



ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΠΕ

Θέμα: «Τριγωνομετρικό Κύκλος: από το ακτίνιο ως την τριγωνομετρική εξίσωση»

**Γιώργος Μπολοτάκης, Μαθηματικός,
Επιμορφωτής Β' Επιπέδου,**

Συγγραφέας του Βιβλίου: «GeoGebra γρήγορα και απλά»

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΔΟΞΑΤΟΥ

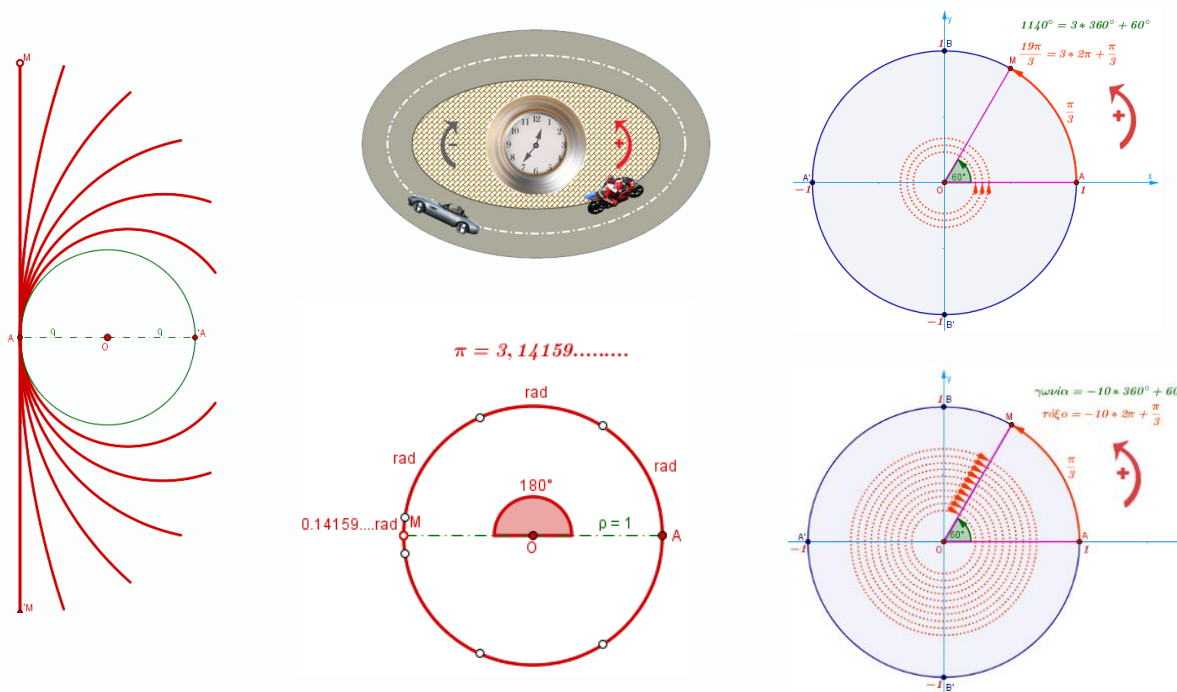


Δοξάτο, 30-8-2015

1. Συνοπτική περιγραφή της ανοιχτής εκπαι- δευτικής πρακτικής

Η διδασκαλία του τριγωνομετρικού κύκλου με τον παραδοσιακό τρόπο στον πίνακα, είναι μία διαδικασία όχι εύκολα κατανοητή για τους μαθητές, με αποτέλεσμα τη μηχανική – παπαγαλίστικη χρήση των τύπων της τριγωνομετρίας.

Η ανίχνευση, διερεύνηση, ανακάλυψη των εννοιών και διατύπωση των σχετικών κανόνων με χρήση εφαρμογής σε περιβάλλον εκπαιδευτικού λογισμικού (**CAS GeoGebra**) από τους ίδιους τους μαθητές (τριμελής ομάδα μαθητών σε κάθε Η/Υ), που καθοδηγούνται με οδηγίες χρήσης της εφαρμογής και κατάλληλες ερωτήσεις από το φύλλο εργασίας, προσφέρει την πλήρη κατανόηση – αφομοίωση και εφαρμογή όλων των εννοιών της τριγωνομετρίας, με χρήση της κίνησης, των πολλαπλών αναπαραστάσεων και την απειρία μετασχηματισμών απλά με ένα κλικ ή ένα σύρσιμο του ποντικιού και το κυριότερο την εκμάθηση των εννοιών με βάση την εικόνα του τριγωνομετρικού κύκλου. Έτσι η μετωπική – δασκαλοκεντρική διδασκαλία μετατρέπεται σε μαθητοκεντρική – ανακαλυπτική διαδικασία με πρωταγωνιστή το μαθητή.



2. Σχεδιασμός της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

2.1 Στοιχεία σχεδιασμού

Διδακτικές ενότητες:

- ✓ ακτίνιο
- ✓ αριθμός π
- ✓ Μήκος του κύκλου σε ακτίνια
- ✓ Αντιστοιχία μοιρών – ακτινίων
- ✓ Τρόποι κίνησης πάνω στον κύκλο (θετική – αρνητική φορά)
- ✓ Στοιχεία του τριγωνομετρικού κύκλου
- ✓ Θετικές – αρνητικές γωνίες – τόξα
- ✓ Γωνίες μεγαλύτερες των 360° και μικρότερες των -360° και αντίστοιχα τόξα
- ✓ Άπειρα τόξα με ίδιο πέρασ
- ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών – τόξων
- ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων: $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \pm \beta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = \pm \pi$
- ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις γραφικές τους παραστάσεις
- ✓ Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο

Στόχος η γνωσιοθεωρητική προσέγγιση του μαθήματος να γίνει με σύγχρονες κοινωνικές και επικοινωνιακές προσεγγίσεις, δηλαδή με δυναμικό τρόπο, απειρία μετασχηματισμών και πολλαπλές αναπαραστάσεις, με ομαδοσυνεργατική δουλειά για τη διαπραγμάτευση των απόψεων και τελικών συμπερασμάτων από τους μαθητές (ομάδα με 3 μαθητές ανά Η/Υ), με φύλλα εργασίας με προσεκτικά σχεδιασμένες οδηγίες χρήσης της εφαρμογής και μαθηματικές ερωτήσεις και ο διδάσκων στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή, μέσα από το σχεδιασμό κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης και όχι στο ρόλο του πομπού γνώσεων, που συνήθως συμβαίνει στο περιβάλλον μιας παραδοσιακής τάξης.

