



ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΕΧΝΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Νικόλαος Τερψιάδης, *ΠΕ03 Μαθηματικός*

ΣΧΟΛΕΙΟ

Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας



ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, 2018

1.Συνοπτική περιγραφή της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση αυτής της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής βασίζεται στην ιδέα της δημιουργίας ενός γνωστικού υποβάθρου το οποίο μπορεί να διευκολύνει και να κάνει αποτελεσματικότερη τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου. Το υπόβαθρο αυτό στηρίζεται στην διεύρυνση της έννοιας της συμμετρίας, που είναι γνωστή στους μαθητές από το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Επιχειρείται η διαπραγμάτευση των ισομετριών της μετατόπισης, της ανάκλασης, της στροφής και της ολισθανάκλασης, όχι με τον τυπικό τρόπο της θεωρίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών αλλά με μία περισσότερο διαισθητική-εμπειρική προσέγγιση. Για να επιτευχθεί αυτό αξιοποιούνται έργα του Ολλανδού εικαστικού καλλιτέχνη M. C. Escher, τα οποία διαθέτουν το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται για αυτό τον σκοπό καθώς διαπραγματεύονται τις ισομετρίες με έναν ενδιαφέροντα και ελκυστικό τρόπο.

Στην πρώτη δραστηριότητα, οι μαθητές επεξεργάζονται κάποια μικροπειράματα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας προκειμένου να ανακαλέσουν τις ιδέες που έχουν για τη συμμετρία από τα μαθηματικά του Δημοτικού και του Γυμνασίου και να τις διευρύνουν ενσωματώνοντας τις νέες ιδέες για τις ισομετρίες της μετατόπισης, της ανάκλασης, της στροφής και της ολισθανάκλασης.

Στη δεύτερη δραστηριότητα, οι μαθητές εργαζόμενοι ομαδικά στο πλαίσιο μιας προσέγγισης φθίνουσας καθοδήγησης, διαπραγματεύονται περισσότερα έργα του Escher όπου, χωρίς τη βοήθεια του περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας, καλούνται να ενεργοποιήσουν τη σκέψη και τη φαντασία τους, να αυτενεργήσουν και να προσπαθήσουν να αναγνωρίσουν τις ισομετρίες που υλοποιούνται σε αυτά εφαρμόζοντας την αποκτηθείσα γνώση σε νέο περιβάλλον.

Η τρίτη δραστηριότητα, δεν είναι μία αυτοτελής δραστηριότητα. Σχεδιάστηκε με σκοπό να ενσωματώνεται κάθε φορά στη διαπραγμάτευση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Αναμένεται να αξιοποιήσουν οι μαθητές την οπτική εξοικείωση με τα γεωμετρικά σχήματα που καλλιέργησαν μέσω της διαπραγμάτευσης των γεωμετρικών μετασχηματισμών, ώστε να οικοδομήσουν μία στρατηγική ανακάλυψης των κανονικοτήτων που υλοποιούνται στο σχήμα ενός γεωμετρικού προβλήματος. Αυτές οι κανονικότητες θα αποτελέσουν στη συνέχεια τα δομικά στοιχεία της απόδειξης.

2. Σχεδιασμός της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

2.1 Στοιχεία σχεδιασμού

Αυτή η ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική βασίζεται στην ιδέα της αναγκαιότητας για “οπτική εξοικείωση” των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα, δηλαδή την ενίσχυση της ικανότητάς τους να παρατηρούν, να διακρίνουν και να αντιλαμβάνονται γεωμετρικά σχήματα, γεωμετρικές ιδιότητες, γεωμετρικές σχέσεις και γενικότερα να εντοπίζουν τις κανονικότητες που υλοποιούνται στο πλαίσιο ενός προβλήματος γεωμετρίας, όπως αυτό αποκρυσταλλώνεται στο σχήμα. Συχνά ο διδάσκων του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου θεωρεί αυτονόητο ότι ο μαθητής “βλέπει” αυτές τις κανονικότητες όταν σχεδιάζει ή όταν του παρουσιάζεται ένα σχήμα κατά τη διαπραγμάτευση της επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος. Αυτό όμως πολύ συχνά δεν συμβαίνει με αποτέλεσμα πολλοί μαθητές να αντιμετωπίζουν μικρές ή μεγάλες δυσκολίες από την αρχή ακόμη της διαπραγμάτευσης ενός γεωμετρικού προβλήματος.

Στη σχετική βιβλιογραφία αναδεικνύεται ο θετικός ρόλος της οπτικοποίησης (visualization) στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων. Δεδομένα όμως από το πεδίο της εξελικτικής Ψυχολογίας θεωρούν την οπτική εξοικείωση με τα γεωμετρικά σχήματα, ως απαραίτητο στάδιο για το πέρασμα σε πιο σύνθετες δραστηριότητες, όπως είναι οι αποδείξεις ή οι γεωμετρικές κατασκευές. Οι έννοιες της οπτικής εξοικείωσης και του οπτικού εγγραμματισμού, εννοούμενου ως ικανότητα χρήσης, κριτικής αποτίμησης και δημιουργίας οπτικών εννοιών και παραγωγής οπτικών μηνυμάτων, αποτελούν κεντρικούς πυλώνες του θεωρητικού πλαισίου αυτής της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής.

