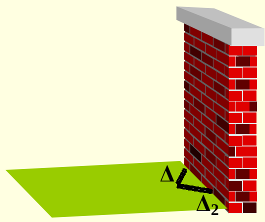
Μέγιστο εμβαδόν τριγώνου

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Το μέγιστο εμβαδόν είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα ανακαλύψουν τη σχέση η οποία συνδέει μια γωνία ενός τριγώνου με το εμβαδόν του.

Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν σταθερό μήκος, τότε το εμβαδόν του εξαρτάται από το άνοιγμα της γωνίας που περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών. Ο τύπος που μας δίνει το εμβαδόν τριγώνου σε σχέση με μία γωνία του είναι $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$, όπου β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Από τον τύπο προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν, με την προϋπόθεση ότι τα μήκη β και γ παραμένουν σταθερά, είναι $\frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$ αφού $-1 \leq \eta\mu A \leq 1$. Οι μαθητές θα προσεγγίσουν τον τύπο αυτό στην προσπάθεια να λύσουν ένα πραγματικό πρόβλημα, το οποίο ζητά να εντοπίσουν τη θέση δύο δοκών ώστε να περιορίζουν τη μέγιστη δυνατή επιφάνεια.



Στην αρχή, θα χρησιμοποιήσουν το Sketchpad, ώστε να αναπαραστήσουν το πρόβλημα σε ένα γεωμετρικό περιβάλλον, θα κατασκευάσουν ένα τρίγωνο του οποίου οι δύο πλευρές θα έχουν σταθερό μήκος και θα καταγράψουν μετρήσεις της μεταξύ τους γωνίας και του εμβαδού. Οι μετρήσεις, στη συνέχεια, θα περαστούν στον πίνακα τιμών του Function Probe και από εκεί στον πίνακα “Γράφημα”, ώστε να διαπιστωθεί ότι η σχέση είναι ημιτονοειδής.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Β΄ Λυκείου.
- Γνωστικό αντικείμενο: Εμβαδόν τριγώνου.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 10.2.

Εργαλεία λογισμικού:

Sketchpad.

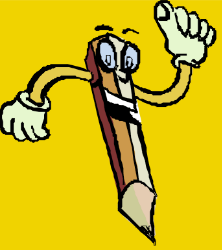
Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

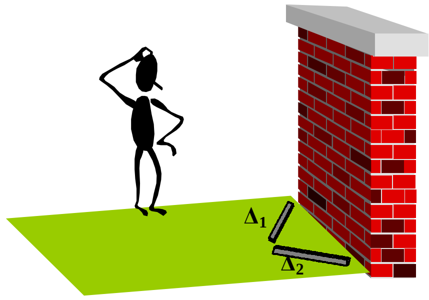
2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Οι μαθητές θα μάθουν να αναγνωρίζουν από ένα γνωστό γράφημα κάποια μαθηματική σχέση, την οποία θα προσεγγίσουν διαισθητικά.
2. Οι μαθητές θα ανακαλύψουν τον τύπο που συνδέει το εμβαδόν με τις γωνίες του τριγώνου.
3. Οι μαθητές θα εφαρμόσουν τη σχέση που ανακάλυψαν για να απαντήσουν σε ένα πρόβλημα μέγιστης επιφάνειας.



Ο άνθρωπος στην εικόνα αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα. Θέλει να τοποθετήσει πάνω στο χλοοτάπητα τις δύο δοκούς $Δ_1$ *και* $Δ_2$ *με τέτοιο τρόπο, ώστε να περιορίσει όσο το δυνατόν περισσότερη επιφάνεια πάνω στο χλοοτάπητα.*



Ο στόχος μας είναι όχι απλά να βοηθήσουμε τον άνθρωπο, αλλά και να τον πείσουμε ότι αυτό το οποίο τού προτείνουμε είναι το σωστό.

