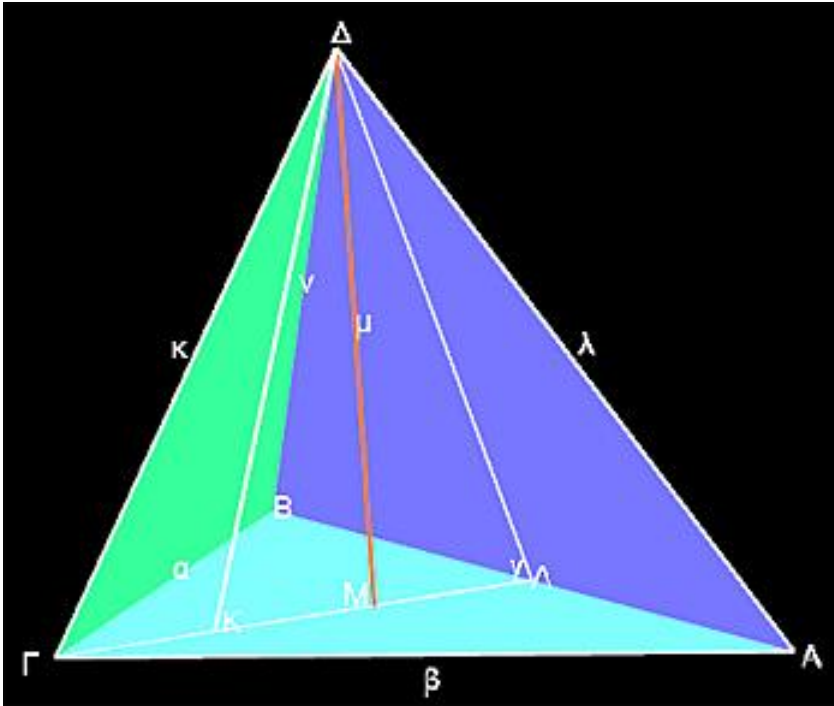


Άσκηση 2. Στο τετράπλευρο ΔΑΒΓ έχουμε φέρει τη διάμεσο ΔΜ=μ και θέτουμε ΔΒ=ν, ΔΓ=κ, ΔΑ=λ, ΑΒ=γ, ΑΓ=β, ΒΓ=α . Να δείξετε ότι για το μήκος μ της διαμέσου ΔΜ ισχύει:

$$9\mu^2 = 3(\kappa^2 + \lambda^2 + \nu^2) - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

Απόδειξη.



Η ΔΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΚΔΛ, άρα έχουμε: $4\mu^2 = 2\Delta\Lambda^2 + 2\Delta\kappa^2 - \kappa\lambda^2$ (1)

Η ΔΚ είναι διάμεσος στο ΓΔΜ, άρα έχουμε: $4\Delta\kappa^2 = 2\kappa^2 + 2\mu^2 - \Gamma\mathcal{M}^2$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με το 2, αντικαθιστούμε το $4\Delta\kappa^2$ που προκύπτει, το ΚΛ με το ΓΜ και έχουμε: $8\mu^2 = 4\Delta\Lambda^2 + 2\kappa^2 + 2\mu^2 - 3\Gamma\mathcal{M}^2$ ή $6\mu^2 = 4\Delta\Lambda^2 + 2\kappa^2 - 3\Gamma\mathcal{M}^2$ (3)

Η ΔΛ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΔΒΑ, άρα ισχύει: $4\Delta\Lambda^2 = 2\nu^2 + 2\lambda^2 - \gamma^2$ (4)

Είναι $\Gamma\mathcal{M} = \frac{2}{3}\Gamma\Lambda$ άρα $\Gamma\mathcal{M}^2 = \frac{4}{9}\Gamma\Lambda^2 = \frac{1}{9}(2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2)$ ή $9\Gamma\mathcal{M}^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$ (5)

Η (3) λόγω της (4) γίνεται: $6\mu^2 = 2\nu^2 + 2\lambda^2 - \gamma^2 + 2\kappa^2 - 3\Gamma\mathcal{M}^2$ πολλαπλασιάζουμε με το 3 και αντικαθιστούμε λόγω της (5) και έχουμε:

$$18\mu^2 = 6\nu^2 + 6\lambda^2 - 3\gamma^2 + 6\kappa^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \gamma^2 \quad \text{ή}$$

$$18\mu^2 = 6\nu^2 + 6\lambda^2 + 6\kappa^2 - 2\gamma^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 \quad \text{ή}$$

$$9\mu^2 = 3(\kappa^2 + \lambda^2 + \nu^2) - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$