

Ομάδα Γ: Δευτεροβάθμιες Συναρτήσεις

9. Ο Πύραυλος

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Ο Πύραυλος είναι μια δραστηριότητα που δίνει στους μαθητές την ευκαιρία: α) να αντιστοιχίσουν τους τύπους της Φυσικής, που χρησιμοποιούνται στην ελεύθερη βολή, με συναρτήσεις που πραγματεύονται στα Μαθηματικά β) να αντιληφθούν ότι η μελέτη της τροχιάς και της ταχύτητας ενός σώματος σε ελεύθερη βολή γίνεται με τη βοήθεια των αντίστοιχων συναρτήσεων της μορφής $y=ax^2+bx+c$ και της $y=ax+b$ και γ) μέσα από τη μελέτη αυτή να αποφανθούν για τον τρόπο μεταβολής των τιμών των συναρτήσεων αυτών, καθώς και για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους στη συγκεκριμένη κατάσταση.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η δραστηριότητα μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Α' Λυκείου και συγκεκριμένα στη διδασκαλία της συνάρτησης $y=ax^2+bx+c$, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί στη Φυσική την ελεύθερη βολή.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

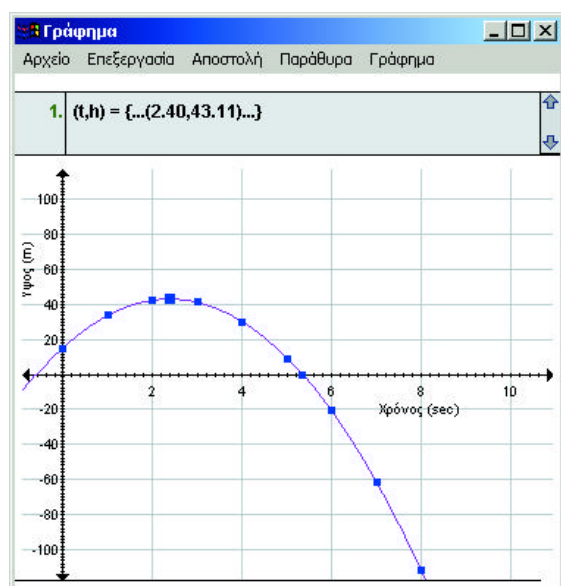
Οι μαθητές:

- > Να μπορούν να αντιστοιχίσουν τους όρους των τύπων της ελεύθερης βολής με αυτούς των αντίστοιχων μαθηματικών συναρτήσεων.
- > Να μπορούν να αποφανθούν για τον τρόπο μεταβολής των τιμών των συναρτήσεων $y=ax^2+bx+c$ και $y=ax+b$ μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τους (τύπος, πίνακας τιμών, γράφημα).
- > Να αποφανθούν για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές των συναρτήσεων αυτών, καθώς και για το πότε συμβαίνουν.
- > Να κατανοήσουν την αναγκαιότητα περιορισμού του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων αυτών στη συγκεκριμένη κατάσταση.

Παρατηρήσεις

1. Για τη δραστηριότητα αυτή προτείνεται η συνεργασία, εφόσον είναι δυνατή, με τον καθηγητή της Φυσικής, ώστε να υπάρξει μια πλήρης κάλυψη του θέματος. Καλό θα ήταν οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν το φαινόμενο και από την πλευρά της Φυσικής με το λογισμικό Modelus.
2. Στο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι τύποι της ελεύθερης βολής:
 - α) $h=h_0+v_0 t-1/2gt^2$, όπου h το ύψος του πυραύλου από το έδαφος κατά τη χρονική στιγμή t , v_0 η αρχική ταχύτητα του πυραύλου και g η επιτάχυνση της βαρύτητας ($g=9.81m/sec^2$).
 - β) $v=v_0-gt$, όπου v η ταχύτητα του πυραύλου κατά τη χρονική στιγμή t και v_0 η αρχική του ταχύτητα.

