξτε δύο ακραία σημεία και **Απόστασης**.



11. Μεταφέρετε μέρη του ρόμβου και παρατηρήστε πώς οι διαγώνιοι σχετίζονται μεταξύ τους καθώς και προς τις γωνίες του ρόμβου. Μετρήστε μήκη και γωνίες που μοιάζουν να σχετίζονται μεταξύ τους.

E2. Γράψτε τουλάχιστον τρεις εικασίες σχετικά με τις διαγώνιους ενός ρόμβου. Αν είναι απαραίτητο, χρησιμοποιήστε μια δεύτερη σελίδα χαρτιού.



## Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων

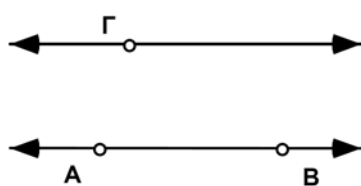
Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Θα ανακαλύψετε μια σχέση μεταξύ των εμβαδών παραλληλόγραμμων και τριγώνων εξετάζοντας μια διαδικασία που ονομάζεται **διατμητική παραμόρφωση**. Έτσι, θα λάβετε έναν τύπο για το εμβαδόν τον οποίο μπορείτε να γενικεύσετε για κάθε παραλληλόγραμμο.

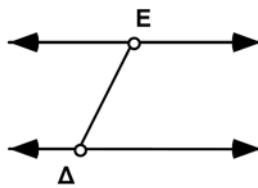
### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε μια οριζόντια ευθεία AB.
2. Κατασκευάστε το σημείο Γ πάνω από την ευθεία AB.
3. Κατασκευάστε μια ευθεία παράλληλη προς την ευθεία AB και διερχόμενη από το σημείο Γ.
4. Αποκρύψτε τα σημεία A, B και Γ.
5. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ μεταξύ της κάτω και της πάνω ευθείας.
6. Κατασκευάστε το σημείο Ζ στην κάτω ευθεία.
7. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Ζ και παράλληλη προς το τμήμα ΔΕ.
8. Κατασκευάστε το σημείο Η στην τομή μεταξύ της ευθείας αυτής και της πάνω ευθείας.

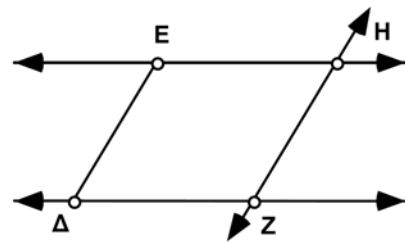
Επιλέξτε το σημείο Γ και την ευθεία AB. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Παράλληλης ευθείας**.



Βήματα 1-3



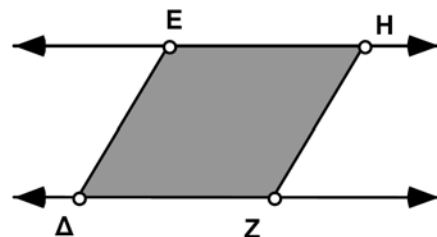
Βήματα 4 και 5



Βήματα 5-7

Επιλέξτε διαδοχικά τις κορυφές. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Εσωτερικού τετράπλευρου**.

9. Κατασκευάστε το εσωτερικό του πολυγώνου ΔΕΗΖ.
10. Αποκρύψτε την ευθεία ΖΗ.
11. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ.



### Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων (συνέχεια)

Επιλέξτε το  
εσωτερικό κάνοντας  
κλικ σε αυτό.  
Κατόπιν στο μενού  
**Μέτρηση** επιλέξτε  
**Εμβαδού**.

12. Μετρήστε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ΔΕΗΖ.

13. Παρατηρήστε τη μέτρηση του εμβαδού σε καθέναν από τους ακόλουθους τρόπους μεταφοράς:

- α. Μεταφέρετε το σημείο Ε, ώστε να υποστεί διάτμηση το παραλληλόγραμμο.
- β. Μεταφέρετε το σημείο Δ ή το σημείο Ζ, ώστε να μεταβληθεί η βάση του παραλληλόγραμμου.
- γ. Μεταφέρετε είτε την ευθεία ΕΗ είτε την ευθεία ΔΖ πάνω ή κάτω, ώστε να μεταβληθεί το ύψος.

