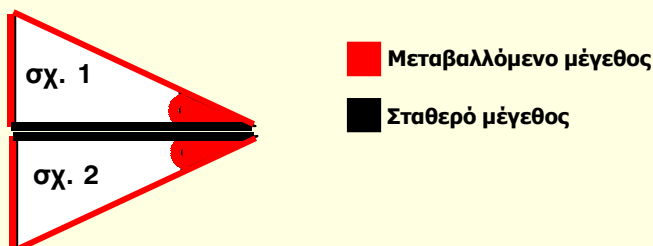


Ένα σχέδιο του Dürer

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Το σχέδιο του Dürer είναι μια δραστηριότητα η οποία έχει στόχο να οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων της τριγωνομετρικής εφαπτομένης.

Οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με το Sketchpad (η μία κάθετη πλευρά του θα παραμείνει σταθερή), θα μεταβάλουν τις διαστάσεις του και θα πάρουν μετρήσεις της οξείας γωνίας του (απέναντι από τη μεταβαλλόμενη πλευρά) και της κάθετης πλευράς που μεταβάλλεται.



Αν υποθέσουμε ότι η σταθερή κάθετη πλευρά βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους, τότε μέσω της άλλης κάθετης πλευράς μετρούμε το ύψος και η γωνία μπορεί να θεωρηθεί θετική (σχ. 1). Αν θελήσουμε να μετρήσουμε το βάθος, τότε το τρίγωνο θα πρέπει να αναστραφεί κατακόρυφα και η γωνία μπορεί να θεωρηθεί αρνητική, όπως και το μέτρο της κάθετης πλευράς (σχ. 2).

Με βάση τα προηγούμενα, μπορούμε να μεταφέρουμε τις μετρήσεις από το σχήμα στον πίνακα τιμών του Function Probe και στη συνέχεια στο γράφημα. Από εκεί οι μαθητές, αφενός, θα διαπιστώσουν ότι η σχέση γωνίας – ύψους δεν είναι γραμμική και, αφετέρου, θα έχουν μια γραφική αναπαράσταση των ιδιοτήτων της συνάρτησης $f(x) = \exp(x)$.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Τριγωνομετρία. Τριγωνομετρικοί αριθμοί.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 5.1.

Εργαλεία λογισμικού:

Sketchpad.

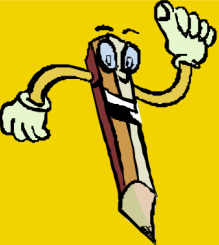
Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Οι μαθητές θα συνδέσουν την έννοια της εφαπτομένης οξείας γωνίας με τη μέτρηση του ύψους ενός αντικειμένου.
2. Θα μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το ύψος όταν μεταβάλλεται η γωνία και θα μάθουν ότι η σχέση δεν είναι γραμμική.
3. Θα αναγνωρίσουν βασικές ιδιότητες της τριγωνομετρικής εφαπτομένης μέσα από τη γραφική της παράσταση.
4. Θα προσεγγίσουν διαισθητικά την ύπαρξη αρνητικών τιμών μιας γωνίας όταν αυτή αντιστοιχεί σε μετρήσεις βάθους.



Ο Albrecht Dürer (1471-1528) υπήρξε ζωγράφος της Αναγέννησης. Ο Dürer είχε σπουδάσει μαθηματικά και, όταν κάτι τον εντυπωσίαζε, έκανε ένα σκίτσο, μέσω του οποίου προσπαθούσε να το εξηγήσει.

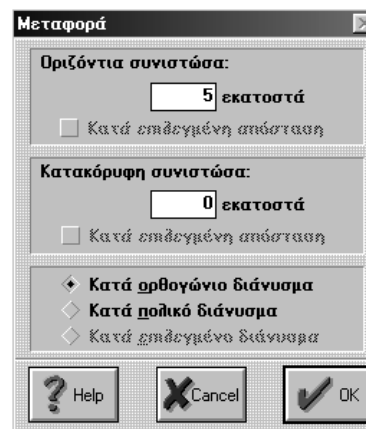


Εικόνα 1.

- 1 Τι πιστεύετε ότι είναι αυτό που εντυπωσίασε τον Dürer ώστε να κατασκευάσει το σχήμα το οποίο φαίνεται στην εικόνα 1;

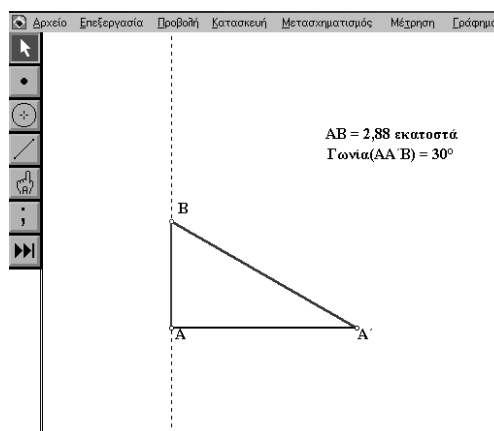
- 2 Ο Dürer, για να κατασκευάσει το σχέδιο αυτό, έκανε επίμονες και πολύωρες μετρήσεις. Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε σύντομα και με ακρίβεια τις μετρήσεις αυτές.