2.2 Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- ✓ Να κατανοήσουν την σημασία του αριθμού π .
- ✓ Να συνδέσουν την έννοια του ακτινίου με την έννοια της μοίρας
- ✓ Να αξιοποιήσουν την έννοια της θετικής και αρνητικής φοράς κίνησης στον κύκλο στην κατανόηση των θετικών – αρνητικών γωνιών
- ✓ Να κατανοήσουν ότι κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί γωνία ή τόξο
- ✓ Να αξιοποιήσουν στα επόμενα μαθήματα την αλγεβρική σχέση που συνδέει τα τόξα με ίδιο πέρασ για να κατανοήσουν την περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και να λύσουν τριγωνομετρικές εξισώσεις
- ✓ Να οικοδομήσουν όλη την φιλοσοφία που διέπει την χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου για όλες τις σχετικές μ' αυτόν έννοιες – θεωρήματα – τύπους
- ✓ Να πειραματιστούν με διάφορους μετασχηματισμούς και πολλαπλές αναπαραστάσεις ώστε να αφομοιώσουν όσο το δυνατόν καλύτερα τις έννοιες και τους κανόνες της τριγωνομετρίας
- ✓ Να αναπτύξουν σχέσεις μεταξύ τους ως αποτέλεσμα της ομαδικής τους εργασίας.
- ✓ Να μάθουν να οργανώνουν καλύτερα τον τρόπο εργασίας τους ατομικής ή ομαδικής
- ✓ Να γίνει περισσότερο φιλικό προς αυτούς το περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού

3. Εφαρμογή της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

3.1 Περιβάλλον – πλαίσιο

Προτείνεται οι μαθητές να εργαστούν εξ' ολοκλήρου στο **εργαστήριο υπολογιστών**. Ο **εκπαιδευτικός** θα ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, θα συνεργάζεται μαζί τους και τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και θα τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Εναλλακτικά, το μάθημα μπορεί να γίνει σε αίθουσα με βιντεοπροβολέα, αλλά ο διδάσκων πρέπει να είναι κατάλληλα προετοιμασμένος, ώστε απευθυνόμενος στο σύνολο της τάξης, οι ερωτήσεις του να οδηγούν τους μαθητές στην ανακάλυψη των προς μάθηση εννοιών και διατύπωση των σχετικών κανόνων.

3.2 Τάξη

Επιλέξτε από την παρακάτω λίστα την τάξη στην οποία εφαρμόστηκε η ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική. Αν η δραστηριότητα είναι συνεργατική μπορείτε να επιλέξετε παραπάνω από μία τάξεις.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Νηπιαγωγείο | <input type="checkbox"/> Α' γυμνασίου |
| <input type="checkbox"/> Α' δημοτικού | <input type="checkbox"/> Β' γυμνασίου |
| <input type="checkbox"/> Β' δημοτικού | <input type="checkbox"/> Γ' γυμνασίου |
| <input type="checkbox"/> Γ' δημοτικού | <input type="checkbox"/> Α' λυκείου |
| <input type="checkbox"/> Δ' δημοτικού | <input checked="" type="checkbox"/> Β' λυκείου |
| <input type="checkbox"/> Ε' δημοτικού | <input type="checkbox"/> Γ' λυκείου |
| <input type="checkbox"/> ΣΤ' δημοτικού | |

3.3 Διάρκεια δραστηριότητας

Προσδιορίστε παρακάτω τη διάρκεια πραγματοποίησης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής.

Ώρες διδασκαλίας

Διδακτική ενότητα ωρών μαθητικής δραστηριότητας

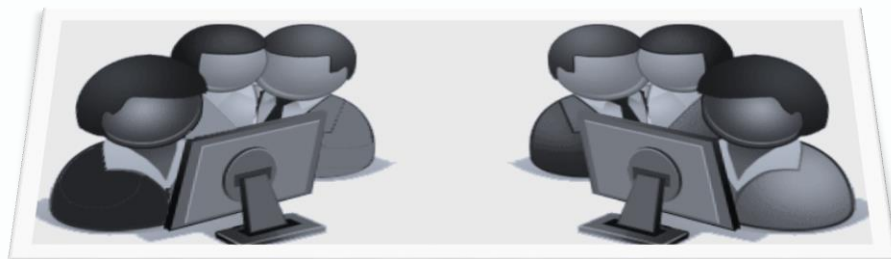
Άλλη: Προσδιορίστε την διάρκεια: **8 – 10 διδακτικές ώρες**

π.χ. 12 ώρες δραστηριότητας σε διάστημα ενός τριμήνου

3.4 Αναλυτική περιγραφή της πραγματοποίησης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

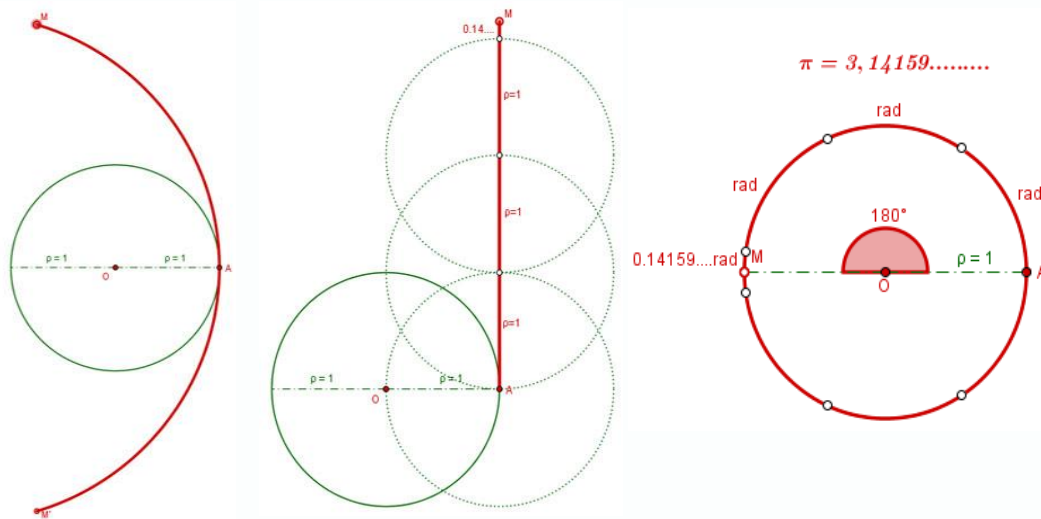
Οι μαθητές:

- ✓ Θα εργαστούν σε ομάδες των 3 ατόμων σε κάθε Η/Υ (ομαδοσυνεργατική μάθηση).
- ✓ Η σύνθεση κάθε ομάδας είναι ανομοιογενής ως προς την επίδοση στο συγκεκριμένο μάθημα, τις διαπροσωπικές σχέσεις των μαθητών, την κοινωνική τους προέλευση και τη δυσκολία με την οποία εκδηλώνονται απέναντι σε καθηγητή, συμμαθητές.
- ✓ Ο ένας χειρίζεται την εφαρμογή, ο δεύτερος υπαγορεύει τις οδηγίες – ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, ο τρίτος παρακολουθεί τη σωστή εφαρμογή τους και όλοι μαζί συζητούν, αποφασίζουν και διατυπώνουν τις απαντήσεις. Φυσικά οι ρόλοι αυτοί μπορούν να εναλλάσσονται.
- ✓ Θα συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Μπορεί το φύλλο εργασίας να αφήνει μια σχετική ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σ' αυτά.