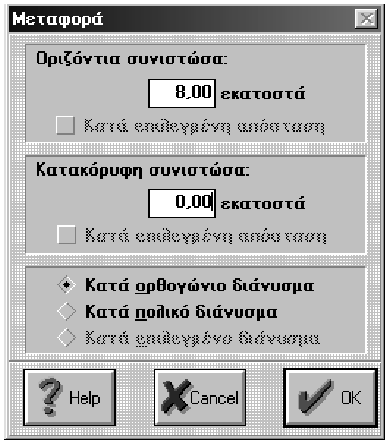
Τα δύο βασικά εργαλεία που διαθέτουμε είναι το Sketchpad και το Function Probe.

1 Να ανοίξετε το Sketchpad και να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο του οποίου οι δύο πλευρές έχουν σταθερό μήκος. Η κατασκευή θα γίνει ως εξής:

α) Να πάρετε ένα σημείο Α και από το μενού “Μετασχηματισμός” να επιλέξετε “Μεταφορά”.

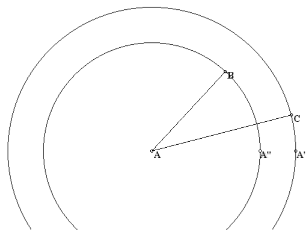
Στην οριζόντια συνιστώσα να γράψετε 8, ενώ στην κατακόρυφη να γράψετε 0, όπως φαίνεται στην εικόνα. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για 6 cm (εικόνα 1).

Τώρα στην οθόνη υπάρχουν τρία σημεία: το Α, το Α΄ και το Α΄΄.



Εικόνα 1.

β) Από το μενού “Κατασκευή” επιλέξτε “Κύκλος βάσει κέντρου και σημείου” και κατασκευάστε δύο κύκλους με το ίδιο κέντρο Α και ακτίνες ΑΑ΄και ΑΑ΄΄ αντίστοιχα (κάθε φορά θα έχετε επιλέξει πρώτα το κέντρο Α και μετά, με πατημένο shift, το άλλο σημείο). Τώρα, πάνω σε κάθε κύκλο, επιλέξτε από ένα σημείο και ενώστε καθένα από αυτά με το Α (εικόνα 2).



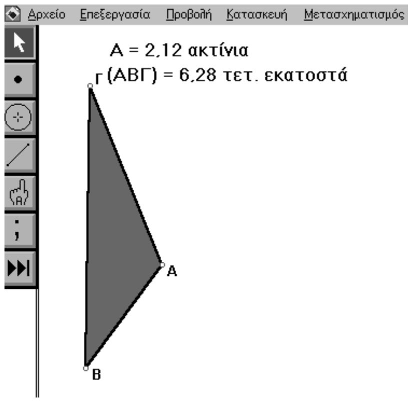
Εικόνα 2.

γ) Επιλέξτε τους δύο κύκλους και τα σημεία Α΄ και Α΄΄ και από το μενού “Προβολή” επιλέξτε “Απόκρυψη αντικείμενα”. Τέλος, ενώστε τα ελεύθερα άκρα των δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Τώρα έχετε ένα τρίγωνο με δύο πλευρές σταθερού μήκους και μεταβαλλόμενη γωνία.

2 Καταγράψτε τις διάφορες τιμές του εμβαδού του τριγώνου, καθώς μεταβάλλεται η γωνία Α, ως εξής:

α) Επιλέξτε τις τρεις κορυφές του τριγώνου και από το μενού “Κατασκευή” επιλέξτε “Εσωτερικό”. Στη συνέχεια, κρατώντας επιλεγμένο το εσωτερικό του τριγώνου, από το μενού “Μέτρηση” επιλέξτε “Εμβαδόν”, οπότε εμφανίζεται η μέτρηση του εμβαδού. Κατόπιν, μετρήστε τη γωνία Α (εικόνα 3).

β) Μετακινήστε με τον κέρσορα την κορυφή Β και καταγράψτε τις τιμές τόσο του εμβαδού όσο και της γωνίας Α. Να καταγράψετε 20 μετρήσεις.



Εικόνα 3.