Με τη βοήθεια του Sketchpad, να κατασκευάσετε ένα σημείο A και να το μεταφέρετε κατά μία σταθερή απόσταση, π.χ. 5 εκατοστά, οριζόντια (εικόνα 2).



Εικόνα 2.

Το νέο σημείο είναι το A'. Να κατασκευάσετε στο ένα άκρο του τμήματος (π.χ. στο A) μια κάθετη ευθεία και πάνω σε αυτή να κατασκευάσετε ένα ελεύθερο σημείο B. Να κατασκευάσετε το τμήμα A'B και να μετρήσετε τόσο το AB όσο και τη γωνία AA'B (εικόνα 3).



Εικόνα 3.



- 3** Να πάρετε αρκετές μετρήσεις μετακινώντας το B.
Με ποιον τρόπο μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις τιμές που αντιστοιχούν σε θέσεις του B πάνω από το A από αυτές που αντιστοιχούν σε θέσεις του B κάτω από το A;
- 4** Να περάσετε τις μετρήσεις στον πίνακα τιμών του Function Probe. Ας θεωρήσουμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η γωνία. Να περάσετε τις μετρήσεις στον πίνακα “Γράφημα”, αφού πρώτα επιλέξετε κατάλληλη κλίμακα, και να συνδέσετε τα σημεία. Πιστεύετε ότι υπάρχει κάποια μαθηματική σχέση η οποία συνδέει τις τιμές της γωνίας με αυτές του ύψους;
- 5** Αν διπλασιάσουμε την τιμή της γωνίας, θα διπλασιαστεί η τιμή του ύψους; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με βάση τη γραφική παράσταση.
- 6** Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα και λίγη τριγωνομετρία. Ποια σχέση συνδέει την πλευρά AB με τη γωνία AA'B (ας την ονομάσουμε ω); Η γραφική παράσταση που βρήκατε πριν είναι προφανώς η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής.
- 7** Ποιες ιδιότητες έχει η σχέση αυτή; Δηλαδή, όσο αυξάνεται η γωνία, πώς μεταβάλλεται το ύψος; Αν γνωρίζετε το ύψος που αντιστοιχεί σε γωνία 40° , πόσο βάθος (με τη λέξη «βάθος» εννοούμε μετρήσεις όταν το σημείο B βρίσκεται κάτω από το A) αντιστοιχεί στην ίδια γωνία; Πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε τις ιδιότητες αυτές από τη γραφική παράσταση;

✓ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για τη δραστηριότητα είναι οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Επίσης, είναι σημαντικό να γνωρίζουν οι μαθητές ότι, αν τα ζεύγη που προκύπτουν από τις μετρήσεις δύο ποσών τα οποία συμμεταβάλλονται δίνουν γραφική παράσταση ευθεία ή καμπύλη, τότε τα ποσά συνδέονται με κάποια συναρτησιακή ή γενικότερα μαθηματική σχέση. Αν τα ζεύγη δίνουν γράφημα που αποτελείται από τυχαία σημεία στο επίπεδο, τότε η σχέση δεν είναι συναρτησιακή.

- I. Στην ερώτηση 1, ο διδάσκων συζητά με τους μαθητές το λόγο για τον οποίο ο ζωγράφος έκανε το σχέδιο. Με κατάλληλες ερωτήσεις οδηγεί τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι, ενώ η γωνία αυξάνει κατά ίσα ποσά, το ύψος μεταβάλλεται κατά άνισα ποσά, οπότε θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτή η μεταβολή.
- II. Στην ερώτηση 2, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το Sketchpad ώστε να αναπαραστήσουν το σχήμα του ζωγράφου και να πάρουν αρκετές μετρήσεις. Η μέτρηση ενός τμήματος γίνεται ως εξής: Επιλέγουμε το τμήμα που θέλουμε να μετρήσουμε και από το μενού “Μέτρηση” επιλέγουμε “Μήκος”. Για τη μέτρηση της γωνίας επιλέγουν συγχρόνως τα σημεία B, A', A (με αυτήν τη σειρά και με πατημένο το shift) και από το μενού “Μέτρηση” επιλέγουν “Γωνία”.
- III. Οι μαθητές, στη συνέχεια, μεταβάλλουν τόσο τη γωνία όσο και το ύψος AB και παίρνουν έναν αριθμό μετρήσεων. Εδώ είναι σημαντικό να γίνει διαπραγμάτευση με τους μαθητές ώστε να προκύψει το συμπέρασμα ότι, αν συνεχίσουμε να παίρνουμε μετρήσεις και κάτω από το σημείο A, τότε αυτές θα αντιστοιχούν σε μέτρηση βάθους και θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν αρνητικές.
- IV. Στην ερώτηση 4, οι μαθητές θα περάσουν θετικές και αρνητικές τιμές στον πίνακα τιμών του Function Probe και καλό θα ήταν να υπάρχουν συμμετρικές ως προς το 0 μετρήσεις τόσο για τη γωνία όσο και για το AB (εικόνα 4).