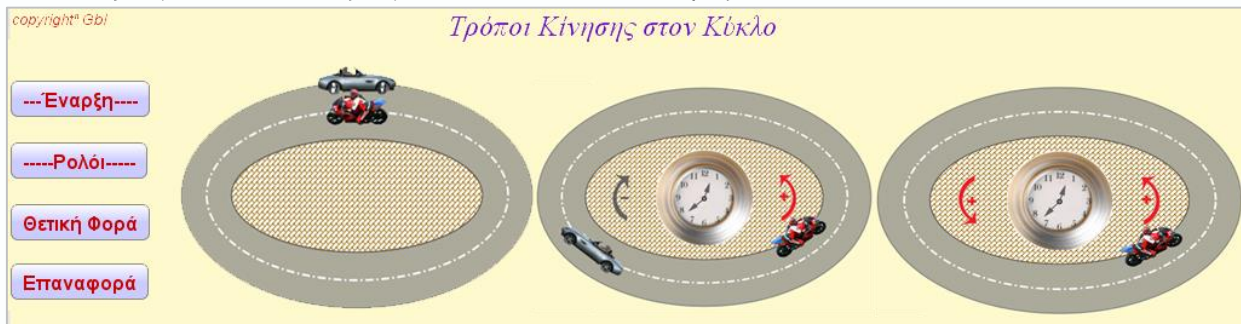
Δραστηριότητα 1: Ακτίνα, Αριθμός π , Μήκος Κύκλου

Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας, μετατρέπουμε την καμπύλη του κύκλου σε ευθύγραμμο τμήμα, μετράμε το μήκος του μισού ευθύγραμμου τμήματος με μέτρο την ακτίνα του κύκλου, εφαρμόζουμε το μετρημένο ευθύγραμμο τμήμα στο ημικύκλιο και αλλάζοντας το μήκος της ακτίνας σε διαδοχικές τιμές μαθαίνουμε τον αριθμό π , το ακτίνα και την αντιστοιχία ακτινίων – μοιρών.



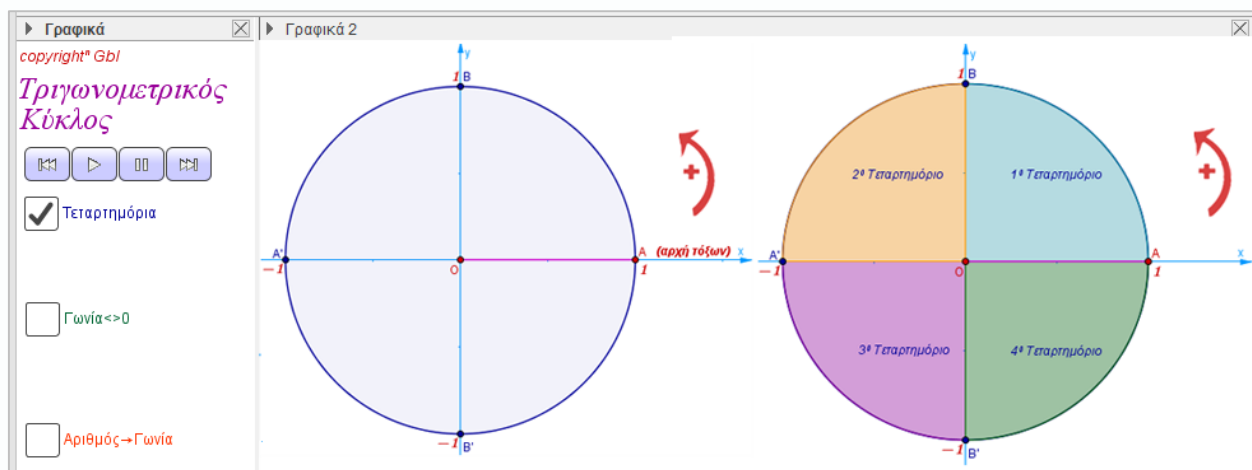
Δραστηριότητα 2: Τρόποι κίνησης πάνω στον κύκλο

Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας πατάμε διαδοχικά τα κουμπιά από πάνω προς τα κάτω αφήνοντας κάποιο χρονικό διάστημα μεταξύ τους, π.χ. 10 δευτερολέπτων, οπότε παρατηρώντας τα κινητά, την κίνηση των δεικτών του ρολογιού και τα βέλη, καταλήγουμε στον ορισμό της θετικής φοράς κίνησης πάνω στον κύκλο

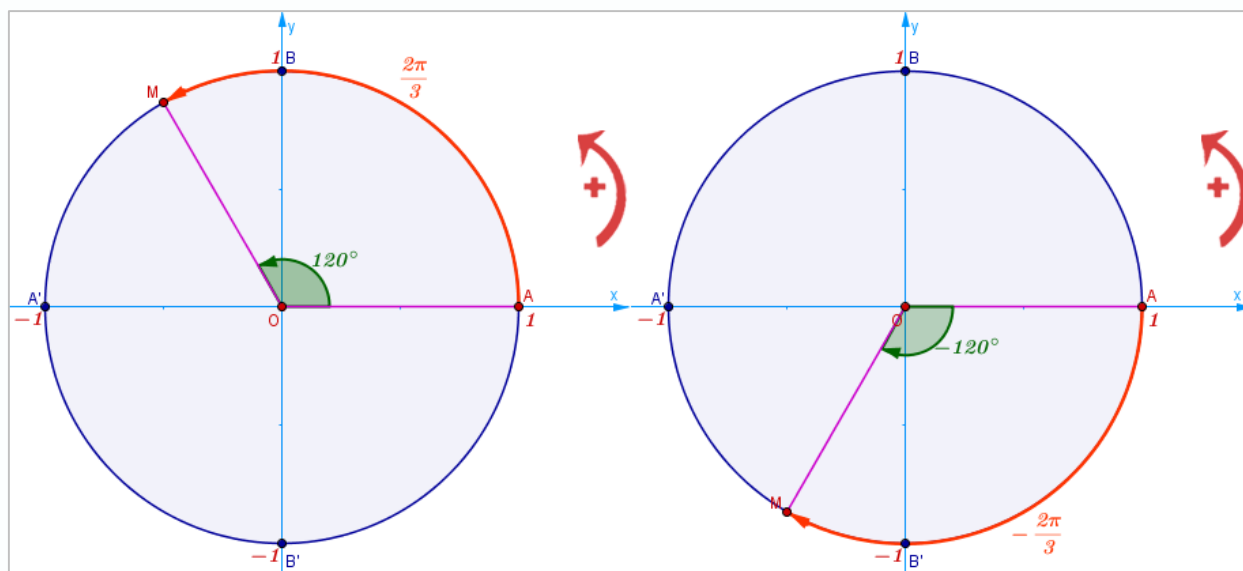


Δραστηριότητα 3: Τριγωνομετρικός κύκλος, θετική - αρνητική γωνία - τόξο, Γωνίες μεγαλύτερες των 360° και μικρότερες των -360° , Γωνίες - τόξα με το ίδιο πέρασ