2.2 Διδακτικοί στόχοι

A. Στόχοι σχετικοί με το γνωστικό αντικείμενο:

Οι μαθητές,

1. να ανακαλέσουν και να εμβαθύνουν στις έννοιες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας.

2. να διευρύνουν οι μαθητές την έννοια της συμμετρίας ενσωματώνοντας την έννοια της ισομετρίας και των γεωμετρικών μετασχηματισμών της μετατόπισης, της ανάκλασης της στροφής και της ολισθανάκλασης.

3. να διατυπώσουν μία περιγραφή των γεωμετρικών μετασχηματισμών της μετατόπισης, της ανάκλασης της στροφής και της ολισθανάκλασης.

4. να αντιληφθούν την έννοια της πλακόστρωσης (tessellation) και τις διασυνδέσεις της με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

B. Στόχοι σχετικοί με δεξιότητες που αφορούν στο γνωστικό αντικείμενο:

Οι μαθητές,

1. να είναι ικανοί να ανακαλύπτουν τις κανονικότητες που ενυπάρχουν σε ένα εικαστικό έργο ή στο σχήμα ενός προβλήματος γεωμετρίας, μέσω της αναγνώρισης των γεωμετρικών μετασχηματισμών που υλοποιούνται σε αυτό.

2. να είναι ικανοί να ανακαλύπτουν τα στοιχεία που είναι απαραίτητα για την διατύπωση μιας αποδεικτικής διαδικασίας.

3. να είναι ικανοί να δημιουργούν εικασίες και να εφαρμόζουν ανακαλυπτικές διαδικασίες στο πλαίσιο της επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος.

Γ. Στόχοι σχετικοί με τη χρήση της τεχνολογίας:

Οι μαθητές,

1. να αξιοποιήσουν τις δυνατότητες που προσφέρει το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας για να εμβαθύνουν στην κατανόηση της λειτουργίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

2. να αναπτύξουν δεξιότητες χρήσης του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geogebra.

Δ. Στόχοι σχετικοί με τις κοινωνικές δεξιότητες (π.χ. διαπραγμάτευση, συνεργασία, διάλογος, ενσυναίσθηση, συμμετοχή σε ομάδα, ανάληψη ρόλων, κ.λπ.):

Οι μαθητές,

1. να αναπτύξουν δεξιότητες συνεργασίας στο πλαίσιο της συμμετοχής τους σε ομαδοσυνεργατικές εκπαιδευτικές δραστηριότητες.

2. να ενισχύσουν το πολιτισμικό τους κεφάλαιο, διευρύνοντας την οπτική τους για τα μαθηματικά και τη σχέση τους με την τέχνη.

3. Πραγματοποίηση της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

3.1 Περιβάλλον – πλαίσιο

Αυτή η ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου. Για την υλοποίησή της χρειάζεται η μερική τροποποίηση του αναλυτικού προγράμματος και η χρησιμοποίηση του εργαστηρίου υπολογιστών του σχολείου.

3.2 Ηλικιακή ομάδα

Αυτή η ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική εφαρμόστηκε σε δύο τμήματα της Α΄ Λυκείου (15 κορίτσια και 12 αγόρια στο ένα τμήμα και 12 κορίτσια και 15 αγόρια στο άλλο), με μικρό ποσοστό μαθητών ξένων εθνικοτήτων, πλήρως ενσωματωμένων, σε μία σχετικά υποβαθμισμένη αστική περιοχή.

3.3 Πρότερες γνώσεις και διάρκεια εφαρμογής

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις, σε σχέση με το γνωστικό αντικείμενο της Γεωμετρίας, για τη διεξαγωγή της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής είναι οι έννοιες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας. Είναι καλό αλλά όχι απολύτως απαραίτητο, οι μαθητές να έχουν κάποιες βασικές γνώσεις του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Η αρχική διάρκεια εφαρμογής της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής είναι 6 διδακτικές ώρες, οι οποίες είναι πλήρως αφιερωμένες σε αυτή την ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική, όμως η εφαρμογή της επεκτείνεται σε όλο το εύρος της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου, αφού βρίσκει εφαρμογή στο μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας και των ασκήσεών της.

3.4 Αναλυτική περιγραφή της πραγματοποίησης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1: Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στα έργα του Escher

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Είδος δραστηριότητας: Επεξεργασία μικροπειραμάτων, συζήτηση, παρουσίαση.

Οργάνωση τάξης: Ατομικά στον Η/Υ, στη συνέχεια εργασία σε ομάδες 5-6 ατόμων.

Ρόλος του διδάσκοντα: Συντονιστικός, υποστηρικτικός και σε συγκεκριμένα σημεία διδακτικός.