Εδώ θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι το λογισμικό δέχεται τιμές για τη γωνία οι οποίες έχουν εκφραστεί σε μια ειδική μονάδα, που λέγεται ακτίνιο, και, αφού οι 180° αντιστοιχούν σε 3,14 ακτίνια, άρα θα πρέπει να πολλαπλασιάζουμε το μέτρο κάθε γωνίας με τον αριθμό $3,14/180$ ώστε να μετατραπούν οι μοίρες σε ακτίνια.

Προφανώς στον πίνακα δεν υπάρχει φανερή σχέση, από αυτές τις σχέσεις που έχουν συνηθίσει να συναντούν οι μαθητές, μεταξύ γωνίας και ύψους.

ω	$x = 3,14/180 \omega$	h
* (μοίρες)	ακτίνια	cm
-62	-1.08	-9.39
-55	-0.96	-7.13
-48	-0.84	-5.55
-40	-0.7	-4.19
-32	-0.56	-3.12
-25	-0.44	-2.33
-18	-0.31	-1.62
-12	-0.21	-1.06
-8	-0.14	-0.7
-3	-0.05	-0.26
0	0	0
3	0.05	0.26
8	0.14	0.7
12	0.21	1.06
18	0.31	1.62
25	0.44	2.33
32	0.56	3.12
40	0.7	4.19
48	0.84	5.55
55	0.96	7.13
62	1.08	9.39

Εικόνα 4.

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι στο Sketchpad έχουμε τη δυνατότητα να πάρουμε τις μετρήσεις των γωνιών κατευθείαν σε ακτίνια. Με τη μετατροπή όμως των μοιρών σε ακτίνια, οι μαθητές χρησιμοποιούν τη σχέση που συνδέει τις δύο μονάδες, κάτι το οποίο είναι χρήσιμο για την κατανόηση της σχέσης αυτής.

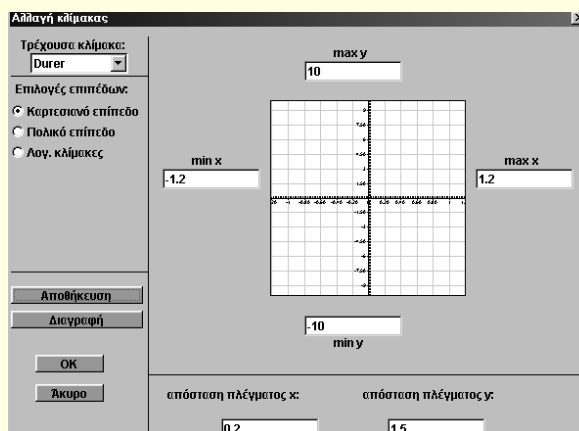
Στη συνέχεια, οι μαθητές θα επιλέξουν, μετά από διαπραγμάτευση, κατάλληλη κλίμακα.



Καλό θα είναι, κατά την επιλογή της κλίμακας, τα διαστήματα πάνω στους δύο άξονες να έχουν ίσα μήκη ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.

Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής “Αλλαγή κλίμακας” από το μενού “Γράφημα” (εικόνα 5).

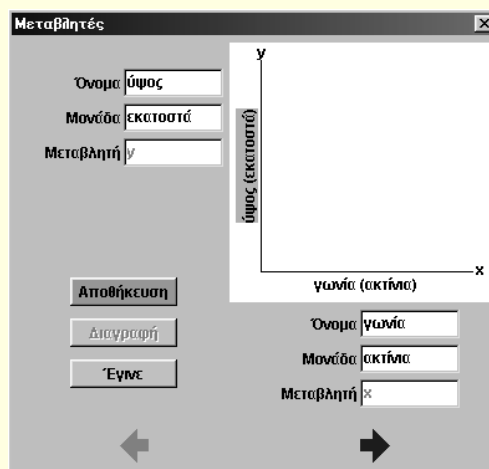
Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα. Τέλος, καλό θα είναι οι μαθητές να αποθηκεύσουν την κλίμακα με ένα όνομα, π.χ. Dürer.