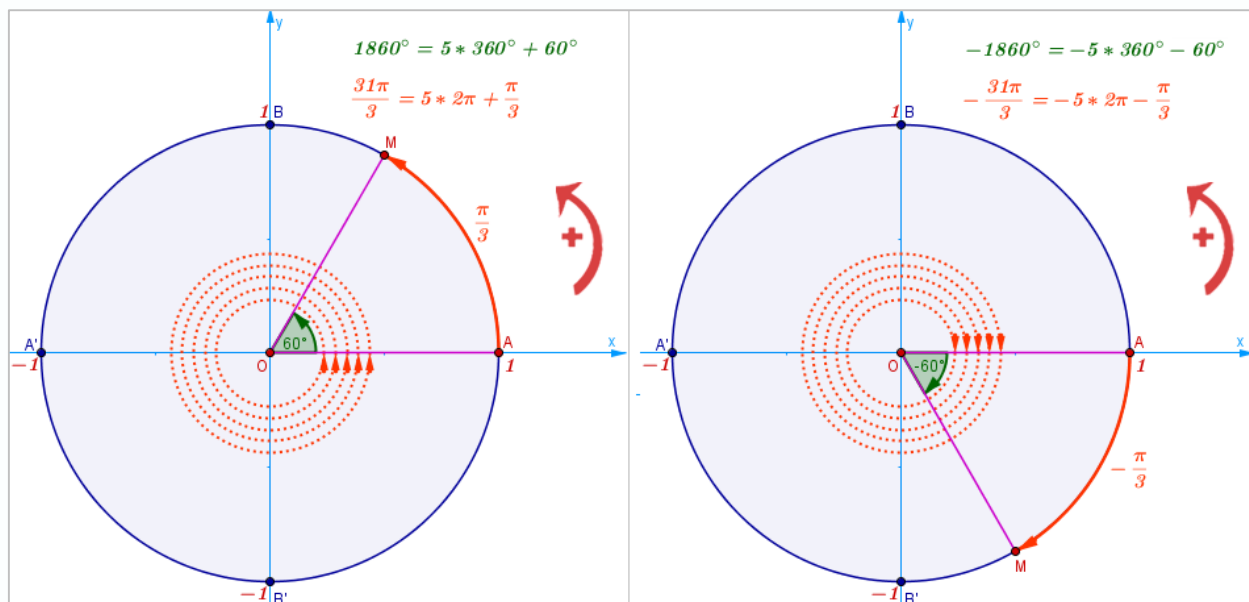
Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας, παρατηρούμε τα χαρακτηριστικά του τριγωνομετρικού κύκλου, δημιουργούμε τα τεταρτημόριά του,



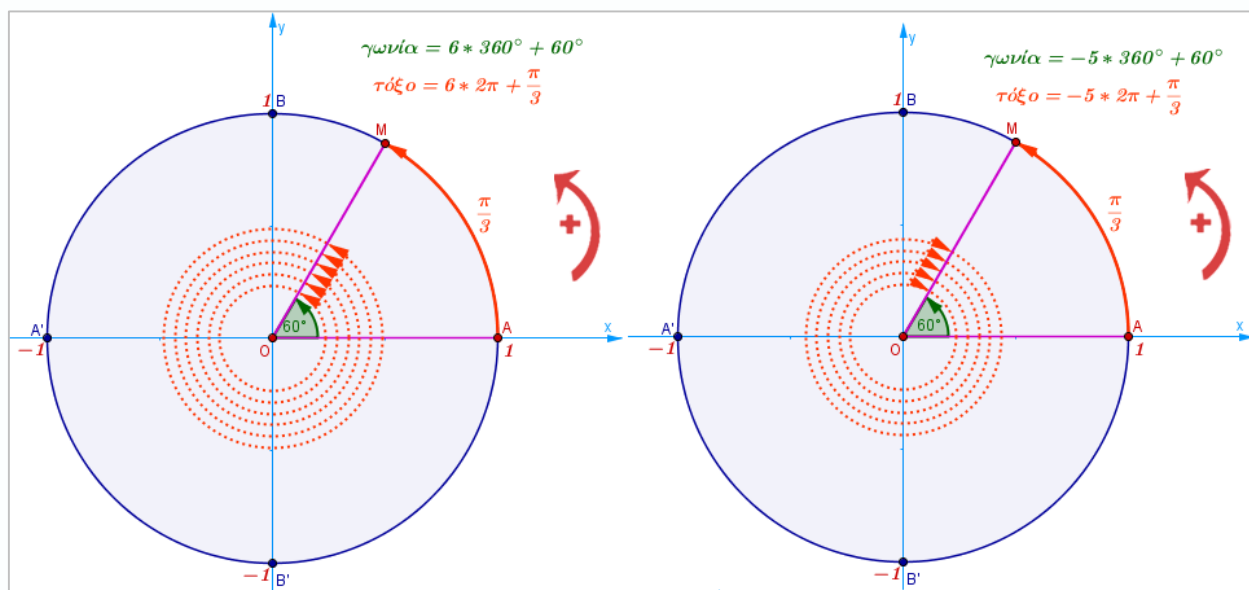
δίνουμε θετικές ή αρνητικές τιμές μεταξύ των -360 και 360 και παρακολουθούμε τον σχηματισμό των γωνιών - αντίστοιχων τόξων με κίνηση για να καταλάβουμε τι συμβολίζει το πρόσημο στη γωνία,



δίνουμε τιμές μεγαλύτερες του 360 ή μικρότερες του -360 και με κίνηση δημιουργείται γωνία – τόξο με μέτρο τον δοθέντα αριθμό,

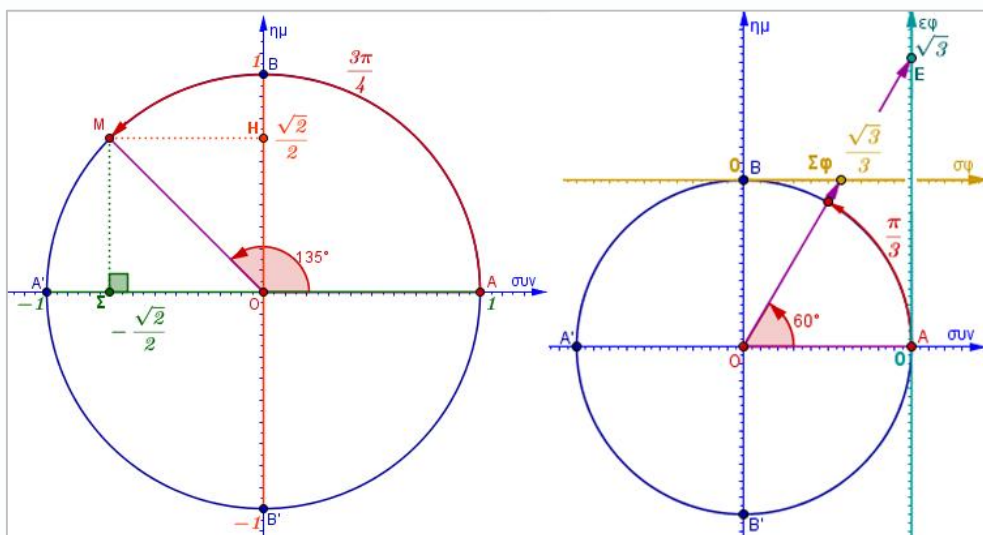


δίνουμε οποιαδήποτε γωνία μεταξύ των -3600 και 3600 και παρατηρούμε ότι άπειρα θετικά και αρνητικά τόξα έχουν το ίδιο πέρασ με το αντίστοιχο τόξο της δοθείσας γωνίας και μαθαίνουμε την αλγεβρική σχέση μεταξύ αυτών των τόξων και μεταξύ των αντιστοίχων επίκεντρων γωνιών τους.

