



# Η έννοια του Φράκταλ: Από τη χιονονιφάδα του Κοχ μέχρι τη μέτρηση της διάστασης μιας ακτογραμμής

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Ανδρέας Λύκος, Μαθηματικός  
Ιορδάνης Καράουστας, Μαθηματικός

ΣΧΟΛΕΙΟ

3ο Γενικό Λύκειο Κομοτηνής

Κομοτηνή, Οκτώβριος 2018

## 1. Συνοπτική περιγραφή της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

Σε αυτήν την ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική αξιοποίησης ψηφιακού περιεχομένου γίνεται προσπάθεια να έρθουν οι μαθητές της Β' Λυκείου σε επαφή με την έννοια των αυτοομοίων σχημάτων (φράκταλ), συνδυάζοντας ενότητες των μαθηματικών που διδάσκονται στη σχολική τάξη, όπως είναι η γεωμετρική πρόοδος, η εξίσωση ευθείας και οι λογάριθμοι. Κεντρικός στόχος της διδακτικής παρέμβασης είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι οι θεωρητικές μαθηματικές γνώσεις που αποκτούν, έχουν ευρεία εφαρμογή σε πρακτικά προβλήματα. Χρησιμοποιώντας το μαθηματικό λογισμικό Geogebra και ειδικά σχεδιασμένα φύλλα εργασίας θα γνωρίσουν ένα από τα πλέον γνωστά φράκταλ, τη χιονονιφάδα του Κοχ, ενώ στη συνέχεια θα μετρήσουν την πολυπλοκότητα μιας ακτογραμμής.

Στο πρώτο μέρος της εκπαιδευτικής πρακτικής οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με τον αλγόριθμο δημιουργίας της χιονονιφάδας του Κοχ, θα αντιληφθούν την έννοια της αυτοομοιότητας, ενώ παράλληλα θα αναρωτηθούν για την περίμετρο της χιονονιφάδας, διαπιστώνοντας ότι είναι πρακτικά άπειρη. Στο δεύτερο μέρος, οι μαθητές θα κληθούν να μετρήσουν το μήκος της ακτογραμμής της Θράκης. Αξιοποιώντας μία ειδικά σχεδιασμένη εφαρμογή στο Geogebra θα διαπιστώσουν ότι ανάλογα με τη μονάδα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσουν θα βρίσκουν διαφορετικό αποτέλεσμα στο μήκος της ακτογραμμής. Έτσι, αν για παράδειγμα, κάποιος χρησιμοποιούσε την ακρίβεια ενός χιλιομέτρου, θα την έβρισκε μικρότερη από αυτή που πραγματικά είναι καθώς δεν θα μπορούσε να μετρήσει τις κοιλότητες που είναι μικρότερες από ένα χιλιόμετρο. Ομοίως, αν μετρήσει με την ακρίβεια ενός μέτρου, πάλι θα χάσει ορισμένες κοιλότητες. Το παράδοξο αυτό αποτέλεσμα, να βρίσκουμε διαφορετικό αποτέλεσμα στο μήκος της ακτογραμμής ανάλογα με τη μονάδα μέτρησης, θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο για να μετρήσουμε την πολυπλοκότητα της. Με τον τρόπο αυτό θα νιώσουν οι μαθητές «μικροί ερευνητές» καθώς θα κληθούν αξιοποιώντας τα σχολικά μαθηματικά και ένα δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας να μετρήσουν την πολυπλοκότητα της ακτογραμμής της Θράκης, καθώς επίσης και να τη συγκρίνουν με την αντίστοιχη πολυπλοκότητα άλλων ακτογραμμών.

Κατά τη διάρκεια της εφαρμογής της πρακτικής διαπιστώσαμε ότι η έννοια της αυτοομοιότητας κάνει ιδιαίτερα εντύπωση στους μαθητές. Συγκεκριμένα, αρχικά αδυνατούν να αντιληφθούν πώς μπορεί ένα σχήμα που εκτείνεται σε πεπερασμένο χώρο να έχει άπειρη περίμετρο. Ωστόσο, με την αξιοποίηση της έννοιας της γεωμετρικής πρόοδου, έχουν τη δυνατότητα οι μαθητές να διαπιστώσουν την αλήθεια του γεγονότος



αυτού. Εντύπωση προκάλεσε, επίσης, ότι η διαφορετική μονάδα μέτρησης μήκους μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα στη μέτρηση του μήκους τεθλασμένης γραμμής. Το συγκεκριμένο θέμα συζητήθηκε ευρέως στις ομάδες μαθητών και με την καθοδήγηση των διδασκόντων δόθηκε απάντηση στις απορίες των μαθητών κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας.