Ε1. Ποια από αυτές τις ενέργειες έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του εμβαδού και ποια όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

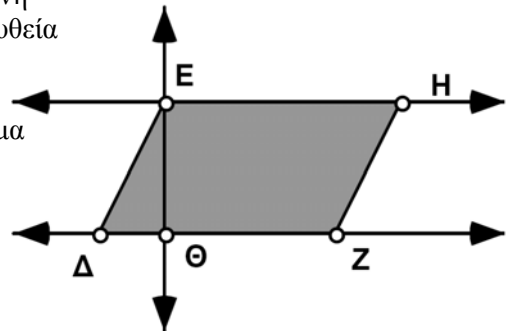


Το ύψος του παραλληλόγραμμου είναι η απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων ευθειών. Για την κατασκευή ενός ευθύγραμμου τμήματος που το μήκος του είναι το ύψος του παραλληλόγραμμου, ακολουθήστε τα βήματα 14 και 15.

14. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Ε και κάθετη στην ευθεία ΔΖ.

15. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ, όπου Θ είναι το σημείο τομής μεταξύ της ευθείας ΔΖ και της κάθετης ευθείας.

16. Αποκρύψτε την κάθετη ευθεία.



Επιλέξτε τα δύο  
ακραία σημεία.  
Κατόπιν στο μενού  
**Μέτρηση** επιλέξτε  
**Απόσταση**.

17. Μετρήστε το μήκος του ΕΘ.

18. Μετρήστε το τμήμα ΔΖ, δηλαδή τη βάση του παραλληλόγραμμου.

## Εμβαδά παραλληλόγραμμων και τριγώνων (συνέχεια)

Κάντε κλικ μια φορά σε μια μέτρηση ώστε να την εισαγάγετε σε έναν υπολογισμό στον Υπολογιστή.

E2. Χρησιμοποιήστε αυτές τις μετρήσεις προκειμένου να υπολογίσετε την τιμή μιας έκφρασης ίσης με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου. Γράψτε την έκφραση αυτή.



E3. Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου χρησιμοποιώντας τα γράμματα E για το εμβαδόν, β για τη βάση και υ για το ύψος.



Ακολούθως, θα ερευνήσετε τον τρόπο με τον οποίο το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου σχετίζεται με το εμβαδόν ενός τριγώνου.

19. Αποκρύψτε το εσωτερικό του παραλληλόγραμμου.

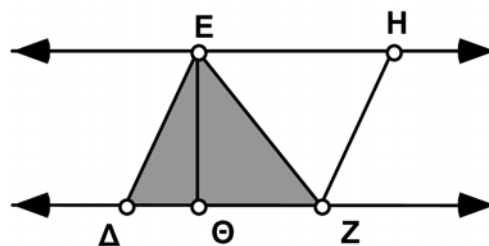
20. Κατασκευάστε τη διαγώνιο EZ.

21. Κατασκευάστε το εσωτερικό του πολυγώνου ΔEZ.

22. Μετρήστε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ.

23. Μεταφέρετε το σημείο E και παρατηρήστε τις μετρήσεις του εμβαδού.

E4. Πώς σχετίζεται το εμβαδόν του τριγώνου με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου; Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου χρησιμοποιώντας τα γράμματα E για το εμβαδόν, β για τη βάση και υ για το ύψος.



### Περαιτέρω εξερεύνηση

Δημιουργήστε ένα κουμπί ενεργειών προκειμένου να προσθέσετε κίνηση στο σημείο E κατά μήκος της ευθείας στην οποία ανήκει. Εξηγήστε γιατί η κίνηση αυτή επιδεικνύει τη διατηρητική παραμόρφωση.



## Εμβαδόν/περίμετρος τριγώνου

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Είναι δυνατή η κατασκευή δύο άνισων τριγώνων τα οποία έχουν ίσα εμβαδά και ίσες περιμέτρους; Χρησιμοποιήστε το Sketchpad προκειμένου να εξετάσετε αυτό το ερώτημα. Στον κενό χώρο παρακάτω μπορείτε να περιγράψετε τα ευρήματά σας ή να εκτυπώσετε ένα σχέδιο με σχόλια που θα περιγράψουν τις ανακαλύψεις σας.

Για τη μέτρηση εμβαδού και περιμέτρου, πρέπει πρώτα να κατασκευάσετε ένα εσωτερικό πολυγώνου. Επιλέξτε λοιπόν τις κορυφές κατά διαδοχική σειρά. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Εσωτερικού τριγώνου**.

E1. Εφόσον είναι δυνατόν, στον κενό χώρο παρακάτω σχεδιάστε και αντιστοιχίστε από μία ετικέτα σε καθένα από τα δύο άνισα τρίγωνα ίσων εμβαδών και περιμέτρων (ή εκτυπώστε το σχέδιό σας και επικολλήστε το σε αυτή τη σελίδα). Εάν κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν, εξηγήστε την αιτία.