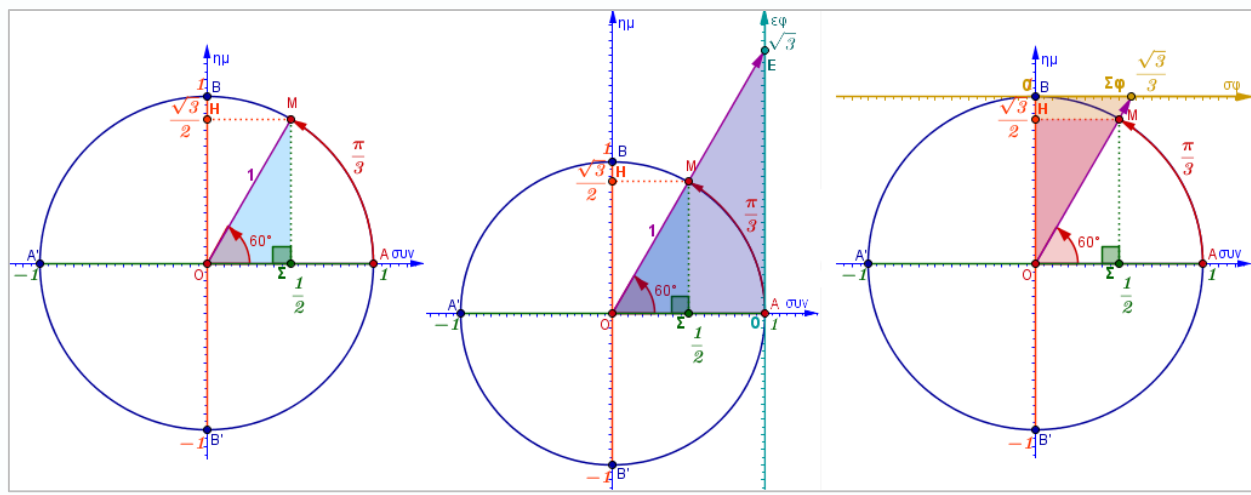


Δραστηριότητα 4: Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας - τόξου

Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας, ανακαλύπτουμε τις έννοιες και τους αντίστοιχους άξονες των τριγωνομετρικών αριθμών, παρατηρώντας για μεν το ημίτονο και το συνημίτονο τις συντεταγμένες των προβολών του πέρατος του τόξου πάνω στους άξονες του ορθοκανονικού συστήματος, για δε την εφαπτομένη και συνεφαπτομένη τις τομές της επιβατικής ακτίνας του πέρατος με τους άξονες εφαπτομένων – συνεφαπτομένων αντίστοιχα. Το πέρας του τόξου διαγράφει τον κύκλο κατά την θετική και την αρνητική φορά.

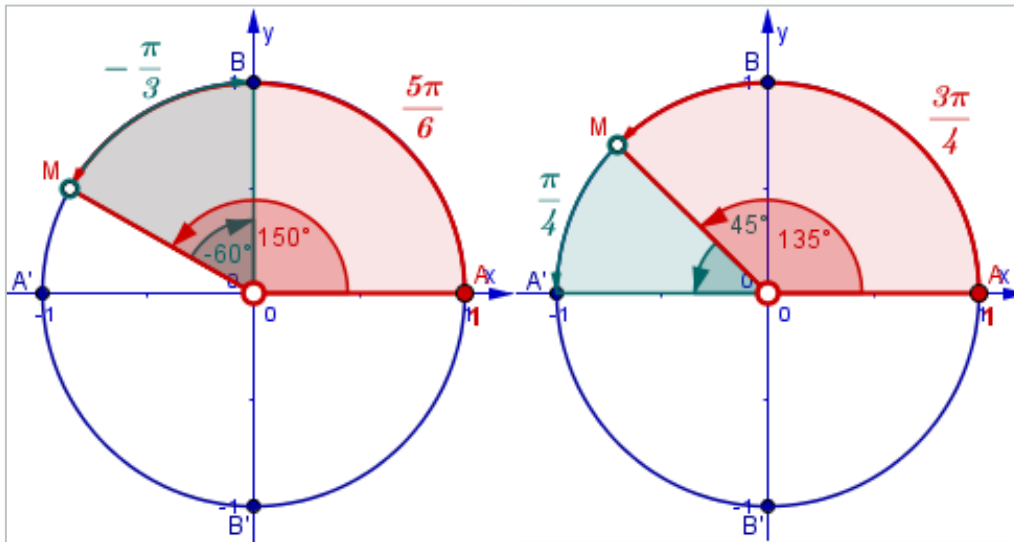


Επίσης με κλικ στα αντίστοιχα κουμπιά εμφανίζονται τα ορθογώνια τρίγωνα που επιτρέπουν το μαθητή να ανακαλύψει το βασικό θεώρημα της τριγωνομετρίας και τις αλγεβρικές σχέσεις των τριγωνομετρικών αριθμών.