3 Να ανοίξετε το λογισμικό Function Probe, στην πρώτη στήλη του πίνακα να καταγράψετε τις τιμές της γωνίας και στη στήλη των y να καταγράψετε τις τιμές του εμβαδού. Υπάρχει κάτι το αξιοπρόσεκτο στις τιμές του εμβαδού;

4 Από το μενού “Αποστολή” να επιλέξετε “Σημεία σε γράφημα”. Τα ζεύγη των τιμών από τον πίνακα έχουν αναπαρασταθεί με σημεία. Υπάρχει, κατά τη γνώμη σας, κάποια μαθηματική σχέση η οποία συνδέει τη γωνία με το εμβαδόν του τριγώνου και προκύπτει από τη διάταξη των σημείων;

5 Να παρατηρήσετε το σημείο στο οποίο παρουσιάζεται μέγιστο. Ποια είναι η μέγιστη τιμή; Ποια γωνία (σε μοίρες) αντιστοιχεί στο σημείο αυτό; Ποια συνάρτηση παρουσιάζει στο ίδιο σημείο μέγιστη τιμή;

6 Στο προηγούμενο ερώτημα έχετε κάνει μια εικασία για το ποια σχέση συνδέει τη γωνία με το εμβαδόν. Να επιβεβαιώσετε την εικασία σας με τη βοήθεια του λογισμικού.

7 Πώς συνδέεται τελικά η μεταβολή μιας γωνίας του τριγώνου με το εμβαδόν του (όταν οι πλευρές που περιέχουν τη γωνία έχουν σταθερό μήκος); Να γράψετε έναν τύπο ο οποίος να εκφράζει την παραπάνω σχέση. Τελικά, πώς θα πρέπει να τοποθετήσει τις δύο δοκούς ο άνθρωπος ώστε να επιτύχει τη μέγιστη επιφάνεια;

✔ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

I. Στην αρχή της δραστηριότητας, ο διδάσκων συζητά με τους μαθητές για τον τρόπο με τον οποίο θα παρασταθεί το πρόβλημα σε ένα γεωμετρικό σχήμα. Οι δύο δοκοί έχουν σταθερό μήκος, άρα το μοναδικό μέγεθος στο σχήμα που μπορεί να μεταβάλλεται είναι η γωνία.

Η συζήτηση αυτή θα αποτελέσει μια βάση για την κατανόηση της κατασκευής, η οποία θα γίνει με το Sketchpad. Στην κατασκευή αυτή, οι δύο πλευρές του τριγώνου είναι ακτίνες δύο σταθερών κύκλων, άρα έχουν σταθερό μήκος.

II. Στην ερώτηση 2, καλό θα ήταν οι μετρήσεις να γίνουν για γωνίες οι οποίες είναι παραπληρωματικές, ώστε στη συνέχεια τα αντίστοιχα ζεύγη να αποτελέσουν ισχυρές ενδείξεις για την ημιτονοειδή μεταβολή του εμβαδού.

III. Στην ερώτηση 3, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εντοπίσουν ότι οι τιμές για το εμβαδόν παρουσιάζουν ένα μέγιστο σε γωνία που αντιστοιχεί στις 90° και ότι για παραπληρωματικές γωνίες τα εμβαδά είναι ίσα.

Η παραπληρωματικότητα των γωνιών αναγνωρίζεται από το ότι το άθροισμά τους είναι π = 3,14 ακτίνια (εικόνα 4).

Ένα άλλο σημείο το οποίο θα πρέπει να γίνει αντικείμενο συζήτησης είναι ο αριθμός 24, ο οποίος εμφανίζεται ως η μέγιστη τιμή του εμβαδού για γωνία 1,57 ακτινίων και η σχέση του με τις σταθερές σε μήκος πλευρές είναι ότι ισούται με το ημιγινόμενό τους. Στη συνέχεια, οι μαθητές επιλέγουν κατάλληλη κλίμακα.

Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής “Αλλαγή κλίμακας” από το μενού “Γράφημα”. Κατά την επιλογή της κλίμακας, το διάστημα για τις τιμές της γωνίας θα είναι το (0, π), δηλαδή το (0, 3,14), ενώ για το y είναι αρκετό το διάστημα (0, 25). Η κλίμακα, στη συνέχεια, καλό θα είναι να αποθηκευτεί με κάποιο όνομα.

