

Το κόστος Βαφής

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Το κόστος βαφής είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα μελετήσουν τη συμμεταβολή δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών.

Στους μαθητές θα δοθεί ένα πρόβλημα, το σενάριο του οποίου προβλέπει ότι η αμοιβή για μια εργασία ελαιοχρωματισμού ενός χώρου είναι προκαθορισμένη. Αυτό σημαίνει ότι, ανεξάρτητα από τον αριθμό x των ωρών εργασίας, το γινόμενο $x \cdot y$ (y η ωριαία αμοιβή) παραμένει σταθερό, επομένως η γραφική παράσταση της σχέσης

που τα συνδέει είναι ένας κλάδος υπερβολής με ασύμπτωτες τους άξονες x' και y' και εξίσωση $y = \frac{a}{x}$. Η

γραφική παράσταση και ο πίνακας τιμών θα επιτρέψουν στους μαθητές να γνωρίσουν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης των ιδιοτήτων μιας περιττής συνάρτησης.

Το πρόβλημα περιορίζει τη μελέτη της υπερβολής μόνο σε θετικές τιμές για το x , οπότε στο τέλος οι μαθητές

θα κληθούν να μελετήσουν τη συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ όχι πλέον ως το μαθηματικό μοντέλο του συγκεκριμένου προβλήματος αλλά ως συνάρτηση.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Συναρτήσεις.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 2.5 (η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$).

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να μάθουν οι μαθητές ότι τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά δίνουν γραφικές παραστάσεις οι οποίες είναι υπερβολές με ασύμπτωτες τους άξονες x' και y' .
2. Να προσεγγίσουν την έννοια της περιττής συνάρτησης.
3. Να αποκτήσουν μια εικόνα των εννοιών «οριζόντια ασύμπτωτη» και «κατακόρυφη ασύμπτωτη».



Όταν ένας τεχνίτης αναλαμβάνει μία εργασία, τότε υπάρχουν δύο τρόποι αμοιβής του: να πληρωθεί με ένα ποσό για το συνολικό κόστος της εργασίας του (ανεξάρτητα των ωρών που θα εργαστεί) ή να πληρωθεί ανάλογα με τις ώρες εργασίας του.

Ένας τεχνίτης για τη βαφή ενός χώρου Α ζητά 500 ευρώ για το σύνολο της εργασίας του. Προτείνουν όμως στον τεχνίτη και μια άλλη εργασία Β, με αμοιβή 2600 ευρώ, αλλά ο τεχνίτης γνωρίζει ότι για τη δεύτερη εργασία απαιτούνται τόσες ώρες εργασίας, όσες το τετράγωνο των ωρών που απαιτούνται για την πρώτη. Ποια από τις δύο εργασίες θα προτεινάτε να αναλάβει ο τεχνίτης με δεδομένο ότι δεν μπορεί να αναλάβει και τις δύο και ότι, όταν θα τελειώσει την εργασία του, θα αναλαμβάνει αμέσως μετά όμοιες εργασίες;

- 1 Αν y είναι η αμοιβή του τεχνίτη ανά ώρα και x οι απαιτούμενες ώρες, ποια σχέση συνδέει τα ποσά x και y στην εργασία Α και ποια στην εργασία Β;
- 2 Καλό θα είναι τώρα, που έχουμε εκφράσει με μαθηματικές σχέσεις τους τρόπους αμοιβής του τεχνίτη για τις εργασίες Α και Β, να μελετήσουμε τις σχέσεις αυτές πρώτα με τον πίνακα τιμών. Αν η πρώτη στήλη περιέχει τις τιμές της μεταβλητής x , με τι τιμές θα γεμίσουμε τη στήλη αυτή; Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της πρώτης στήλης, θα πρέπει να συμπληρώσουμε τις στήλες για την εργασία Α και την εργασία Β.
- 3 Ποια συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε παρατηρώντας τις τρεις στήλες του πίνακα τιμών; Υπάρχει κάποια ένδειξη για το ποια εργασία θα πρέπει να επιλέξει;
- 4 Ας μελετήσουμε τώρα και γραφικά τις δύο εργασίες αποστέλλοντας τα ζεύγη τιμών (x, y) για την εργασία Α και (x, z) για την εργασία Β, στους άξονες του πίνακα “Γράφημα”, και ενώνοντας τα σημεία. Μπορείτε να αναγνωρίσετε την ίδια ένδειξη, για το ποια εργασία συμφέρει, που είχατε από την προηγούμενη ερώτηση και στη γραφική απεικόνιση των σημείων; Τελικά, ποια από τις δύο εργασίες συμφέρει να αναλάβει ο τεχνίτης;
- 5 Ας εξετάσουμε τώρα τη σχέση για την εργασία Α από καθαρά μαθηματική άποψη. Αυτό θα μπορούσε να γίνει αν στη στήλη των τιμών της μεταβλητής x συμπληρώσουμε και τις αντίθετες τιμές των ήδη υπάρχουσών. Πώς διαμορφώνονται τώρα οι τιμές στη στήλη της μεταβλητής y ; Αν τη σχέση αυτή τη θεωρούσαμε ως συνάρτηση $f(x)$, ποια είναι η σχέση της με την $f(-x)$;
- 6 Αν αποστείλουμε τα νέα ζεύγη που δημιουργήθηκαν από τις αρνητικές τιμές για το x στους άξονες, ποια σχέση θα έχουν με τα ήδη υπάρχοντα σημεία; Πώς δικαιολογείται αυτή η σχέση;
- 7 Το λογισμικό έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Ποια είναι η θέση της γραφικής παράστασης ως προς τους άξονες; Αν κάποιος υποστηρίξει ότι η γραφική παράσταση θα κόψει τους δύο άξονες σε σημεία τα οποία δε φαίνονται στην οθόνη, τι θα του απαντούσατε;