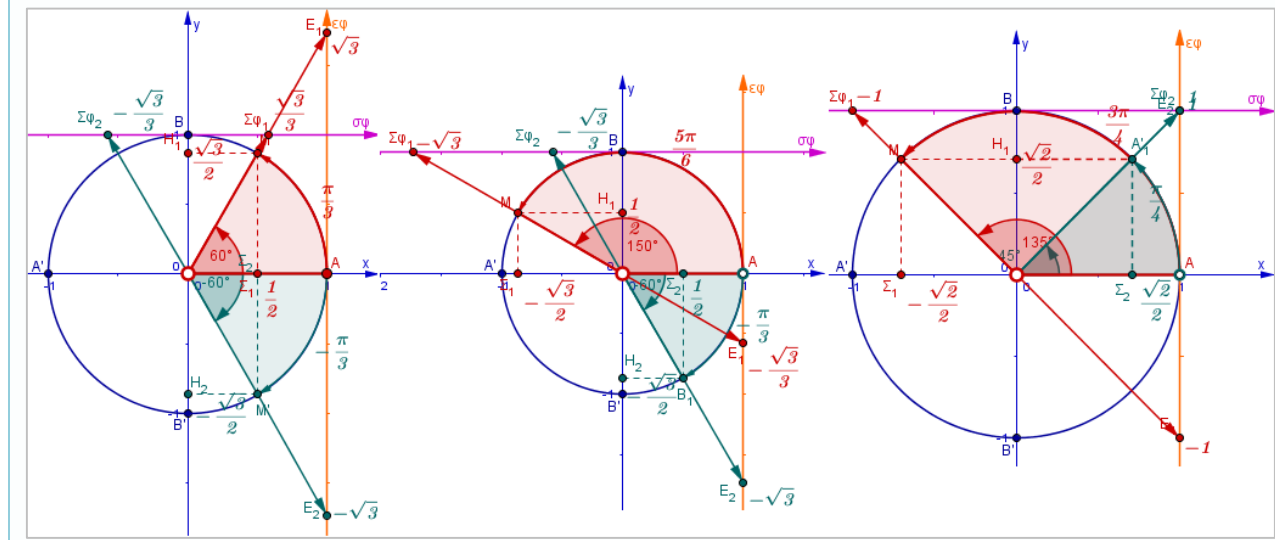


Δραστηριότητα 5: Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων: $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \pm \beta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = \pm \pi$

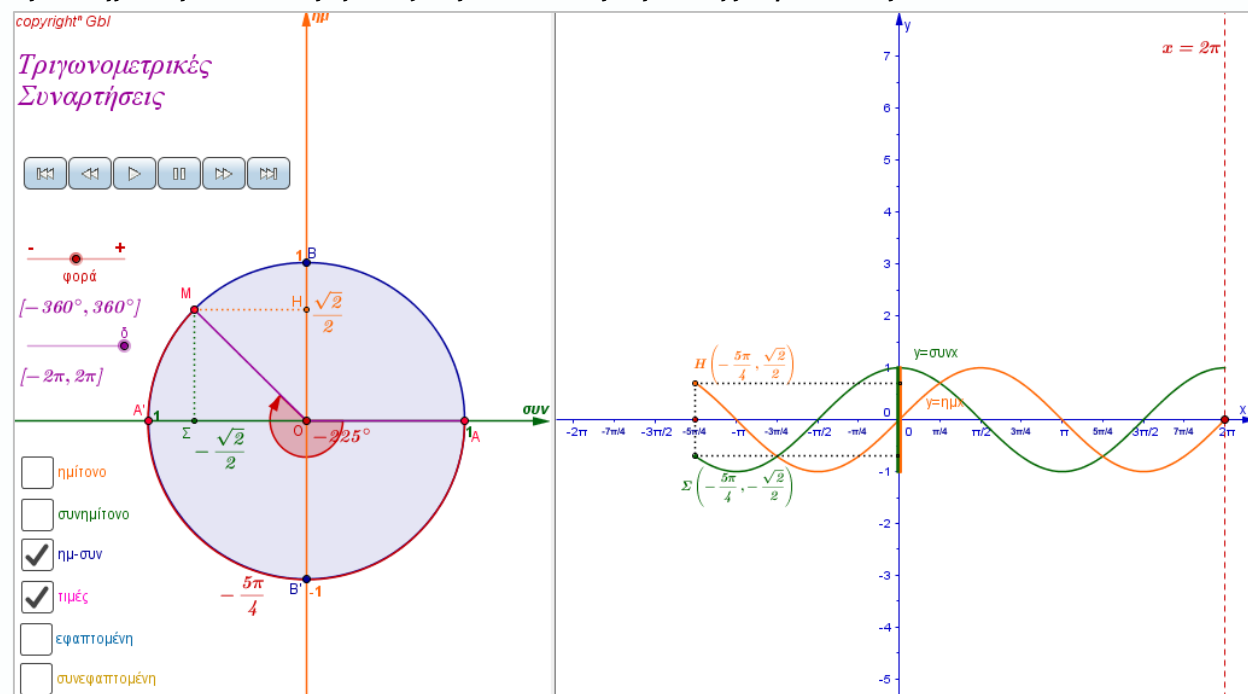
Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας, δημιουργούμε τα τόξα α , β που πληρούν τις σχέσεις $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \pm \beta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = \pm \pi$, με κλικ στο κατάλληλο σημείο μετακινούμε το τόξο β (αν χρειάζεται) ώστε η αρχή του να ταυτιστεί με την αρχή του τριγωνομετρικού κύκλου,



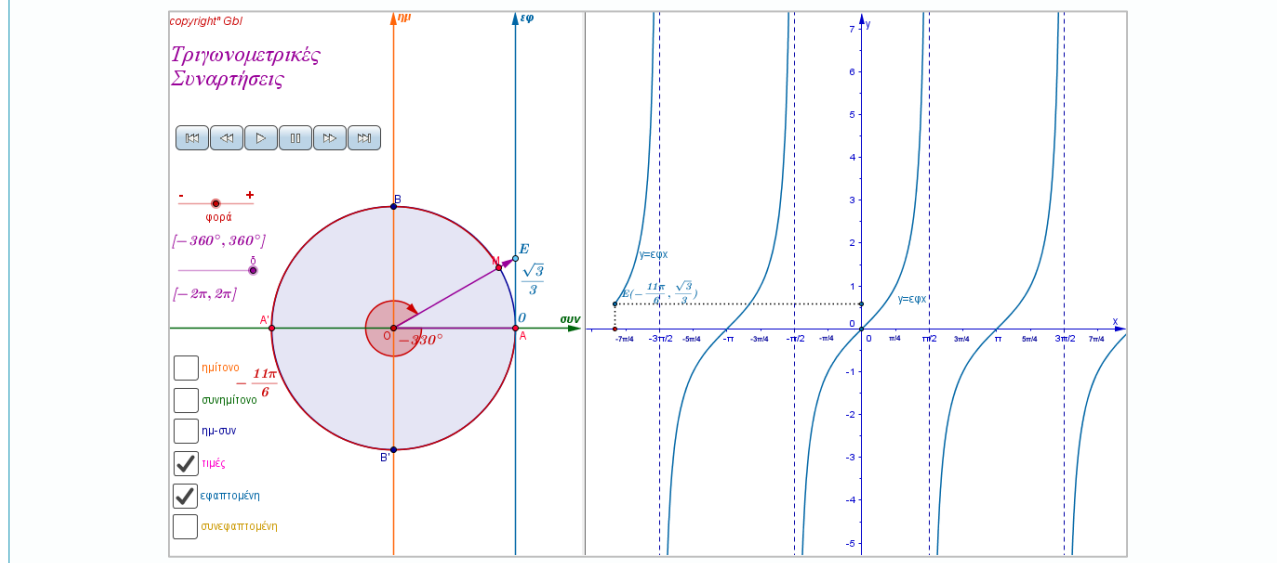
εμφανίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και ανακαλύπτουμε τις σχέσεις τους.