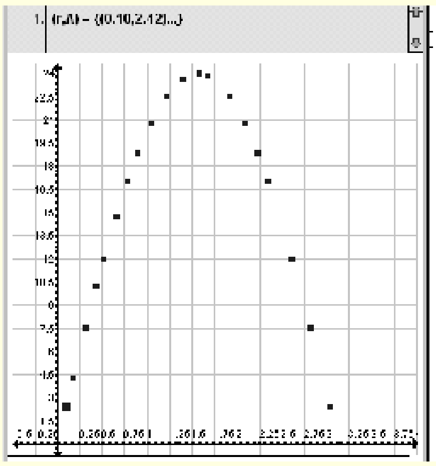
A ακτίνια	E cm²
0.104	2.42
0.174	4.26
0.313	7.52
0.435	10.19
0.522	12
0.661	14.7
0.783	17.1
0.905	18.81
1.044	20.76
1.218	22.55
1.392	23.64
1.566	24
1.67	23.85
1.914	22.55
2.088	20.76
2.227	18.81
2.349	17.1
2.61	12
2.819	7.52
3.028	2.42

Εικόνα 4.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα.

IV. Στις ερωτήσεις 4 και 5, οι μαθητές αποστέλλουν τα ζεύγη τιμών στον πίνακα “Γράφημα” και συζητούν για τον τρόπο με τον οποίο είναι διατεταγμένα (εικόνα 5).

Η συζήτηση η οποία έχει προηγηθεί στην ερώτηση 3 θα πρέπει να οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία ότι τα σημεία ανήκουν πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = 24ημx.

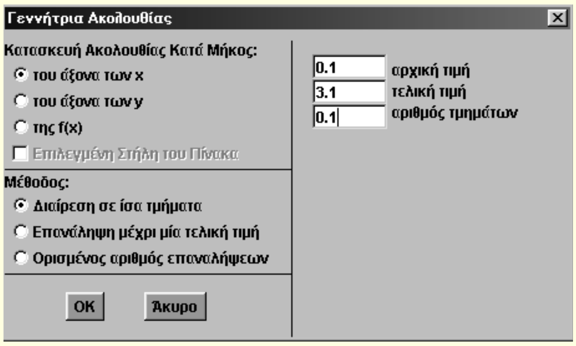


Εικόνα 5.

V. Στην ερώτηση 6, οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = 24ημx και με τον τρόπο αυτό επιβεβαιώνεται η εικασία, αφού η γραφική παράσταση περνά από όλα τα σημεία. Εδώ θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι, κάθε φορά που πρόκειται να γράψουμε τον τύπο μιας συνάρτησης για να κατασκευάσουμε τη γραφική της παράσταση, το πληκτρολόγιο θα πρέπει να είναι στα αγγλικά.

Τώρα όμως υπάρχει μια σημαντική, από μαθηματική άποψη, δυνατότητα.

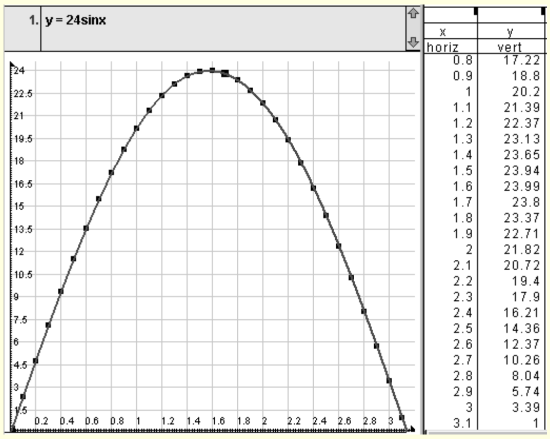
Οι μαθητές μπορούν να αποκόψουν σημεία από την καμπύλη μέσω των εντολών "Δείγμα από καμπύλη", "Σύνολο σημείων" από το μενού "Γράφημα" (εικόνα 6) και να αποστείλουν τα σημεία στον πίνακα τιμών με την εντολή "Σημεία σε πίνακα" από το μενού "Αποστολή" του πίνακα "Γράφημα" (εικόνα 7).



Εικόνα 6.