E2. Στον κενό χώρο παρακάτω δώστε μια περιγραφή των ενεργειών σας σε αυτή την έρευνα. Εάν δημιουργήσατε δύο άνισα τρίγωνα ίσων εμβαδών και περιμέτρων, περιγράψτε τον τρόπο κατασκευής τους.



## Εμβαδόν ενός τραπεζίου

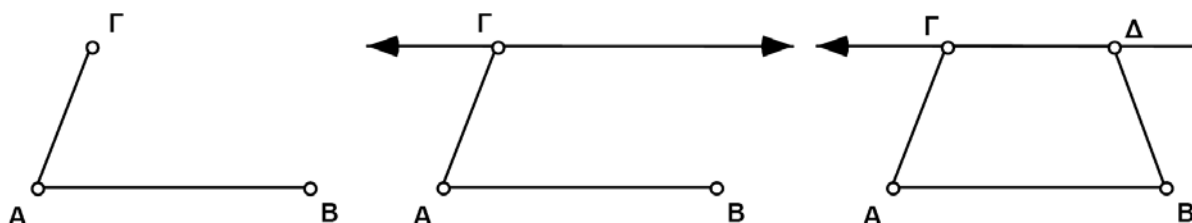
Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Το τραπέζιο είναι ένα τετράπλευρο με δύο παράλληλες πλευρές. Στην έρευνα αυτή θα κατασκευάσετε ένα τραπέζιο και κατόπιν θα το μετασχηματίσετε σε ένα σχήμα για το εμβαδόν του οποίου πρέπει να γνωρίζετε τον τύπο. Από τον τύπο αυτό θα εξαγάγετε μια σχέση για το εμβαδόν του τραπεζίου.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AB.
2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα AG.
3. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο Γ και παράλληλη προς το τμήμα AB.
4. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΒ, όπου το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία.

Επιλέξτε το σημείο Γ και το ευθύγραμμο τμήμα AB. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Παράλληλης ευθείας**.



#### Βήματα 1 και 2

Επιλέξτε την ευθεία. Κατόπιν στο μενού **Προβολή** επιλέξτε **Απόκρυψη**.

#### Βήμα 3

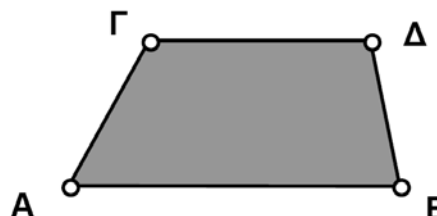
5. Αποκρύψτε την ευθεία.
6. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

#### Βήμα 4

Εμβαδόν  $AB\Gamma\Delta = 3,78 \text{ εκ.}^2$   
Μήκος  $AB = 3,21 \text{ εκ.}$   
Μήκος  $\Gamma\Delta = 2,15 \text{ εκ.}$   
Απόσταση Γ έως  $AB = 1,41 \text{ εκ.}$

Επιλέξτε τις κορυφές κατά διαδοχική σειρά. Κατόπιν στο μενού **Κατασκευή** επιλέξτε **Εσωτερικό τετράπλευρου**.

7. Κατασκευάστε το εσωτερικό πολυγώνου του τραπεζίου  $AB\Delta\Gamma$ .
8. Μετρήστε το εμβαδόν του  $AB\Delta\Gamma$ .
9. Μετρήστε τα μήκη των βάσεων,  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , του τραπεζίου.



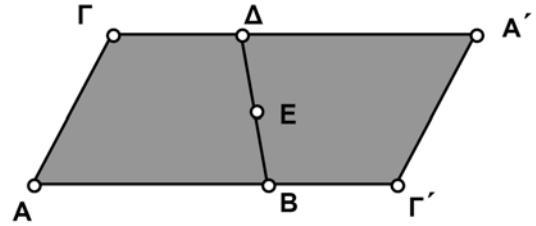
Επιλέξτε το σημείο Γ και το ευθύγραμμο τμήμα AB. Κατόπιν στο μενού **Μέτρηση** επιλέξτε **Απόστασης**.

10. Μετρήστε την απόσταση του ευθύγραμμου τμήματος AB από το σημείο Γ. Αυτό είναι το ύψος του τραπεζίου.
11. Μεταφέρετε διαφορετικά μέρη του τραπεζίου και παρατηρήστε τις μετρήσεις.

### Εμβαδόν ενός τραπεζίου (συνέχεια)

Στο σημείο αυτό ίσως είναι δύσκολο να βρείτε οποιαδήποτε σχέση μεταξύ της μέτρησης του εμβαδού και των μετρήσεων της βάσης και του ύψους. Συνεχίστε τη σχεδίαση προκειμένου να ερευνήσετε τη ζητούμενη σχέση.