## 2. Σχεδιασμός της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

### 2.1 Στοιχεία σχεδιασμού

Στην ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική που σχεδιάσαμε οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με ένα πραγματικό μαθηματικό πρόβλημα (μέτρηση ακτογραμμής), ενώ ταυτόχρονα γνωρίζουν καλύτερα τη μορφολογία των ακτών της περιοχής τους (Θράκη). Το βασικό καινοτομικό στοιχείο είναι η εφαρμογή διαφορετικών -και ασύνδετων φαινομενικά- εννοτήτων των μαθηματικών (γεωμετρική πρόοδος, εξίσωση ευθείας, λογάριθμοι κ.α.).

Είναι, επίσης, σημαντικό να αναφερθεί ότι η χρήση ειδικά σχεδιασμένων εφαρμογών του Geogebra βοηθάει τους μαθητές, ώστε να αντιληφθούν τον τρόπο συσχέτισης των δύο μεταβλητών του προβλήματος (μονάδα μέτρησης, μήκος φράκταλ ή ακτογραμμής) και το γεγονός ότι η επιλογή της μονάδας μέτρησης επηρεάζει τη μέτρηση του μήκους της ακτογραμμής. Τέλος, οι μαθητές βιώνουν το συναίσθημα της ανακάλυψης, καθώς υπολογίζουν τη φράκταλ διάσταση της Θρακικής ακτογραμμής η οποία δεν έχει καταγραφεί πουθενά στη σχετική επιστημονική βιβλιογραφία.

### 2.2 Διδακτικοί στόχοι

Με την ολοκλήρωση της δραστηριότητας οι μαθητές στοχεύουμε να:

#### Στόχοι σχετικοί με το γνωστικό αντικείμενο:

- Αναγνωρίζουν κανονικότητες που τους οδηγούν στην εύρεση του  $n$ -στου όρου γεωμετρικής προόδου.
- Αντιληφθούν τον τρόπο που εφαρμόζονται οι τύποι της γεωμετρικής προόδου σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.
- Αντιληφθούν τη σημασία του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας.
- Κατανοήσουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων.
- Αντιληφθούν τον τρόπο συσχέτισης των δύο μεταβλητών του προβλήματος και την αναγκαιότητα κατασκευής της γραφικής τους παράστασης.

#### **Στόχοι σχετικοί με δεξιότητες που αφορούν στο γνωστικό αντικείμενο:**

- Αντιληφθούν τη σημασία της εικασίας σε μια μαθηματική εφαρμογή και να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα της απόδειξης.
- Μπορούν να μοντελοποιούν ένα μαθηματικό πρόβλημα.
- Αντιληφθούν τη σημασία της δημιουργίας γραφικής παράστασης με χρήση λογαριθμικής κλίμακας.
- Αντιληφθούν τη σημασία της κατασκευής της γραφικής παράστασης (βέλτιστη ευθεία) μη συννευθιακών σημείων που προκύπτουν από πειραματικές τιμές.

#### **Στόχοι σχετικοί με τη χρήση της τεχνολογίας:**

- Αντιληφθούν βιωματικά τη σημασία των ΤΠΕ στη διδασκαλία μαθηματικών εφαρμογών.
- Γνωρίσουν τα αποθετήρια εκπαιδευτικού υλικού και τις ψηφιακές δυνατότητες που προσφέρουν.
- Γνωρίσουν ένα ελεύθερο λογισμικό (Geogebra) και να αντιληφθούν την πρόσθετη διδακτική αξία που αυτό προσφέρει.

#### **Στόχοι σχετικοί με τις κοινωνικές δεξιότητες (π.χ. διαπραγμάτευση, συνεργασία, διάλογος, ενσυναίσθηση, συμμετοχή σε ομάδα, ανάληψη ρόλων, κ.λπ.):**

- Αναπτύξουν τη δημιουργική, κριτική τους σκέψη.
- Μάθουν την αξία της συνεργασίας και γενικότερα τη δύναμη της ομάδας.
- Κοινωνικοποιηθούν, να μάθουν να συζητούν για διδακτικά θέματα και να λαμβάνουν τη βέλτιστη απόφαση.