Δραστηριότητα 6: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γραφικές παραστάσεις

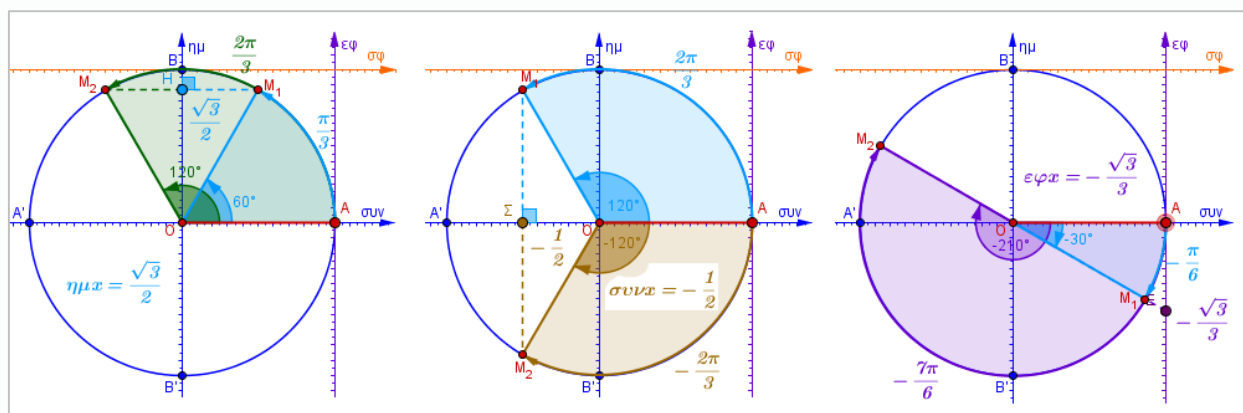


Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας, παρακολουθούμε ταυτόχρονα την εναλλαγή των τιμών των τριγωνομετρικών αριθμών, που προκαλεί η κίνηση του πέρατος του τόξου στον τριγωνομετρικό κύκλο στο αριστερό παράθυρο της οθόνης, τη δημιουργία των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων στο δεξί παράθυρο της οθόνης και ανακαλύπτουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, την περιοδικότητά τους, τα τόξα που συμπίπτουν οι τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών, κλπ.



Δραστηριότητα 7: Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Ακολουθώντας τις οδηγίες του φύλλου εργασίας, εντοπίζουμε το σημείο πάνω στον αντίστοιχο άξονα με συντεταγμένη την τιμή του τριγωνομετρικού της εξίσωσης και με διαδοχικά κλικ επάνω στα κατάλληλα σημεία, βρίσκουμε τα πέρατα των τόξων που οι αντίστοιχοι τριγωνομετρικοί αριθμοί επαληθεύουν την εξίσωση. Γνωρίζοντας δε από τη δραστηριότητα 3 τις αλγεβρικές σχέσεις των άπειρων τόξων με το ίδιο πέρασ, βρίσκουμε τη μορφή των άπειρων λύσεων της αντίστοιχης εξίσωσης.



3.5 Ρόλος του διδάσκοντα

Επιλέξτε από την παρακάτω λίστα τα βασικά χαρακτηριστικά του ρόλου του διδάσκοντα. Υπάρχει η δυνατότητα πολλαπλών επιλογών.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Διδακτικός | <input type="checkbox"/> Προπονητικός |
| <input checked="" type="checkbox"/> Ενθαρρυντικός | <input type="checkbox"/> Διαχειριστικός |
| <input type="checkbox"/> Υποστηρικτικός | <input type="checkbox"/> Μέντωρ |
| <input type="checkbox"/> Συμβουλευτικός | <input type="checkbox"/> Υποκινητικός |
| <input checked="" type="checkbox"/> Διευκολυντικός | <input type="checkbox"/> Κριτικός |
| <input checked="" type="checkbox"/> Συντονιστικός | <input type="checkbox"/> Επιμελητής περιεχομένου (curator) |
| <input type="checkbox"/> Ηγετικός | <input type="checkbox"/> Τεχνική υποστήριξη |
| <input type="checkbox"/> Διαμεσολαβητικός | <input type="checkbox"/> Άλλος ρόλος: <input type="text"/> |
| <input type="checkbox"/> Εποπτικός | |

4. Πηγές Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Περιεχομένου που αξιοποιήθηκαν

Πηγές του Ψηφιακού Εκπαιδευτικού Περιεχομένου που αξιοποιήθηκαν κατά τον σχεδιασμό της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής.

<http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B133/625/4031,18068/>

<http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B133/625/4031,18070/>

<http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B133/625/4031,18071/>

<http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B133/625/4031,18072/>

<http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B133/625/4031,18073/>

Τίτλος ψηφιακού πόρου: <http://www.geogebra.org>

5. Στοιχεία τεκμηρίωσης και επέκτασης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

5.1 Αποτελέσματα - Αντίκτυπος

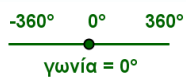
Καινοτομίες: Η γνωσιοθεωρητική προσέγγιση του μαθήματος γίνεται με σύγχρονες κοινωνικές και εποικοδομιστικές προσεγγίσεις, δηλαδή με δυναμικό τρόπο, απειρία μετασχηματισμών και πολλαπλές αναπαραστάσεις. **Ομαδοσυνεργατική** δουλειά για τη διαπραγμάτευση των απόψεων και τελικών συμπερασμάτων από τους μαθητές. **Φύλλα εργασίας** με προσεκτικά σχεδιασμένες οδηγίες χρήσης της εφαρμογής και ερωτήσεις. **Καθηγητής** στο ρόλο του εξυπηρετητή της μάθησης του μαθητή και όχι στο ρόλο του πομπού γνώσεων, που συνήθως συμβαίνει στο περιβάλλον μιας παραδοσιακής τάξης.

Προστιθέμενη αξία: Με τη χρήση των εφαρμογών των εκπαιδευτικών λογισμικών κάθε ομάδα μαθητών θα αλληλεπιδράσει, θα μετασχηματίσει δυναμικά, θα διερευνήσει και θα ανακαλύψει τις εξής έννοιες:

- ✓ **Ακτίνιο**, αριθμός π , **μήκος κύκλου**, **αντιστοιχία μοιρών – ακτινίων**: στο συμβατικό βιβλίο ο μαθητής διαβάζει και βλέπει μια στατική εικόνα, όπου περιγράφεται πως ο κύκλος καλύπτεται με μία κλωστή, η οποία κατόπιν μετατρέπεται σε ευθύγραμμο τμήμα και μετριέται με μονάδα την εκάστοτε ακτίνα του. Στην εφαρμογή του λογισμικού, ο μαθητής μετασχηματίζει την καμπύλη που καλύπτει τον κύκλο σε εφαπτόμενο στον κύκλο

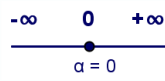
ευθύγραμμο τμήμα, μετράει το μισό αυτού με μονάδα την ακτίνα του κύκλου και κατόπιν μετασχηματίζει πάλι το ευθύγραμμο τμήμα σε ημικύκλιο, ανακαλύπτοντας ότι το μήκος του ημικυκλίου είναι $\pi = 3,14159\dots$ ακτίνες, ανεξάρτητα από το εκάστοτε μήκος της ακτίνας. Κατόπιν δίνονται στις ομάδες των μαθητών γωνίες σε μοίρες και τόξα σε ακτίνια και τους ζητείται να βρουν αλγεβρικά την αντιστοιχία μοιρών – ακτινίων και να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους με χρήση της εφαρμογής.