12. Κατασκευάστε το σημείο E στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΔB.



Κάντε διπλό κλικ στο σημείο E ώστε να το επιλέξετε ως κέντρο. Επιλέξτε το τραπέζιο. Στο μενού **Μετασχηματισμός** επιλέξτε **Περιστροφή**.

13. Επιλέξτε το σημείο E ως κέντρο και περιστρέψτε ολόκληρο το τραπέζιο κατά  $180^\circ$ .

14. Μεταφέρετε τμήματα του σχήματος και παρατηρήστε τη μορφή που αποκτά το τραπέζιο και το περιστραμμένο είδωλό του.

E1. Ποιο σχήμα αποκτούν τα δύο συνδυασμένα τραπέζια;



E2. Έστω  $\beta_1$  το μήκος της βάσης AB και  $\beta_2$  το μήκος της βάσης ΓΔ. Ποιο είναι το μήκος της βάσης του σχήματος των συνδυασμένων τραπεζίων;



E3. Γράψτε έναν τύπο για το εμβαδόν ενός απλού τραπεζίου σε συνάρτηση με τα  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  και υ (ύψος).



Κάντε κλικ μία φορά σε μια μέτρηση ώστε να την εισαγάγετε σε έναν υπολογισμό. Όπου είναι απαραίτητο χρησιμοποιήστε παρενθέσεις.

- E4. Ελέγξτε στο σχέδιό σας ότι έχετε εξαγάγει το σωστό τύπο υπολογίζοντας μια έκφραση ίση με το εμβαδόν του τραπεζίου. Χρησιμοποιήστε στην έκφρασή σας τα AB, ΓΔ καθώς και την απόσταση του σημείου Γ από το ευθύγραμμο τμήμα AB. Γράψτε στον κενό χώρο παρακάτω την έκφρασή σας.



### **Εμβαδόν ενός τραπεζίου (συνέχεια)**

#### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

1. Κατασκευάστε τα σημεία στο μέσο των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου. Συνδέστε τα σημεία αυτά με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Χρησιμοποιήστε το μήκος αυτού του τμήματος ώστε να επινοήσετε ένα νέο τύπο για το εμβαδόν.
2. Κατασκευάστε ένα τρίγωνο στο εσωτερικό του τραπεζίου με εμβαδόν ίσο με το ήμισυ του εμβαδού του τραπεζίου. Εξηγήστε τις ενέργειές σας. Υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι για την κατασκευή αυτή;

## Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας

Ονοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

Η σχεδίαση διαγραμμάτων αποτελεί μια χρήσιμη μέθοδο για την επίλυση πολλών ειδών ρεαλιστικών προβλημάτων. Τα δυναμικά διαγράμματα μπορούν να είναι ακόμη πιο χρήσιμα. Εδώ παρουσιάζουμε ένα πρόβλημα το οποίο μπορεί να λυθεί μέσω ενός σχεδίου του Sketchpad:

Εάν στηρίξετε μια σκάλα σε έναν τοίχο έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζει με το έδαφος να είναι μικρότερη των 45 μοιρών, διατρέχετε τον κίνδυνο ολίσθησης της βάσης της σκάλας. Εάν η γωνία είναι μεγαλύτερη των 75 μοιρών, η σκάλα ίσως ανατραπεί προς τα πίσω. Ποιο είναι το ύψος από το έδαφος του χαμηλότερου και του ψηλότερου παραθύρου στο οποίο μπορείτε να φτάσετε με μια σκάλα μήκους 6,1 μέτρα;

### **Σχέδιο**

Βήμα 1: Κατασκευάστε κατακόρυφα και οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα AB και BΓ (κρατώντας πατημένο το Shift) και επεξεργαστείτε τις ετικέτες τους, δίνοντας σε αυτά τα ονόματα τοίχος και έδαφος.

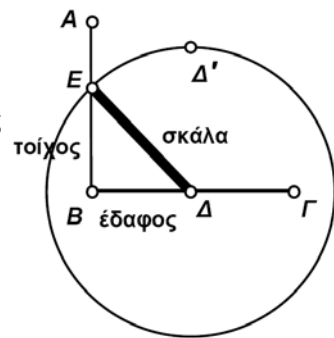
Βήμα 2: Κατασκευάστε το σημείο Δ στο έδαφος. Το Δ είναι το σημείο στήριξης της σκάλας στο έδαφος.

Βήμα 3: Μεταφέρετε το σημείο Δ κατά δύο ίντσες προς κάθε κατεύθυνση. Οι δύο ίντσες παριστάνουν το μήκος της σκάλας, άρα η κλίμακα σχεδίασης είναι 1 εκατοστό = 1,2 μέτρα.