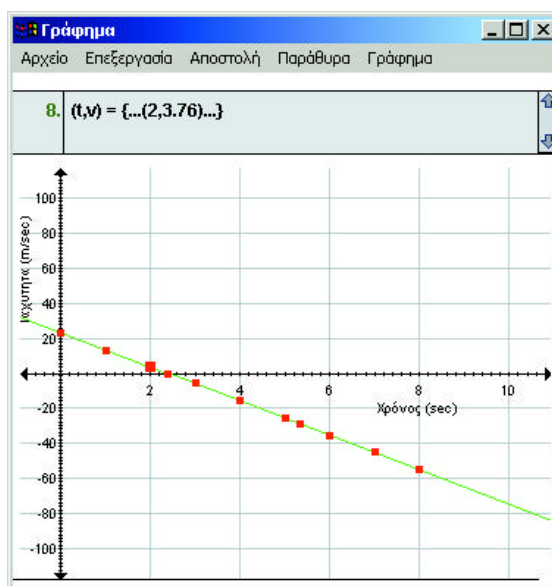
3. Προτείνεται να γίνει αρχικά μια συζήτηση μέσα στην τάξη για τους νόμους που διέπουν την ελεύθερη βολή, ή σε συνεννόηση με τον καθηγητή της Φυσικής, αυτό να έχει γίνει στην ώρα της Φυσικής.
4. Στα ερωτήματα 1 και 6 να δοθεί έμφαση στην αντιστοίχιση των όρων της $y=ax^2+bx+c$ με τους όρους του τύπου $h=h_0+v_0 t-1/2gt^2$ (π.χ. $h_0=c$, $x=t$, $v_0=b$ κτλ.) και της $y=ax+b$ με τους όρους της $v=v_0-gt$.
5. Για την απάντηση του ερωτήματος 3, αρκεί οι μαθητές να εντοπίσουν ανάμεσα σε ποιες ακέραιες χρονικές στιγμές συμβαίνουν τα (α) και (β). Για το (α): ανάμεσα στο $t=2$ και $t=3$ και για το (β): ανάμεσα στο $t=5$ και $t=6$ (βλέπε εικόνα 1). Θα ήταν επίσης σκόπιμο να ζητηθεί από τους μαθητές να εξηγήσουν τι δείχνει το αρνητικό πρόσημο σε κάποιες τιμές στη στήλη του ύψους.
6. Για την απάντηση της ερώτησης 4 θα ήταν σκόπιμο οι μαθητές να ενθαρρυνθούν να χρησιμοποιήσουν την εντολή 'Ενδιάμεσο γέμισμα' από το μενού 'Πίνακας', ώστε να προσεγγίσουν σταδιακά τις απαντήσεις των ερωτήσεων (4α) και (4β). (Οι τιμές που προσεγγίζουν τις απαντήσεις φαίνονται στο παράθυρο 'Πίνακας' στην εικόνα 2.)
7. Στο ερώτημα 5 προτείνεται να ζητηθεί η ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Το ίδιο ισχύει και για το ερώτημα 7.
8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος 7 θα ήταν προτιμότερο να γίνει σε διαφορετικό γράφημα (όπως φαίνεται και στην εικόνα 3). Επίσης, προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να αιτιολογήσουν το αρνητικό πρόσημο που εμφανίζεται σε ορισμένες τιμές της ταχύτητας (εικόνα 4).
9. Η μέγιστη θετική ταχύτητα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t=0$ και $v=23,38$ m/s, ενώ η μέγιστη αρνητική κατά την πρόσκρουση του πυραύλου στο έδαφος και είναι $v=5,35$ m/s.



εικόνα 1

t	h=15.24+23.384*t-0.5*9.81*t^2
χρόνος (sec)	ύψος (m)
0	15.24
1	33.719
2	42.388
2.4	43.109
2.4	43.108
3	41.247
4	30.296
5	9.535
5.35	0.0090
5.35	-0.02
6	-21.036
7	-61.417
8	-111.608

εικόνα 2



εικόνα 3

Πίνακας			
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας			
t	$h=15.24+23.384*t-0.5*9.81*t^2$		$v=23.384-9.81*t$
χρόνος (sec)	ύψος (m)	Ταχύτητα (m/s)	
0	15.24	23.38	
1	33.719	13.57	
2	42.388	3.76	
2.4	43.109	-0.17	
2.4	43.108	-0.18	
3	41.247	-6.05	
4	30.296	-15.86	
5	9.535	-25.67	
5.35	0.0090	-29.08	
5.35	-0.02	-29.09	
6	-21.036	-35.48	
7	-61.417	-45.29	
8	-111.608	-55.1	

εικόνα 4

10. Στην απόσταση $h=30,48$ m αντιστοιχούν 2 χρονικές στιγμές, μια κατά την άνοδο του πυραύλου και μια κατά την κάθοδό του : $t=0,779$ sec και $t=3,989$ sec. Το μέτρο της ταχύτητας και για τις δύο χρονικές στιγμές είναι $v=15,74$ m/s.

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων του φύλλου εργασίας έχουν ενσωματωθεί στις προηγούμενες παρατηρήσεις.)