## **3. Πραγματοποίηση της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής**

### **3.1 Περιβάλλον – πλαίσιο**

Η ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του 3ου ΓΕΛ Κομοτηνής στο πλαίσιο της Δημιουργικής Εργασίας στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου. Για την πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων χρησιμοποιήθηκε προτζέκτορας, καθώς επίσης και υπολογιστές, ένας για κάθε ομάδα μαθητών και ένας για τον διδάσκοντα. Πριν την υλοποίηση της πρακτικής οι μαθητές είχαν διδαχθεί την έννοια και τις ιδιότητες των λογαρίθμων και κατά συνέπεια ήταν εφικτή η πλήρης ανάπτυξη των δραστηριοτήτων.

## 3.2 Ηλικιακή ομάδα

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική φοιτούσαν όλοι στη Β' Λυκείου και συγκεκριμένα ήταν μαθητές των Β3 και Β5 τμημάτων του 3ου ΓΕΛ Κομοτηνής (19 αγόρια και 26 κορίτσια). Σε όλα τα τμήματα του σχολείου υπάρχει ένα ποσοστό περίπου 20% Μουσουλμάνων μαθητών, οι οποίοι στην πλειοψηφία τους παρουσιάζουν γλωσσικές και γνωστικές αδυναμίες.

## 3.3 Πρότερες γνώσεις και διάρκεια εφαρμογής

Οι πρότερες γνώσεις που οφείλουν να έχουν οι μαθητές πριν την υλοποίηση της δραστηριότητας είναι οι εξής:

- Αναγνώριση του αριθμού των διαστάσεων ενός σχήματος.
- Κατανόηση της έννοιας και των τύπων της γεωμετρικής προόδου.
- Απεικόνιση ενός σημείου σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.
- Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία.
- Κατανόηση της έννοιας των λογαρίθμων.

Είναι γεγονός ότι η παρούσα εκπαιδευτική πρακτική συνδυάζει πληθώρα μαθηματικών εννοιών. Αν και κάποιες από αυτές ήταν γνωστές από το Γυμνάσιο και την Α' Λυκείου, τονίζεται ότι οι διδάσκοντες χρειάστηκε να υπενθυμίσουν πολλές από αυτές κατά τη διάρκεια υλοποίησης της δραστηριότητας.

Επίσης, σημειώνουμε ότι οι περισσότεροι από τους μαθητές κατείχαν βασικές δεξιότητες στο χρησιμοποιούμενο λογισμικό. Αξίζει, όμως, να σημειωθεί ότι αν και τα αρχεία Geogebra που χρησιμοποιήθηκαν δεν απαιτούν εξειδικευμένες γνώσεις του λογισμικού χρειάστηκε πολλές φορές οι διδάσκοντες να περιγράψουν αναλυτικά τα βήματα για τη σωστή εφαρμογή της δραστηριότητας.

Η διάρκεια εφαρμογής της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής ήταν 6 διδακτικές ώρες σε διάρκεια δύο εβδομάδων (3 ώρες / εβδομάδα).

### 3.4 Αναλυτική περιγραφή της πραγματοποίησης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

#### **Δραστηριότητα 1: Η έννοια του φράκταλ - Η χιονονιφάδα του Κοχ (2 διδακτικές ώρες)**

Είδος δραστηριότητας και οργάνωση τάξης: εργασία σε ομάδες, συζήτηση στην ολομέλεια και παρουσίαση

Ρόλος του διδάσκοντα: Κυρίως συμβουλευτικός και συντονιστικός

Σύνδεση με τον διδακτικό στόχο:

- α) να αναγνωρίζουν κανονικότητες που τους οδηγούν στην εύρεση του  $n$ -στου όρου γεωμετρικής πρόοδο
- β) να αντιληφθούν τον τρόπο που εφαρμόζονται οι τύποι της γεωμετρικής προόδου σε ένα μαθηματικό πρόβλημα)

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 3 ατόμων και τους μοιράζεται το Φύλλο Εργασίας "Φράκταλ - Χιονονιφάδα του Κοχ". Στο πρώτο στάδιο καλούνται να κάνουν κριτική ανάγνωση του ορισμού της έννοιας του Φράκταλ και στη συνέχεια να αναζητήσουν στο διαδίκτυο «φράκταλ αντικείμενα» και να προσπαθήσουν να εξηγήσουν τους λόγους που κάποιο από αυτά μπορεί να χαρακτηριστεί ως φράκταλ.

Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές ανοίγουν το αρχείο του Φωτόδεντρου (δείτε παρακάτω στο ψηφιακό υλικό) στο οποίο περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής ενός γνωστού φράκταλ της χιονονιφάδας του Κοχ. Ζητάμε από τους μαθητές να εργαστούν ομαδικά και να βρουν μία ακολουθία, στην οποία ο  $n$ -στος όρος θα δίνει το πλήθος των πλευρών της χιονονιφάδας στο  $n$ -στο βήμα δημιουργίας της. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και για το μήκος της πλευράς της χιονονιφάδας στο  $n$ -στο βήμα.

Αξιοποιώντας τους τύπους που δίνουν τον  $n$ -στο όρο του πλήθους των πλευρών και του μήκους της πλευράς, η κάθε ομάδα μαθητών καλείται να υπολογίσει τον γενικό τύπο που δίνει την περίμετρο της χιονονιφάδας στο  $n$ -στο βήμα δημιουργίας της. Ακολουθεί μία συζήτηση για τον τρόπο που αυξάνεται η περίμετρος σε κάθε βήμα και ζητείται από τους μαθητές να εικάσουν για την συνολική περίμετρο της χιονονιφάδας μετά από άπειρα βήματα δημιουργίας έχοντας ως στόχο να διαπιστώσουν το άπειρο μήκος του μαθηματικού αυτού «αντικειμένου». Η συζήτηση ολοκληρώνεται με αντίστοιχα συμπεράσματα για το πεπερασμένο εμβαδό της χιονονιφάδας του Κοχ.

## **Δραστηριότητα 2: Η έννοια της διάστασης στη γεωμετρία των φράκταλ (1 διδακτική ώρα)**

Είδος δραστηριότητας και οργάνωση τάξης: αρχικά παρουσίαση από τον διδάσκοντα και στη συνέχεια συζήτηση σε κάθε ομάδα

Ρόλος του διδάσκοντα: Διδακτικός, συμβουλευτικός και ενθαρρυντικός

Σύνδεση με τον διδακτικό στόχο:

- α) να κατανοήσουν της έννοιας της διάστασης
- β) να αντιληφθούν τη σημασία του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας

Στο πρώτο στάδιο γίνεται ανασκόπηση των γνώσεων των μαθητών πάνω σε ευκλείδεια σχήματα. Στόχος είναι οι μαθητές να θυμηθούν το αδιάστατο σημείο, την μονοδιάστατη ευθεία, τα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνο, τετράπλευρο, κύκλος κ.τ.λ.) και τα τρισδιάστατα γεωμετρικά στερεά (κύβος, πυραμίδα, σφαίρα κ.τ.λ.). Τονίζεται ότι στόχος είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τη διάσταση των ευκλείδειων σχημάτων μέσα από την οπτική της διάστασης φράκταλ. Για τον λόγο αυτό έχει σχεδιαστεί το Φύλλο Εργασίας "Η έννοια της διάστασης".

Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές ανοίγουν το αρχείο Geogebra "KochSnowflake" και καλούνται να συμπληρώσουν ανά ομάδα το υπολογιστικό φύλλο που υπάρχει στο αρχείο και να παρατηρήσουν το γράφημα που προκύπτει από τα στοιχεία που καταγράψανε. Στη συνέχεια τους ζητείται να βρουν την εξίσωση της ευθείας για να καταλήξουν τελικά στη διάσταση της Χιονονιφάδας του Κοχ. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο διδάσκων οφείλει να τονίσει ότι ο τρόπος εύρεσης της διάστασης αυτής είναι ανάλογος με τον τρόπο εύρεσης της διάστασης των βασικών ευκλείδειων σχημάτων που αναφέρθηκε στο πρώτο στάδιο. Είναι σημαντικό στο τέλος της δραστηριότητας να γίνει μία συζήτηση μεταξύ των μαθητών για τη σημασία της εύρεσης μη ακέραιας διάστασης σε ένα μαθηματικό «αντικείμενο».

## **Δραστηριότητα 3: Εύρεση της διάστασης της ακτογραμμής της Θράκης (2 διδακτικές ώρες)**

Είδος δραστηριότητας και οργάνωση τάξης: εργασία σε ομάδες, συζήτηση

Ρόλος του διδάσκοντα: Συντονιστικός, συμβουλευτικός και ενθαρρυντικός

Σύνδεση με τον διδακτικό στόχο:

- α) να κατανοήσουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων



β) να αντιληφθούν τον τρόπο συσχέτισης των δύο μεταβλητών του προβλήματος και την αναγκαιότητα κατασκευής της γραφικής τους παράστασης

Στη δραστηριότητα αυτή, που είναι το κυρίως μέρος της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής, οι μαθητές εργάζονται στο φύλλο εργασίας "**Υπολογισμός ακτογραμμής**", το οποίο και συμπληρώνουν κατά τη διάρκεια των μετρήσεων που κάνουν (με διαφορετική μονάδα μέτρησης) στην ακτογραμμή της Θράκης (αρχείο Geogebra: **Coastline dimension**).

Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τον μετρητή AB οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν το μήκος της ακτογραμμής της Θράκης έχοντας αρχικά ως μονάδα μέτρησης τα 40 km και να καταγράψουν το αποτέλεσμα στο υπολογιστικό φύλλο που υπάρχει στο αρχείο. Επαναλαμβάνουν τη διαδικασία με μονάδα μέτρησης  $AB = 20$  km και συνεχίζουν υποδιπλασιάζοντας συνεχώς μέχρι να είναι  $AB = 2,5$  km. Αφού καταγραφούν όλες οι μετρήσεις στο υπολογιστικό φύλλο το λογισμικό υπολογίζει τη βέλτιστη ευθεία που "περιγράφει" τα 5 σημεία που προέκυψαν από τις μετρήσεις. Αξιοποιώντας τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής βρίσκουμε τη διάσταση φράκταλ της ακτογραμμής (αναλυτικές οδηγίες για την υλοποίηση όλης της δραστηριότητας περιέχονται στο φύλλο εργασίας "**Υπολογισμός ακτογραμμής**")

### **Συμπέρασμα - Συζήτηση - Αξιολόγηση (1 διδακτική ώρα)**

Στην αρχή της 6ης διδακτικής ώρας έγινε μία ανασκόπηση των αποτελεσμάτων της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής και διεξήχθη συζήτηση που αφορούσε κυρίως την αναγκαιότητα διερεύνησης στη διδασκαλία των μαθηματικών και άλλων πρακτικών μαθηματικών εφαρμογών. Στο δεύτερο μισό της ώρας οι μαθητές συμπλήρωσαν το "**Φύλλο αξιολόγησης**" με το οποίο έγινε αξιολόγηση της πρακτικής.

Εκτός από τα φύλλα εργασίας και τα δύο αρχεία Geogebra χρησιμοποιήθηκε το εξής ψηφιακό υλικό:

**Φωτόδεντρο: Ψηφιακό Σχολείο - Άλγεβρα Α' Λυκείου, §5.3 , Άσκηση 11 Β' Ομάδας (Μικροπείραμα 1)**

## 4. Στοιχεία τεκμηρίωσης και επέκτασης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

### 4.1 Αποτελέσματα - Αντίκτυπος

Τα θετικά στοιχεία της οποιασδήποτε πρακτικής δεν εντοπίζονται μόνο στους διδακτικούς στόχους οι οποίοι επετεύχθησαν, αλλά και σε ποιο βαθμό και σε πόσο μεγάλο πλήθος μαθητών. Αν και τα αποτελέσματα που πήραμε από την τελική αξιολόγηση-ανατροφοδότηση είναι αρκετά ενθαρρυντικά, σίγουρα απαιτείται η εφαρμογή της πρακτικής και σε άλλα τμήματα της Β Λυκείου, αλλά είναι αναγκαίο να υπάρξουν και τμήματα που θα λειτουργήσουν ως ομάδες ελέγχου. Το πιο σημαντικό, ίσως, θετικό στοιχείο της πρακτικής αυτής είναι η συμμετοχή στη διαδικασία μάθησης μιας πολύ μεγαλύτερης μερίδας μαθητών, σε σχέση με την μετωπική διδασκαλία. Επίσης, θεωρούμε σημαντικό το γεγονός ότι στην παρούσα πρακτική χρησιμοποιήθηκαν πολλές διαφορετικές έννοιες από διαφορετικά κεφάλαια των μαθηματικών για την λύση ενός προβλήματος, γεγονός το οποίο είναι ελκυστικό στα μάτια των μαθητών. Τα φράκταλς, οι διαστάσεις του χώρου είναι έννοιες θολές στη Β Λυκείου και όταν φωτιστούν από οποιαδήποτε γωνία, το ενδιαφέρον των παιδιών είναι σχεδόν δεδομένο.