Βήμα 4: Κατασκευάστε τον κύκλο με ακτίνα το ΔΔ'.

Βήμα 5: Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ, όπου Ε το σημείο τομής του κύκλου ΔΔ' με τον τοίχο. Ίσως χρειαστεί πρώτα να μετακινήσετε το σημείο Δ έτσι ώστε ο κύκλος και ο τοίχος να τέμνονται. Το τμήμα ΔΕ παριστάνει τη σκάλα. (Επεξεργαστείτε την ετικέτα του.) Το μήκος του δεν μπορεί να μεταβληθεί, διότι η ακτίνα του κύκλου έχει σταθερό μήκος δύο ίντσών.

Βήμα 6: Αποκρύψτε τον κύκλο και το σημείο Δ'.



### **Έρευνα**

Μετρήστε τη γωνία ΕΔΒ και την απόσταση μεταξύ Ε και Β (το τμήμα ΕΒ παριστάνει το ύψος του τοίχου στο οποίο θα φτάσετε με τη σκάλα).

Μετακινήστε το σημείο Δ εμπρός πίσω κατά μήκος του εδάφους και χρησιμοποιήστε τις μετρήσεις σας ώστε να απαντήσετε στο παραπάνω πρόβλημα. Γράψτε τις απαντήσεις σας:

---

Τώρα σε μια ξεχωριστή σελίδα γράψτε ένα ή περισσότερα προβλήματα που μπορούν να μοντελοποιηθούν με αυτό το σχέδιο.

## **Έρευνα: Μοντελοποίηση του προβλήματος μιας σκάλας** **(συνέχεια)**

### **Παρουσίαση των ευρημάτων σας**

Συζητήστε τα αποτελέσματά σας με τον ή τους συμμαθητές σας. Προκειμένου να παρουσιάσετε τα ευρήματά σας, μπορείτε να εκτυπώσετε ένα σχέδιο με λεζάντα, το οποίο θα εμφανίζει το μοντέλο σας στις δύο καταστάσεις που λύνουν το πρόβλημα. Βεβαιωθείτε ότι παρουσιάσατε τις μετρήσεις που εκφράζουν οι απαντήσεις σας.

### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

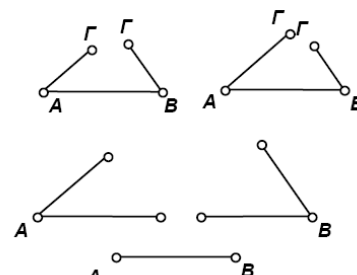
1. Προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε το Sketchpad ώστε να μοντελοποιήσετε άλλα ρεαλιστικά προβλήματα. Ποια είναι η τροχιά ενός δοχείου μπογιάς στο μέσο το οποίο πέφτει καθώς το σημείο στήριξης της σκάλας ολισθαίνει στο έδαφος; Κατασκευάστε το μέσο της σκάλας και, ενόσω είναι επιλεγμένο, επιλέξτε τη Σχεδίαση ίχνους σημείου από το μενού Προβολή. Προσθέστε κίνηση στο σημείο Δ κατά μήκος του τμήματος ΒΓ.
2. Μετρήστε την απόσταση μεταξύ του σημείου στήριξης της σκάλας στο έδαφος και του τοίχου (ΔΒ) καθώς και το ύψος (ΕΒ) της σκάλας. Επιλέξτε αυτές τις μετρήσεις και την εντολή Αποτύπωση με (x, y) από το μενού Μέτρηση. Μεταφέρετε το σημείο στήριξης της σκάλας στο έδαφος. Τι είδους γράφημα προκύπτει; Εάν απομακρύνετε από τον τοίχο αυτό το σημείο στήριξης με σταθερό ρυθμό, θα έχει η πτώση της κορυφής της σκάλας επίσης σταθερό ρυθμό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

## **Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – γπγ:**

Στην επίδειξη αυτή θα εργαστείτε με ένα δείγμα σχεδίου που ονομάζεται Ισότητα τριγώνων - γπγ και θα προσπαθήσετε να δημιουργήσετε δύο διαφορετικά τρίγωνα εάν δίνεται μια πλευρά, αλλά και οι προσκείμενες γωνίες.

Βήμα 1: Ανοίξτε το αρχείο **Δραστηριότητες\Ισότητα τριγώνων - γπγ.gsp**. Θα δείτε δύο ημιτελή τρίγωνα, δύο ξεχωριστές γωνίες και ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Βήμα 2: Σύρτε διαφορετικά μέρη των ημιτελών τριγώνων. Θα διαπιστώσετε ότι κάποια μήκη και ορισμένες γωνίες δεν μπορούν να μεταβληθούν, επειδή περιορίζονται από τα αντικείμενα-παραμέτρους.