✓ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ένα σύνολο σημείων, των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν τη σχέση $y = f(x)$. Καλό θα είναι να επισημανθεί από το διδάσκοντα ότι μέχρι στιγμής δύο είναι οι μορφές συναρτήσεων τις οποίες έχουν μελετήσει οι μαθητές: η $y = ax + \beta$ (ευθεία) και η $y = ax^2 + bx + \gamma$ (παραβολή).

- I. Ο διδάσκων, στην αρχή της δραστηριότητας, συζητά με τους μαθητές για τους τρόπους πληρωμής ενός τεχνίτη. Οι δύο τρόποι είναι: α) με την ώρα, β) με αποκοπή, δηλαδή με καθορισμό της συνολικής αμοιβής για όλη την εργασία. Ακόμη, συζητά για το ωράριο εργασίας ενός μέσου εργαζόμενου. Αυτό είναι σημαντικό για τη συνέχεια της δραστηριότητας, αφού οι μαθητές θα πρέπει να διακρίνουν περιπτώσεις για τις ώρες εργασίας ενός τεχνίτη.
- II. Στην ερώτηση 1, οι μαθητές θα πρέπει αρχικά να σημειώσουν τις σχέσεις $y \cdot x = 500$ και $y \cdot x^2 = 2600$, από τις οποίες θα καταλήξουν στις $y = \frac{500}{x}$ και $y = \frac{2600}{x^2}$.
- III. Στην ερώτηση 2, καταρχήν, θα πρέπει να γίνει διαπραγμάτευση για το πλήθος και το εύρος των τιμών, με δεδομένο ότι πρόκειται για ώρες εργασίας.
Η πρώτη στήλη θα συμπληρωθεί με τη βοήθεια της εντολής “Γέμισμα” από το μενού “Πίνακας”.



Οι μαθητές ονομάζουν τη μεταβλητή της πρώτης στήλης x και με την εντολή “Γέμισμα” από το μενού “Πίνακας” συμπληρώνουν τη στήλη (εικόνα 1).

Εικόνα 1.



Η δεύτερη και η τρίτη στήλη θα συμπληρωθούν με τη βοήθεια των τύπων που αντιστοιχούν στην εργασία Α και στην εργασία Β (εικόνα 2).

x	y=500/x	z=2600/(x^2)
ώρες	ευρώ/ώρα	ευρώ/ώρα
1	500	2600
1.5	333.33	1155.56
2	250	650
2.5	200	416
3	166.67	288.89
3.5	142.86	212.24
4	125	162.5
4.5	111.11	128.4
5	100	104
5.5	90.91	85.95
6	83.33	72.22
6.5	76.92	61.54
7	71.43	53.06
7.5	66.67	46.22
8	62.5	40.63
8.5	58.82	35.99
9	55.56	32.1
9.5	52.63	28.81
10	50	26

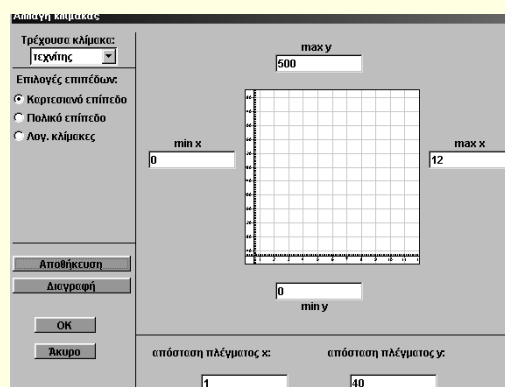
Εικόνα 2.