Αξίζει επίσης να τονιστεί ότι με την πρακτική αυτή οι μαθητές δεν κάνουν μαθηματικά για τα μαθηματικά, αλλά βλέπουν και την πρακτική εφαρμογή τους. Επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε το στοιχείο της σύγκρουσης με αντιλήψεις τις οποίες οι μαθητές θεωρούν δεδομένες. Όπως για παράδειγμα όταν -σε αντίθεση με τη διαίσθησή τους- παρατήρησαν ότι μία καμπύλη μπορεί να έχει άπειρο μήκος σε πεπερασμένο χώρο. Κατ' επέκταση διαπίστωσαν ότι το μήκος της ακτογραμμής μεταβάλλεται συναρτήσει της μονάδας μέτρησης την οποία χρησιμοποιούμε. Μέσα από την σύγκρουση με αυτά τα οποία θεωρούσαν δεδομένα, έρχεται το νέο, η ανακάλυψη, η γνώση, και αυτό είναι ένα από τα ζητούμενα της συγκεκριμένης εκπαιδευτικής πρακτικής.

Σε επίπεδο συμμετεχόντων καθηγητών υπήρξε μια άψογη συνεργασία μεταξύ δύο καθηγητών του σχολείου. Καλύπτοντας ο ένας τα κενά – ελλείψεις του άλλου και μέσα από αυτή την γόνιμη συνεργασία και πολλές συζητήσεις βρέθηκε μια κοινή γραμμή. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η συνεργασία των δύο συμμετεχόντων καθηγητών επεκτάθηκε στη συνέχεια και στην καθημερινή εκπαιδευτική διαδικασία.

Τέλος, παρατηρήσαμε ότι η εκπαιδευτική πρακτική συζητήθηκε εκτενώς στη σχολική κοινότητα, τόσο ανάμεσα στους μαθητές, όσο και ανάμεσα στους συναδέλφους καθηγητές. Είναι γεγονός ότι μαθητές από άλλα τμήματα της Β' Λυκείου μας ζήτησαν να

συμμετέχουν κι αυτοί σε μία ανάλογη δράση. Εξαιτίας του αυξημένου ενδιαφέροντος τα αποτελέσματα της πρακτικής παρουσιάστηκαν σε μία σχολική ώρα σε όλα τα τμήματα της Β΄ Λυκείου.

Μετά από ανατροφοδότηση στο τέλος αυτής της πρακτικής καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως οι περισσότεροι μαθησιακοί στόχοι επιτεύχθηκαν. Υπήρξε αυξημένο ενδιαφέρον από τους περισσότερους μαθητές και αρκετοί από αυτούς ζήτησαν να συνεχίσουμε με τέτοιου είδους εφαρμογές, οι οποίες συνδέουν την ευρύτερη επιστημονική γνώση με τα σχολικά μαθηματικά, διευρύνοντας τους ορίζοντες τους. Ωστόσο, αξίζει να επισημάνουμε και την αδιαφορία κάποιων μαθητών που στην πλειοψηφία τους είχαν ελάχιστες γνώσεις στο γνωστικό αντικείμενο και οι οποίοι δήλωσαν ότι θεωρούν ότι το θέμα δεν ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον.

Η καινοτομία της πρακτικής δεν έχει να κάνει μόνο με τα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιήθηκαν, αλλά και με την επέκταση των γνώσεων σε νέες έννοιες όπως αυτή της αυτοομοιότητας, του απείρου, της χιονονιφάδας του Κοχ κ.ά.. Με αυτόν τον τρόπο οι διδακτικοί στόχοι είναι πλαισιωμένοι από έννοιες οι οποίες κρατούν αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών και αυξάνουν την όρεξη τους για ανακάλυψη αλλά και εμπάθυση. Μοιάζει με αφήγηση μιας ιστορίας, η οποία έχει ανατροπές, μυστήριο, εξερεύνηση, στοιχεία που κρατούν αμείωτο το ενδιαφέρον των μαθητών και οδηγούν σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Κάτι τέτοιο έγινε εμφανές όταν στο τέλος αυτής της όμορφης ιστορίας – πρακτικής προσγειωθήκαμε στον πραγματικό κόσμο. Στα επόμενα μαθήματα υπήρξε νοσταλγία για την "περιπέτεια" που περάσαμε, αλλά και δυστυχώς μειωμένο ενδιαφέρον για την πεζή καθημερινότητα των σχολικών μαθηματικών, αλλά και της μετωπικής διδασκαλίας.