Βήμα 3: Σύρτε τα σημεία Γ σε ένα ημιτελές τρίγωνο έτσι ώστε να συμπέσουν σχηματίζοντας ένα τρίγωνο.

Βήμα 4: Δοκιμάστε να συνδέσετε τα σημεία Γ στο άλλο ημιτελές τρίγωνο ώστε να δημιουργήσετε ένα δεύτερο τρίγωνο, όχι ίσο με το πρώτο.

Βήμα 5: Μεταβάλετε τις δοθείσες πλευρές ή/και τη γωνία και επαναλάβετε το πείραμα.

### **Έρευνα**

Μπορείτε να σχηματίσετε άνισα τρίγωνα εάν δίνεται μια πλευρά όπως και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες;

Να γραφεί μια εικασία

---

---

---

---

---

### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

Για να διασκεδάσετε, προσπαθήστε να κάνετε τα δύο σημεία Γ να συμπέσουν μεταβάλλοντας τα αντικείμενα-παραμέτρους αντί να σύρτε τα ίδια τα σημεία.

## Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – ππγ;

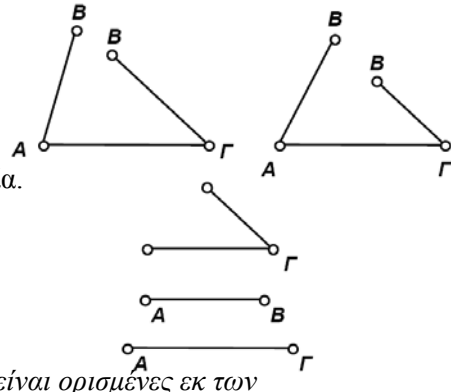
Στην επίδειξη αυτή θα εργαστείτε με ένα δείγμα σχεδίου που ονομάζεται Ισότητα τριγώνων - ππγ και θα εξετάσετε πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να δημιουργηθούν εάν δίνονται δύο πλευρές και μια από τις απέναντι γωνίες.

Βήμα 1: Ανοίξτε το αρχείο

**Δραστηριότητες\**

**Ισότητα τριγώνων - ππγ.gsp.**

Θα δείτε δύο ημιτελή τρίγωνα, δύο ξεχωριστά ευθύγραμμα τμήματα και μια γωνία.



Βήμα 2: Σύρτε διαφορετικά μέρη του ημιτελούς τριγώνου. Θα διαπιστώσετε ότι κάποια μήκη και ορισμένες γωνίες δεν μπορούν να μεταβληθούν, επειδή *είναι ορισμένες εκ των προτέρων*.

Βήμα 3: Σύρτε τα σημεία B σε ένα ημιτελές τρίγωνο έτσι ώστε να συμπέσουν σχηματίζοντας ένα τρίγωνο.

Βήμα 4: Δοκιμάστε να συνδέσετε τα σημεία B στο άλλο τρίγωνο έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να μην είναι ίσα.

Βήμα 5: Μεταβάλετε τις δοθείσες πλευρές ή/και τη γωνία και επαναλάβετε το πείραμα.

### **Έρευνα**

Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορείτε να σχηματίσετε εάν δίνονται δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες; Δεν ορίζουν δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες ένα τρίγωνο κατά μοναδικό τρόπο; Εάν δίνονται δύο τρίγωνα με ίσα δύο ζεύγη αντίστοιχων πλευρών καθώς και μία από τις απέναντι γωνίες, μπορείτε να αποφανθείτε κατά πόσο τα τρίγωνα αυτά είναι μεταξύ τους ίσα;

Γράψτε τις εικασίες σας

---

---

---

---

---



### **Επίδειξη: Ισότητα τριγώνων – ππγ; (συνέχεια)**

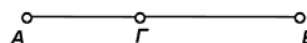
#### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

Μεταβάλλοντας τις δοθείσες πλευρές και τη γνωστή γωνία, θα διαπιστώσετε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αδύνατη η δημιουργία οποιουδήποτε τριγώνου, ενώ με κάποιους συνδυασμούς μπορείτε να κατασκευάσετε μόνο ένα τρίγωνο. Ποιες είναι οι συνθήκες για τη δυνατότητα κατασκευής μόνο ενός τριγώνου εάν δίνονται δύο πλευρές και μία από τις απέναντι γωνίες;