Αν τώρα επιχειρήσουν να μετρήσουν το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου που είχαν κατασκευάσει με το Sketchpad για τιμές της γωνίας Α ίσες με αυτές που βρίσκονται στην πρώτη στήλη, τότε θα εμφανίζονται οι αριθμοί της δεύτερης στήλης (εικόνα 7).

Η αντιστροφή αυτή ολοκληρώνει τη διαδικασία ανάλυσης και σύνθεσης του προβλήματος και αντιστοιχεί στο "ευθύ και αντίστροφο" της εύρεσης ενός γεωμετρικού τόπου.



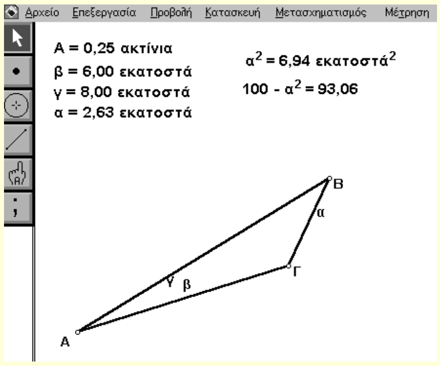
Εικόνα 7.

VI. Στην ερώτηση 7, οι μαθητές θα διατυπώσουν τον τύπο που μας δίνει το εμβαδόν τριγώνου:

$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot$ ημΑ και με βάση αυτόν θα καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι το μέγιστο εμβαδόν το επιτυγχάνουμε όταν $A = 90^\circ$.

Στο σχήμα με το οποίο εργαστήκατε στη δραστηριότητα του μεγίστου εμβαδού τριγώνου, να κάνετε τις εξής μετατροπές:

- Να διαγράψετε το εσωτερικό του τριγώνου.
- Να μετρήσετε τις πλευρές του τριγώνου και να διαγράψετε τη μέτρηση του εμβαδού.
- Να υψώσετε στο τετράγωνο τη μέτρηση της πλευράς ΒΓ (δηλαδή της α). Αυτό μπορεί να γίνει αν κάνετε διπλό «κλικ» πάνω στη μέτρηση, οπότε εμφανίζεται ο υπολογιστής του λογισμικού. Στη συνέχεια, κάνετε «κλικ» πάνω στην ίδια μέτρηση και μετά πληκτρολογείτε ^2 (στον υπολογιστή του λογισμικού).
- Τέλος, να υπολογίσετε με τον υπολογιστή το $100 – α^2$.



Ερώτηση 1η (6 μονάδες)

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα στον οποίο στην πρώτη στήλη θα υπάρχουν οι τιμές της γωνίας Α (σε ακτίνια) και στη δεύτερη οι τιμές του $100 – α^2$. Υπάρχει κάποια κανονικότητα στις τιμές της δεύτερης στήλης;

Ερώτηση 2η (5 μονάδες)

Να περάσετε τα ζεύγη στον πίνακα “Γράφημα” του Function Probe. Διακρίνετε κάποια μαθηματική σχέση μεταξύ των ζευγών;

Ερώτηση 3η (4 μονάδες)

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 96συνx$. Τι παρατηρείτε;

Ερώτηση 4η (5 μονάδες)

Με δεδομένο ότι $6^2 + 8^2 = 100$ και $2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$, να δικαιολογήσετε αυτά τα οποία διαπιστώσατε στο ερώτημα γ). Ποιος γνωστός νόμος της τριγωνομετρίας δικαιολογεί τις παρατηρήσεις σας;

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

E_1) Ο πίνακας θα κατασκευαστεί με τη βοήθεια του Sketchpad, γι' αυτό καλό θα είναι ο διδάσκων να έχει υποδείξει τον τρόπο κατασκευής πίνακα τιμών.

E_2) Η διάταξη των σημείων υποδεικνύει μια μη γραμμική σχέση και, αφού η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι γωνία, άρα μάλλον πρόκειται για ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή καμπύλη.

E_3) Η καμπύλη περνά από τα σημεία.

E_4) Στην ουσία, πρόκειται για εφαρμογή του θεωρήματος των συνημιτόνων, αφού τελικά διαπιστώθηκε ότι ισχύει: $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2\beta\gamma\text{συν}\omega$.