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Ένας πρότυπος πύραυλος εκτοξεύεται από τη Γη. Τη στιγμή που σταματάει να καίει καύσιμα απέχει 15,24 m από το έδαφος και η ταχύτητά του είναι 23,384 m/sec με κατακόρυφη προς τα πάνω διεύθυνση. Εξακολουθεί να κινείται με αυτή τη διεύθυνση και στη συνέχεια, λόγω της δράσης της βαρύτητας, στρίβει και πέφτει στο έδαφος. Να χρησιμοποιήσεις το Function Probe για να μελετήσεις

τη σχέση ανάμεσα στο ύψος του πυραύλου και το χρόνο, θεωρώντας ως αρχικό ύψος και αρχικό χρόνο το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο, καθώς και τη σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα του πυραύλου και το χρόνο.

1. Χρησιμοποίησε τις γνώσεις σου για τη δράση της βαρύτητας, για να γράψεις έναν τύπο που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στο ύψος (σε μέτρα) και το χρόνο (σε δευτερόλεπτα). Να θεωρήσεις ως χρόνο μηδέν το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο. Σε ποια γενική κατηγορία συναρτήσεων ανήκει ο τύπος που έγραψες; Κάνε την αντιστοίχιση των όρων του τύπου που σου δίνει το ύψος, με τους όρους του τύπου της συνάρτησης.
2. Να κατασκευάσεις έναν πίνακα στο Function Probe χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για να γράψεις τις τιμές του ύψους που έχει ο πύραυλος για χρόνο από $t=0$ ως $t=8$.
3. Να χρησιμοποιήσεις τον πίνακα που έφτιαξες, για να απαντήσεις τις ακόλουθες ερωτήσεις:
 - α) σε ποια, κατά προσέγγιση, χρονική στιγμή θα έχει ο πύραυλος αποκτήσει το μέγιστο ύψος του;
 - β) σε ποια, πάλι κατά προσέγγιση, χρονική στιγμή θα προσκρούσει στο έδαφος;
4. Να εξηγήσεις πώς μπορείς να τροποποιήσεις τον πίνακά σου, ώστε να λάβεις ακριβείς απαντήσεις για τα προηγούμενα δύο ερωτήματα. Να δώσεις την απάντηση με ακρίβεια χιλιοστού του δευτερολέπτου. Μπορείς να ρυθμίσεις τα δεκαδικά ψηφία μιας στήλης από το παράθυρο διαλόγου 'Ρυθμίζεις στήλης' στο μενού 'Πίνακας'.
 - α) σε ποια χρονική στιγμή θα έχει ο πύραυλος αποκτήσει το μέγιστο ύψος του;
 - β) σε ποια χρονική στιγμή θα προσκρούσει στο έδαφος;
5. Να κατασκευάσεις τη γραφική παράσταση της σχέσης ανάμεσα στο ύψος και το χρόνο και να εξηγήσεις με ποιόν τρόπο το έκανες (εισάγοντας έναν τύπο, στέλνοντας σημεία, κτλ.). Επιβεβαιώνονται από το διάγραμμά σου οι απαντήσεις που έδωσες για τη χρονική στιγμή που παρατηρείται το μέγιστο ύψος και η πρόσκρουση στο έδαφος;
6. Να γράψεις έναν τύπο που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο) και το χρόνο (σε δευτερόλεπτα). Να θεωρήσεις ως χρόνο μηδέν το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο. Σε ποια γενική κατηγορία συναρτήσεων ανήκει ο τύπος που έγραψες; Κάνε την αντιστοίχιση των όρων του τύπου που σου δίνει το ύψος, με τους όρους του τύπου της συνάρτησης.
7. Να γράψεις στο παράθυρο 'Πίνακας' τον τύπο μιας συνάρτησης που να εκφράζει την ταχύτητα του πυραύλου σε συνάρτηση με το χρόνο και κατόπιν να κατασκευάσεις τη γραφική της παράσταση. Να την κατασκευάσεις σε ένα ξεχωριστό παράθυρο 'Γράφημα' επιλέγοντας την εντολή 'Προσθήκη παραθύρου Γραφήματος' από το μενού 'Παράθυρα'.
8. Σε ποια χρονική στιγμή θα αποκτήσει ο πύραυλος τη μέγιστη θετική ταχύτητα και ποια θα είναι η τιμή της;
9. Σε ποια χρονική στιγμή θα αποκτήσει ο πύραυλος τη μέγιστη αρνητική ταχύτητα και ποια θα είναι η τιμή της;
10. Να ορίσεις την ταχύτητα του πυραύλου, όταν το ύψος του είναι 30,48 m από το έδαφος.
11. Στη γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο υπάρχει σημείο τομής της καμπύλης με τον οριζόντιο άξονα (άξονας των χρόνων); Αν υπάρχει, να εξηγήσεις τη σημασία του σημείου τομής. Αν δεν υπάρχει, να εξηγήσεις γιατί δεν υπάρχει.