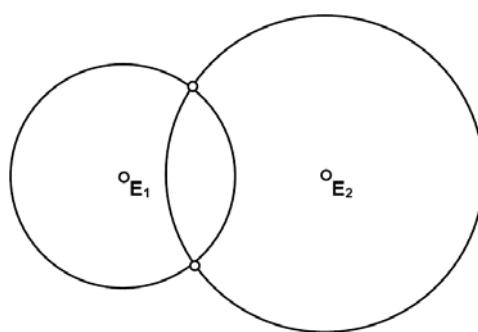
## Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών

Μια έλλειψη ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων, τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, που ονομάζονται **εστίες**, να είναι σταθερό. Στη δραστηριότητα αυτή θα χρησιμοποιήσετε αυτό τον ορισμό προκειμένου να κατασκευάσετε σημεία που δίνουν το ίχνος αυτού του γεωμετρικού τόπου. Τα βήματα της κατασκευής είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1: Κατασκευάστε την ευθεία  $AB$  και κατόπιν το σημείο  $\Gamma$  επί της  $AB$ .



Βήμα 2: Αποκρύψτε την  $AB$  και κατόπιν κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Gamma$  και  $\Gamma B$ . Τα μήκη των τελευταίων παριστάνουν δύο αποστάσεις των οποίων το άθροισμα είναι σταθερό, δηλαδή είναι το μήκος  $AB$ .



Βήμα 3: Κατασκευάστε και δώστε ετικέτες στα σημεία  $E_1$  και  $E_2$ , τα οποία παριστάνουν τις εστίες της έλλειψής σας.

Βήμα 4: Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου  $E_1$  και ακτίνας  $A\Gamma$ . Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο κέντρου  $E_2$  και ακτίνας  $\Gamma B$ .

Βήμα 5: Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής αυτών των κύκλων. Επιλέξτε αυτά τα σημεία τομής καθώς και την εντολή Σχεδίαση ίχνους τομών από το μενού Προβολή.

### **Έρευνα**

Σύρτε το σημείο  $\Gamma$  εμπρός πίσω κατά μήκος της ευθείας  $AB$ . Τι σχήμα σχεδιάζουν τα σημεία τομής των κύκλων; (Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε την ευθεία  $AB$  ή την απόσταση μεταξύ  $E_1$  και  $E_2$  έτσι ώστε να τέμνονται οι κύκλοι.) Εάν έχει δοθεί ο ορισμός αυτού του σχήματος, γιατί η κατασκευή αυτή δίνει το ίχνος του; Γράψτε την εξήγησή σας.

---

---

---

---

### **Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών (συνέχεια)**

#### **Περαιτέρω εξερεύνηση**

Μετρήστε τα μήκη του ευθύγραμμου τμήματος  $E_1E_2$  και  $AB$ . Υπολογίστε το λόγο  $E_1E_2 / AB$ . Ο λόγος αυτός ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης. Ακολουθώντας, επιλέξτε ένα από τα σημεία τομής των κύκλων και το σημείο  $\Gamma$  καθώς και την εντολή Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί περισσότερο από το ήμισυ της έλλειψης. Κάντε δεξί κλικ σε αυτή την καμπύλη και επιλέξτε την Σχεδίαση ίχνους γεωμετρικού τόπου. Κατασκευάστε το υπόλοιπο ήμισυ της έλλειψης με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το άλλο σημείο τομής του κύκλου και το σημείο  $\Gamma$ . Προσαρμόζοντας το μήκος της ευθείας  $AB$  και την απόσταση μεταξύ των εστιών, δημιουργείτε ελλείψεις διαφορετικού σχήματος. Πόσο μεγάλη ή μικρή μπορεί να είναι η τιμή της εκκεντρότητας ώστε να είναι ακόμη δυνατή η παραγωγή μιας έλλειψης; Τι συμβαίνει όταν η τιμή της εκκεντρότητας υπερβεί τη μονάδα;



Το λογισμικό **The Geometer's Sketchpad** εξελληνίσθηκε και προσαρμόσθηκε στο πλαίσιο του έργου **ΚΙΡΚΗ**, αντικείμενο του οποίου ήταν ο εξελληνισμός και η προσαρμογή στις ανάγκες του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος ώριμων και καταξιωμένων προϊόντων εκπαιδευτικού λογισμικού της διεθνούς αγοράς καθώς και η αναπαραγωγή και διανομή των προϊόντων αυτών σε 350 σχολεία.