- IV.** Στην ερώτηση 3, οι μαθητές θα παρατηρήσουν τις στήλες του πίνακα τιμών και θα διαπιστώσουν ότι: αν ο τεχνίτης εργάζεται λιγότερο από 5,5 ώρες την ημέρα, θα πρέπει να προτιμήσει την εργασία B, αν εργάζεται περισσότερο από 5,5 ώρες την ημέρα, τότε θα πρέπει να προτιμήσει την εργασία A. Εδώ καλό θα είναι να γίνει συζήτηση στην τάξη για την ανάγκη να γίνει αναγωγή της αμοιβής του τεχνίτη για κάθε ώρα εργασίας, ώστε να υπάρχει ένα κοινό μέτρο σύγκρισης των εργασιών A και B.
- V.** Στην ερώτηση 4, οι μαθητές καταρχήν θα επιλέξουν, μετά από διαπραγμάτευση, κατάλληλη κλίμακα.



Καλό θα είναι, κατά την επιλογή της κλίμακας, τα διαστήματα πάνω στους δύο άξονες να έχουν ίσα μήκη ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.

Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής “Αλλαγή κλίμακας” από το μενού “Γράφημα” (εικόνα 3).



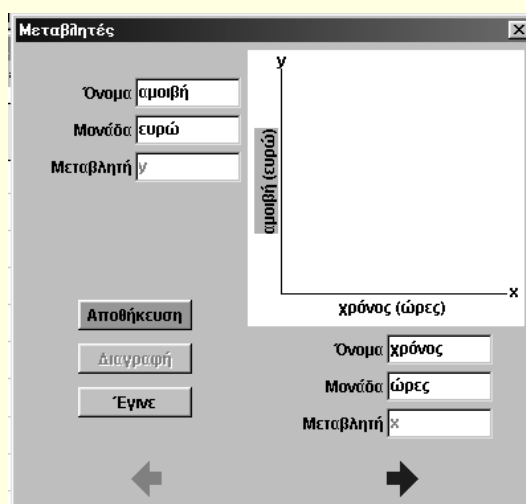
Εικόνα 3.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα.



Πριν στείλουν οι μαθητές τα ζεύγη τιμών στους άξονες, καλό θα είναι να ονομάσουν τις μεταβλητές.

Η διαδικασία αυτή γίνεται μέσω της εντολής “Μεταβλητές” από το μενού “Γράφημα” (εικόνα 4).



Εικόνα 4.

Στη συνέχεια, θα αποστείλουν τα σημεία από τον πίνακα τιμών στο γράφημα μέσω της εντολής “Σημεία σε γράφημα” από το μενού “Αποστολή”.

Στη συνέχεια, θα συνδέσουν τα σημεία μέσω της εντολής “Σύνδεση σημείων” από το μενού “Γράφημα”.

Οι δυο γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματα στα οποία είχαν φτάσει οι μαθητές μέσω της μελέτης του πίνακα τιμών (εικόνα 5).

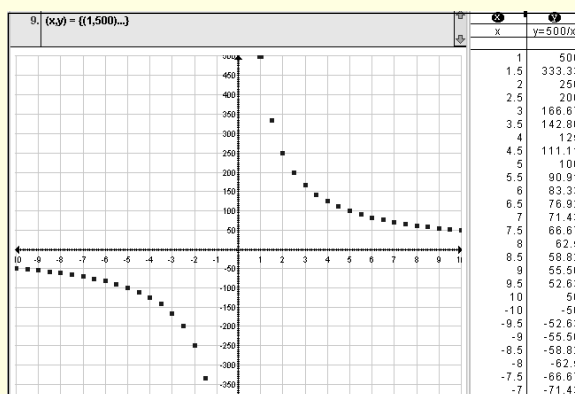


Εικόνα 5.

VI. Στις ερωτήσεις 5 και 6, οι μαθητές ουσιαστικά θα μελετήσουν τη συνάρτηση $y = \frac{500}{x}$ στο σύνολο

$\mathbb{R} - \{0\}$. Καταρχήν, οι μαθητές θα πρέπει να διαπιστώσουν ότι, αν συμπληρώσουν στις ήδη υπάρχουσες θετικές τιμές για το x και τις αντίθετές τους, τότε θα προκύψουν στον πίνακα αντίθετες τιμές για το y .