## 4.2 Απρόσμενα γεγονότα

Το πρώτο απρόσμενο στιγμιότυπο διαδραματίστηκε στο εργαστήριο πληροφορικής, όπου μια ομάδα μαθητών η οποία είχε μεγαλύτερη εξοικείωση με το Geogebra προχώρησε τον αλγόριθμο υπολογισμού μήκους ακτογραμμής σε περισσότερα βήματα από τα απαιτούμενα και έγινε αναφορά στην απείρως μικρή μονάδα μέτρησης. Οπότε άρχισε μια συζήτηση η οποία περιείχε έννοιες όπως το άπειρο, το άτομο και τα υποατομικά σωματίδια. Η όλη διαδικασία είχε διεπιστημονικό ενδιαφέρον καθώς ενεπλάκησαν και οι φυσικές επιστήμες. Επιπλέον, συζητήθηκαν οι έννοιες του απείρου και του ορίου, έννοιες στις οποίες θα εμβαθύνουν οι μαθητές στην Γ Λυκείου.

Το δεύτερο στιγμιότυπο αφορούσε μια ομάδα μαθητών οι οποίοι δεν συμμετείχαν ενεργά στην παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας. Κατά τη διάρκεια στην οποία όλοι οι μαθητές ασχολούνταν με το φύλλο εργασίας, υπήρχε μεγάλη κινητικότητα, έντονες συνομιλίες από την ομάδα τους. Πλησιάζοντας ο διδάσκων για να τους παρατηρήσει (καθώς υποψιάστηκε ότι το θέμα τους ήταν κάτι το οποίο δεν αφορούσε το φύλλο εργασίας) έκπληκτος διαπίστωσε ότι όχι μόνο ασχολούνταν με το φύλλο εργασίας, αλλά μάλιστα ήταν και από τις πιο προχωρημένες ομάδες μέσα στην τάξη. Η ανεπάρκεια τους σε μερικές από τις προαπαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις οι οποίες ήταν απαραίτητες για την συνέχιση του φύλλου εργασίας ήταν η αφορμή της έντονης συζήτησης, οπότε με μια μικρή βοήθεια από τον διδάσκοντα οι απαντήσεις βρέθηκαν με τη βοήθεια στοχευμένων αναφορών στο σχολικό βιβλίο. Το γεγονός αυτό πιστεύουμε ότι είναι εξαιρετικά σημαντικό καθώς αποδεικνύει ότι με τα κατάλληλα ερεθίσματα όλοι οι μαθητές της τάξης μπορούν να εμπλακούν στην διαδικασία της εξερεύνησης, εμπέδωσης αλλά και συσχετισμού μαθηματικών εννοιών και σχέσεων, κάτι που η μετωπική διδασκαλία δεν μπορεί να πετύχει σε αυτό τον βαθμό.

### 4.3 Εκπαιδευτική τεχνική σε σημαντικά στιγμιότυπα

Στο πρώτο στιγμιότυπο όταν κάποιοι μαθητές χρειάστηκαν κάποιες βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις, ο διδάσκων τους παρότρυνε αφενός στο να τις αναζητήσουν στο βιβλίο και αφετέρου στο να προσπαθήσουν να διαλευκάνουν τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών, αλλά και τη σχέση που αυτές έχουν με το πρόβλημα. Στη συνέχεια τους επιβράβευσε λεκτικά για την προσπάθεια κατανόησης που έκαναν.

Θεωρούμε ότι ήταν η καλύτερη δυνατή δράση καθώς ο διδάσκων δεν επιθυμούσε να ελαττωθεί η προσπάθεια της ομάδας, λόγω κάποιων γνωστικών εμποδίων. Επιπλέον, όμως, δεν είχε πρόθεση να γίνει απλή αναφορά σε προαπαιτούμενες γνώσεις χωρίς βαθύτερη εμπέδωση των εννοιών. Τελικά, κρίνοντας και από τα επόμενα μαθήματα, η ομάδα των μαθητών που αντιμετώπιζε προβλήματα στο γνωστικό αντικείμενο ήταν πιο προσηλωμένη κατά τη διάρκεια του μαθήματος και με φανερά τα σημάδια της αυτοπεποίθησης.