Η **ΚΙΡΚΗ** - <http://kirki.cti.gr> - ξεκίνησε ως έργο της ενέργειας **Οδύσσεια-Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας**, το εθνικό πρόγραμμα παιδαγωγικής ένταξης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, το οποίο χρηματοδοτήθηκε για το διάστημα 1996-2001 από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης – ΕΠΕΑΕΚ, Β' ΚΠΣ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Η Οδύσσεια περιλάμβανε:

- ανάπτυξη κατάλληλης υποδομής σε 385 σχολεία εφαρμογής (εγκατάσταση σχολικών εργαστηρίων στα οποία υποστηρίζεται η διδασκαλία διαφόρων μαθημάτων, δικτύωση στο Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο, τοπική και εξ αποστάσεως τεχνική υποστήριξη),
- μεταπτυχιακή εκπαίδευση 95 επιμορφωτών (καθηγητές όλων των ειδικοτήτων) σε εξειδικευμένα ετήσια πανεπιστημιακά προγράμματα, οι οποίοι ανέλαβαν τη
- διαρκή ενδοσχολική επιμόρφωση των 5.500 εκπαιδευτικών που υπηρετούσαν στα σχολεία αυτά –και όχι μόνο- ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους
- διερευνητικό διαθεματικό εκπαιδευτικό λογισμικό (αναπτύχθηκαν ή προσαρμόσθηκαν συνολικά 72 πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού - <http://edsoft.cti.gr> – διαφόρων μεγεθών και επιπέδου ωριμότητας, από κοινοπραξίες φορέων που συνδύαζαν τεχνική, παιδαγωγική και παραγωγική τεχνολογία (Πανεπιστήμια, Ερευνητικά Ινστιτούτα, Εταιρείες Πληροφορικής, Εκδότες).

Στην υλοποίηση της Οδύσσειας συμμετείχαν πάνω από 1000 επιστήμονες, παιδαγωγοί, μηχανικοί και διοικητικοί υπάλληλοι, οι οποίοι εργάστηκαν σε 57 πανεπιστημιακά τμήματα, 53 εταιρείες και 18 μουσεία, ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα.

Στο πλαίσιο της **ΚΙΡΚΗΣ** εξελληνίσθηκαν και προσαρμόσθηκαν συνολικά 22 προϊόντα εκπαιδευτικού λογισμικού τα οποία επιλέχθηκαν μέσα από δεκάδες καταξιωμένα προϊόντα της διεθνούς αγοράς (6 προϊόντα χρηματοδοτήθηκαν στο πλαίσιο του ΕΠΕΑΕΚ, Β'ΚΠΣ και άλλα 16 στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Κοινωνία της Πληροφορίας», Γ'ΚΠΣ). Τα πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού διατέθηκαν στα σχολεία μετά από αξιολόγηση του Γραφείου Πιστοποίησης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου ως προς την παιδαγωγική τους αρτιότητα και του ΕΑ.ΙΤΥ ως προς την τεχνολογική τους αρτιότητα. Η δημόσια χρηματοδότηση της προσαρμογής των υποέργων της ΚΙΡΚΗΣ εξασφαλίζει ότι η τιμή πώλησης του παρόντος λογισμικού στην Ελληνική αγορά δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη τιμή στη διεθνή αγορά.

Στο πλαίσιο του έργου «**ΠΛΕΙΑΔΕΣ**: Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Λογισμικού και Ολοκληρωμένων εκπαιδευτικών Πακέτων για τα Ελληνικά Σχολεία της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης & Διάθεση Προϊόντων Εκπαιδευτικού Λογισμικού στα Σχολεία» του ΕΑ.ΙΤΥ, που χρηματοδοτείται από το **Επιχειρησιακό Πρόγραμμα «Κοινωνία της Πληροφορίας» - Γ' ΚΠΣ**, εξασφαλίσθηκε η διάθεση του λογισμικού στο σύνολο των σχολείων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (προμήθεια αδειών χρήσης για 3.600 σχολικά εργαστήρια) καθώς και η άδεια χρήσης του από όλους τους Έλληνες εκπαιδευτικούς.

Περισσότερες πληροφορίες για το έργο **ΠΛΕΙΑΔΕΣ** είναι διαθέσιμες στη διεύθυνση <http://pleiades.cti.gr>.

 <h2>Κίρκη</h2> <p>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΙΕΘΝΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ</p> <p><b>Φορείς της Ενέργειας</b></p> <div></div>	 <p>ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΕΡΓΟ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΚΑΤΑ 75% ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ</p> <p><b>ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ</b></p> <p>ΓΡΑΦΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ</p> <p><b>ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ</b></p> <p><b>ΕΑ.ΙΤΥ</b></p> <p><b>ΠΛΕΙΑΔΕΣ</b></p>
--	---