Αν τώρα τα σημεία αποσταλούν στο γράφημα, τα νέα σημεία θα εμφανιστούν συμμετρικά με τα ήδη υπάρχοντα (εικόνα 6). Οι μαθητές έχουν πλέον τη δυνατότητα να διατυπώσουν τη βασική ιδιότητα των περιπτώσεων συναρτήσεων $f(-x) = -f(x)$.

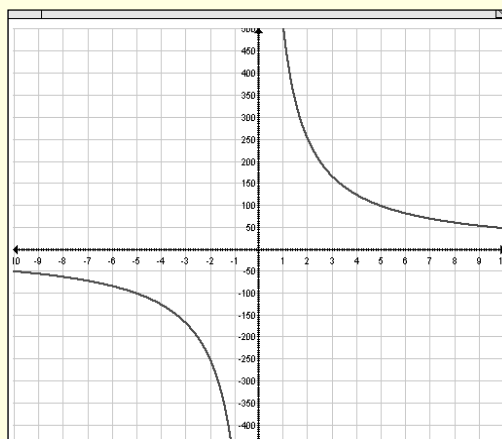


Εικόνα 6.

VII. Στην ερώτηση 7, οι μαθητές θα καθαρίσουν το χώρο εργασίας από τα σημεία των προηγούμενων ερωτημάτων και μέσω της εντολής “Νέος τύπος” από το μενού “Γράφημα” κατασκευάζουν τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{500}{x}$.

Με βάση τη γραφική παράσταση αλλά και την ιδιότητα των κλασμάτων να ελαττώνεται η τιμή τους όσο αυξάνεται ο παρονομαστής, οι μαθητές θα προσεγγίσουν την έννοια της οριζόντιας ασύμπτωτης για τον άξονα x . Η ιδιότητα να αυξάνεται η τιμή του κλάσματος (με θετικούς όρους) όταν ελαττώνεται ο παρονομαστής, σε συνδυασμό με τη γραφική παράσταση, θα οδηγήσει τους μαθητές στην έννοια της κατακόρυφης ασύμπτωτης για τον άξονα y .



Εικόνα 7.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2}{x-1}$ και $g(x) = \frac{2}{x} - 1$.

Ερώτηση 1η (7 μονάδες)

Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων με τη βοήθεια του λογισμικού. Είναι οι δύο συναρτήσεις περιττές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με βάση τις γραφικές παραστάσεις.

Ερώτηση 2η (6 μονάδες)

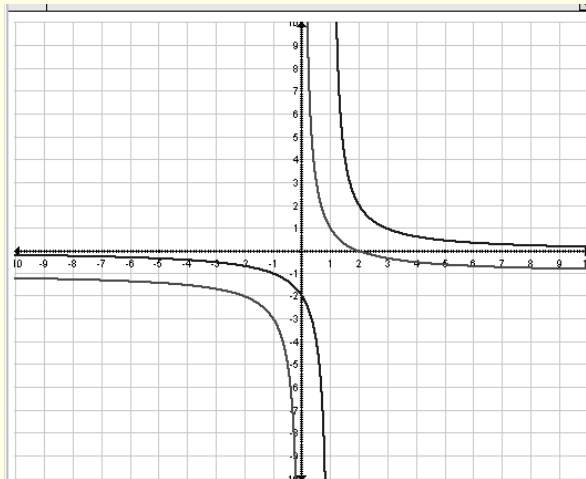
Έχουν ασύμπτωτες οι δύο γραφικές παραστάσεις; Μέσω της εντολής “Αλλαγή κλίμακας”, να επιλέξετε κατάλληλη απόσταση πλέγματος για το x και το y ώστε να είναι εμφανείς οι ασύμπτωτες.

Ερώτηση 3η (7 μονάδες)

Με βάση την απάντησή σας στην ερώτηση β), να εξετάσετε αν η εξίσωση $\frac{2}{x-1} = \frac{2}{x} - 1$ έχει λύση.

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

- E₁)** Οι γραφικές παραστάσεις δεν έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, άρα οι συναρτήσεις δεν είναι περιττές.



- E₂)** Αν επιλέξουμε απόσταση πλέγματος 1 ή κάποια υποδιαίρεση, π.χ. 0,5, 0,2, τότε θα είναι προφανείς οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων.
- E₃)** Οι ασύμπτωτες της μιας γραφικής παράστασης είναι παράλληλες προς τις ασύμπτωτες της άλλης, άρα οι γραφικές παραστάσεις δεν τέμνονται. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ δεν έχει λύση.