Στο δεύτερο στιγμιότυπο ο διδάσκων κράτησε μια ουδέτερη στάση. Συγκεκριμένα, επέλεξε να λειτουργεί κυρίως συμβουλευτικά, ώστε να προχωρήσουν οι μαθηματικοί και μόνο συλλογισμοί, ενώ στα θέματα που άγγιζαν άλλες επιστήμες, δήλωσε σχεδόν πλήρη άγνοια, αναφέροντας μόνο κάποιες λέξεις τις οποίες είχε ακούσει στις συζητήσεις σε μια

ομάδα μαθητών (άτομο, υποατομικό κ.τ.λ.) οι οποίες όμως έχρηζαν περαιτέρω διερεύνησης. Το γεγονός αυτό παρείχε σε κάποιους από τους μαθητές το κίνητρο να διερευνήσουν περαιτέρω τις έννοιες αυτές και στο επόμενο μάθημα ανέλαβαν τον ρόλο να ενημερώσουν την τάξη σχετικά. Μια αλλαγή, λοιπόν, της σχέσης καθηγητή/μαθητή η οποία ξάφνιασε ευχάριστα το τμήμα, έδωσε αυτοπεποίθηση στα παιδιά, και έδειξε πως μπορούν να στηρίζονται στις δυνάμεις τους για την ανακάλυψη εννοιών αλλά και επιστημονικών ιδεών. Η εμπάθυνση και διερεύνηση δεν έγινε βεβιασμένα, αλλά αυθόρμητα και αποτέλεσε φυσική συνέχεια των αρχικών στόχων των δραστηριοτήτων.

## 4.4 Σχέση με άλλες ανοιχτές εκπαιδευτικές πρακτικές

Η ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική σχεδιάστηκε με στόχο τη σύνδεση των μαθηματικών με ένα πραγματικό μαθηματικό πρόβλημα, μέσω του οποίου αναδεικνύεται η σχετικά μικρή πολυπλοκότητα που παρουσιάζουν οι ακτές της Θράκης. Επίσης, στην παρούσα πρακτική μελετάται η έννοια της αυτοομοιότητας και γενικότερα των μαθηματικών "αντικειμένων" που ονομάζονται φράκταλς, τα οποία εμφανίζονται με διάφορους τρόπους σε φυσικά, κοινωνιολογικά κ. ά. φαινόμενα.

Η παρούσα πρακτική σχετίζεται άμεσα με άλλη ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική που είναι αναρτημένη στο Φωτόδεντρο:

τίτλος : Sierpinski carpet - λόγος, γενικός τύπος, άθροισμα  $n$  πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

url: <http://photodentro.edu.gr/oep/r/8532/598?locale=el>

## 4.5 Αξιοποίηση, γενίκευση, επεκτασιμότητα

Θα είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον η παρούσα πρακτική να πραγματοποιηθεί σε άλλες περιοχές της Ελλάδας. Σχολεία από διάφορα γεωμετρικά διαμερίσματα θα μπορούσαν να μετρήσουν τη φράκταλ διάσταση των ακτογραμμών της Μακεδονίας, της Στερεάς Ελλάδας, της Πελοποννήσου, της Κρήτης κ.τ.λ.. Σε ένα επόμενο στάδιο θα μπορούσε να υπάρξει μία διαδικτυακή βάση δεδομένων όπου θα καταγράφονται όλες οι μετρήσεις των μαθητών, ενώ μέσω ενός προγράμματος επικοινωνίας σχολείων (π.χ. e-twinning) οι μαθητές θα μπορούσαν να συζητούν τα αποτελέσματα των μετρήσεων και να εξάγουν

συμπεράσματα σχετικά με τη μορφολογία των ακτών της χώρας μας, καθώς και για τα γεωλογικά φαινόμενα που την επηρέασαν. Σε μία τέτοια περίπτωση κρίνεται απαραίτητη η πρακτική να οργανωθεί από κοινού με καθηγητές άλλων ειδικοτήτων (Γεωλόγους, Χημικούς κ.α.) και να εμπλουτιστεί περαιτέρω και με δραστηριότητες που άπτονται του αντικειμένου των ειδικοτήτων αυτών.

## 5. Πρόσθετο υλικό που αξιοποιήθηκε

### Βιβλία

Μιλώντας στην Αθηνά για το Χάος και την Πολυπλοκότητα (Τ. Μιχαηλίδης, Τ. Μπούντης - εκδόσεις Πατάκη)

### Χάρτες

<https://www.google.com/maps> (γεωγραφικός χάρτης της Θράκης)

### Websites

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1889>

<http://photodentro.edu.gr/oep/r/8532/598?locale=el>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension)

<https://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html>

<http://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-4.html>

### Ελεύθερο Λογισμικό

Geogebra (<https://www.geogebra.org/>)