- ✓ **Τρόποι κίνησης πάνω στον κύκλο (ορισμός θετικής – αρνητικής φοράς):** Η χρήση της εφαρμογής η οποία δείχνει δύο κινητά κινούμενα με αντίθετη φορά πάνω σε κυκλικές ομόκεντρες τροχιές και ταυτόχρονα την κίνηση των δεικτών ρολογιού, επιτρέπει στον μαθητή να ανακαλύψει τους διαφορετικούς τρόπους κίνησης πάνω στον κύκλο και να ορίσει τη θετικής και αρνητική φορά περιστροφής.
- ✓ **Ορισμός – κατασκευή του τριγωνομετρικού κύκλου:** Παρουσιάζεται ο τριγωνομετρικός κύκλος, ως κύκλος ακτίνας 1, με προσαρτημένο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το σημείο τομής κύκλου – θετικού οριζώντιου ημιάξονα με την επισήμανση «αρχή τόξων», βέλος θετικής φοράς κίνησης και ζητείται από τους μαθητές η περιγραφή των χαρακτηριστικών του και ο τρόπος που καθορίζονται τα τεταρτημόριά του.
- ✓ **Θετικές – αρνητικές γωνίες – τόξα:** Ο μαθητής δίνοντας στον άξονα (δρομέα):



αντίθετες γωνίες (π.χ. 300, -300, 1250, -1250, 2250, -2250, κλπ) και κάνοντας κλικ στο κουμπί κίνησης, κατανοεί τι συμβολίζει το πρόσημο μπροστά από το μέτρο της γωνίας ή του αντιστοίχου τόξου.

- ✓ **Γωνίες μεγαλύτερες των 360 και μικρότερες των -360:** Ο μαθητής δίνοντας στον άξονα



(δρομέα): τιμές μεγαλύτερες του 360 ή μικρότερες του -360 και με κλικ στο κουμπί κίνησης, παρατηρεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί γωνία ή τόξο και του ζητείται η εύρεση αλγεβρικά του πέρατος αυτού του τόξου.

- ✓ **Άπειρα τόξα με το ίδιο πέρασ και αλγεβρική σχέση μεταξύ τους:** Δίνοντας πάνω στον



άξονα: τιμές θετικές ή αρνητικές και κάνοντας κλικ στο κουμπί κίνησης, ο μαθητής ανακαλύπτει, άπειρες γωνίες – τόξα κατά την θετική και κατά την αρνητική φορά με πέρασ το πέρασ του αντίστοιχου τόξου της δοθείσης γωνίας και την αλγεβρική σχέση γωνιών – τόξων με το ίδιο πέρασ.

- ✓ **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών – τόξων:** Ο μαθητής κάνοντας κλικ στο κουμπί κίνησης, παρατηρεί τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών πάνω στους αντίστοιχους άξονες, διατυπώνει τους ορισμούς στο φύλλο εργασίας και από την ομοιότητα των αντίστοιχων τριγώνων ανακαλύπτει τις αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών.

- ✓ **Τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων: $\alpha+\beta=0$, $\alpha\pm\beta=\pm\frac{\pi}{2}$, $\alpha\pm\beta=\pm\pi$:** Ο μαθητής δημιουργώντας στον τριγωνομετρικό κύκλο τόξα α , β που ικανοποιούν κάποια από τις παραπάνω σχέσεις, μετακινεί τα τόξα ώστε να έχουν αρχή την αρχή μέτρησης τόξων του τριγωνομετρικού κύκλου και παρατηρώντας τις τιμές των τριγωνομετρικών τους αριθμών ανακαλύπτει τις σχέσεις μεταξύ τους.
- ✓ **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γραφικές παραστάσεις:** Ο μαθητής με κλικ στο κουμπί κίνησης παρακολουθεί ταυτόχρονα, στην πρώτη οθόνη τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών στον τριγωνομετρικό κύκλο και στη δεύτερη οθόνη το σχηματισμό των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- ✓ **Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο:** Ο μαθητής, για κάθε τριγωνομετρική εξίσωση των μορφών: $\eta\mu\alpha = \alpha$, $\sigma\upsilon\eta\alpha = \alpha$, $-1 \leq \alpha \leq 1$, $\epsilon\phi\alpha = \beta$, $\sigma\phi\alpha = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, βρίσκει μετακινώντας σημείο πάνω στους άξονες, το σημείο με τεταγμένη ή τεταγμένη την τιμή α ή β και με κλικ στα αντίστοιχα σημεία εντοπίζει τα πέρατα των δύο τόξων του ικανοποιούν την αντίστοιχη ισότητα.

5.2 Σχέση με άλλες ανοιχτές εκπαιδευτικές πρακτικές

Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή αυτής της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής δεν βασίστηκε σε άλλη πρακτική.

5.3 Αξιοποίηση, Γενίκευση, Επεκτασιμότητα

Το σενάριο θα λέγαμε ότι αποτελεί ένα «πρότυπο» της ανακαλυπτικής μαθητοκεντρικής διδασκαλίας με χρήση Τ.Π.Ε. Με την ίδια φιλοσοφία μπορούμε να ανακαλύψουμε όλες τις έννοιες των μαθηματικών και της γεωμετρίας που απαιτούν σχήματα και χρειάζονται πολλαπλές αναπαραστάσεις για να γίνουν κατανοητές.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου: Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία: Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με την σαφήνεια των οδηγιών και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης: Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και αναπροσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα: Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον ή στην διδακτική ατζέντα ενός εκπαιδευτικού ή στην κουλτούρα μιας σχολικής τάξης είναι ένα από τα στοιχεία που το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα αν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

6. Πρόσθετο υλικό που αξιοποιήθηκε

Όλες οι προς μάθηση έννοιες παρουσιάζονται με επτά εφαρμογές του εκπαιδευτικού λογισμικού **CAS GeoGebra**, οι οποίες είναι κατασκευασμένες με τέτοιο τρόπο, ώστε ο μαθητής να τις χειρίζεται μόνο σύροντας ή επιλέγοντας αντικείμενα με το δείκτη του ποντικιού, χωρίς ιδιαίτερες γνώσεις χρήσης του λογισμικού.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

τετράδιο για να κρατούν σημειώσεις κατά την πορεία της διερεύνησης, να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους και να εκτελούν τις αλγεβρικές διαδικασίες όπου απαιτείται.

Βιβλίο για να ανατρέχουν σε προηγούμενες έννοιες.

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον διδάσκοντα και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση - ανακάλυψη των προς μάθηση εννοιών και διατύπωση των σχετικών κανόνων.

Γεωμετρικά όργανα για κατασκευές στο τετράδιο