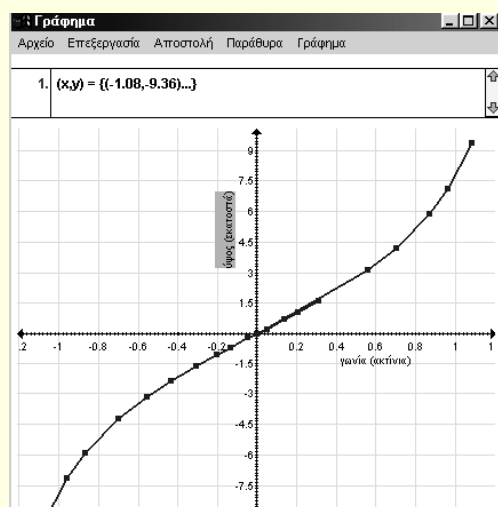
Εικόνα 5.



Πριν αποστείλουν οι μαθητές τα σημεία στους άξονες, καλό θα είναι να ορίσουν τις μεταβλητές και τις μονάδες μέτρησής τους μέσω της εντολής “Μεταβλητές” από το μενού “Γράφημα” (εικόνα 6).



Εικόνα 6.



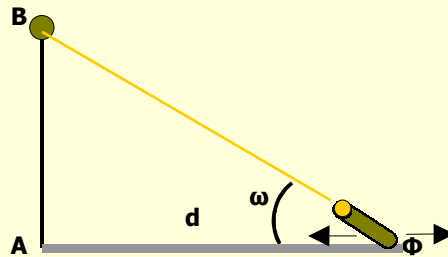
Εικόνα 7.

Οι μαθητές, στη συνέχεια, αποστέλλουν τα ζεύγη στο γράφημα.

Εδώ το γράφημα υποδεικνύει ότι υπάρχει μαθηματική σχέση η οποία συνδέει τις τιμές της γωνίας με το ύψος, η σχέση αυτή όμως δεν είναι γραμμική (εικόνα 7).

- V.** Στην ερώτηση 5, ο διδάσκων προκαλεί μια σύγκρουση. Από τη μία πλευρά η γραμμική σκέψη, η οποία είναι κυρίαρχη στους μαθητές, τους παρακινεί να απαντήσουν καταφατικά στο ερώτημα, από την άλλη πλευρά όμως η γραφική παράσταση δε μαρτυρεί γραμμικότητα, οπότε είναι ευκαιρία για μια σημαντική συζήτηση πάνω στο θέμα αυτό.
- VI.** Στην ερώτηση 6, οι μαθητές μέσω του ορθογωνίου τριγώνου BAA' θα οδηγηθούν στη σχέση:
- $$AB = 5\epsilon\phi\omega(1),$$
- άρα η σχέση που συνδέει τη γωνία με το ύψος είναι η (1).
- VII.** Στην ερώτηση 7, οι μαθητές θα γνωρίσουν μερικές ιδιότητες της τριγωνομετρικής εφραπτομένης (περιπτή, αύξουσα) και θα αναγνωρίσουν τις ιδιότητες αυτές και στη γραφική παράσταση, αφού η γραφική παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και, όσο αυξάνεται η τιμή της γωνίας, αυξάνεται και η τιμή του AB .

Ο μικρός φακός Φ φωτίζει συνεχώς προς την κορυφή B του στύλου AB , ο οποίος έχει ύψος 4 μέτρα. Ο φακός μπορεί να απομακρύνεται ή να πλησιάζει προς το στύλο και θέλουμε να γνωρίζουμε, για οποιαδήποτε γωνία ω , πόση πρέπει να είναι η απόσταση d του φακού από το στύλο ώστε ο φακός να εστιάζει συνεχώς στην κορυφή του στύλου.



Ερώτηση 1η (8 μονάδες)

Να καταγράψετε τα μεγέθη τα οποία μεταβάλλονται και να κατασκευάσετε στο Sketchpad μια αναπαράσταση του φακού και του στύλου.

Ερώτηση 2η (6 μονάδες)

Να πάρετε 10 μετρήσεις για τη γωνία ω και την απόσταση d . Να περάσετε τις μετρήσεις στον πίνακα του Function Probe.

Ερώτηση 3η (6 μονάδες)

Να αποστείλετε τα σημεία στους άξονες και να τα ενώσετε. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω έχει σχέση η γραφική παράσταση;

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

- E₁)** Τα μεταβαλλόμενα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι η γωνία ω και η απόσταση d . Η κατασκευή στο Sketchpad θα γίνει με βάση τις υποδείξεις του αρχικού φύλλου εργασίας, με τη διαφορά ότι το σημείο A θα μεταφερθεί κατά 4 επάνω.
- E₂)** Όπως στο αρχικό φύλλο εργασίας.
- E₃)** Η γραφική παράσταση σχετίζεται με τη συνεφαπτομένη της γωνίας ω .