Σύνδεση με τους διδακτικούς στόχους:

A1, A2, A3, A4, Γ1, Γ2, Δ1, Δ2

Ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο:

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2191>

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2173>

ΠΟΙΑ Η ΘΕΣΗ ΤΗΣ ΣΗΜΑΙΑΣ;

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2174>

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ, ΣΤΡΟΦΕΣ ΚΑΙ ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1050?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/p6nhxwua>

Η ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1052?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/Fgzhs7Tz>

Η ΤΕΤΡΑΠΛΗ ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1051?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/kzxspm5z>

ΔΙΠΛΗ, ΤΡΙΠΛΗ ΚΑΙ ΕΞΑΠΛΗ ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1053?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/CswXJ6Z7>

Περιγραφή:

Αρχικά, οι μαθητές επεξεργάζονται ατομικά, ο καθένας σε έναν Η/Υ, τα μικροπειράματα “ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ”, “ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ” και “ΠΟΙΑ Η ΘΕΣΗ ΤΗΣ ΣΗΜΑΙΑΣ;” προκειμένου να ανακαλέσουν τις έννοιες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας, οι οποίες τους είναι γνωστές από τα μαθηματικά του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Στη συνέχεια, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες 5-6 ατόμων με σκοπό να δώσουν μία περιγραφή της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας και έναν τρόπο κατασκευής σχημάτων συμμετρικών ως προς ευθεία και ως προς σημείο. (Ο χωρισμός σε ομάδες έγινε από τον διδάσκοντα με κριτήριο τον σχετικό ισομοιρασμό αγοριών και κοριτσιών στις ομάδες, δεδομένου ότι η υλοποίηση της δραστηριότητας έγινε στην αρχή του σχολικού έτους, στην Α΄ Λυκείου, που οι περισσότεροι μαθητές δεν γνωρίζονταν ακόμη πολύ καλά μεταξύ τους.) Ακολουθώντας, οι ομάδες των μαθητών παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους και ο διδάσκων ανακεφαλαιώνει συνδέοντας την έννοια της αξονικής συμμετρίας με την έννοια της ανάκλασης και την έννοια της κεντρικής συμμετρίας με την έννοια της διπλής στροφής (στροφή 180 μοιρών) ώστε να επιτευχθεί η σύνδεση με τις ευρύτερες έννοιες της ισομετρίας και των γεωμετρικών μετασχηματισμών που θα ακολουθήσουν.

Στη δεύτερη φάση αυτής της δραστηριότητας, μετά από μία σύντομη παρουσίαση των εικαστικών δημιουργιών του Μ. C. Escher, οι μαθητές επεξεργάζονται ατομικά, ο καθένας σε έναν Η/Υ και με την καθοδήγηση του διδάσκοντος, τα μικροπειράματα “Η τετραπλή στροφή στον Escher”, “Διπλή, τριπλή και εξαπλή στροφή στον Escher”, “Η ολισθανάκλαση στον Escher” και “Μετατοπίσεις, στροφές και ολισθανάκλασεις στον Escher”, τα οποία διαπραγματεύονται το μαθηματικό υπόβαθρο των αντίστοιχων τεσσάρων έργων του

Escher. Στη συνέχεια, ζητείται από τις ομάδες των μαθητών να συζητήσουν και να προσπαθήσουν να περιγράψουν διαισθητικά (όχι απαραίτητα με μαθηματικούς όρους) τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που υλοποιούνται σε αυτά τα έργα. Αναμένεται, οι μαθητές να αναγνωρίσουν αρχικά τους μετασχηματισμούς της ανάκλασης και της διπλής στροφής και να προσεγγίσουν περιγραφικά τα άλλα είδη στροφής, την μετατόπιση και την ολισθανάκλαση. Αφού οι ομάδες παρουσιάσουν στην τάξη τα αποτελέσματα της αναζήτησής τους, ο διδάσκων ανακεφαλαιώνει συνοψίζοντας τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς της μετατόπισης, της ανάκλασης, της στροφής και της ολισθανάκλασης που υλοποιούνται στα έργα του Escher, συζητώντας ταυτόχρονα και την έννοια της πλακόστρωσης (tessellation) που χαρακτηρίζει τα έργα του.

Αποτελέσματα της δραστηριότητας:

Οι μαθητές, ολοκληρώνοντας την 1^η δραστηριότητα, έχουν ανακαλέσει τις έννοιες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας και έχουν διευρύνει την εικόνα που έχουν για την έννοια της συμμετρίας, ενσωματώνοντας τις έννοιες της ισομετρίας και των βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών ενώ ταυτόχρονα έχουν προσεγγίσει και την έννοια της πλακόστρωσης (tessellation). Στη συγκεκριμένη υλοποίηση, οι μαθητές κατάφεραν να διατυπώσουν με εύστοχους τρόπους μη τυπικές περιγραφές των γεωμετρικών των εννοιών της μετατόπισης, της ανάκλασης της στροφής και της ολισθανάκλασης. Επιπλέον, βελτίωσαν τις δεξιότητές τους στις ΤΠΕ μέσα από τη χρήση και αξιοποίηση των δυνατοτήτων του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Παράλληλα, βελτίωσαν τις δεξιότητες συνεργασίας εργαζόμενοι σε ομάδες και διεύρυναν την οπτική τους για τα μαθηματικά και τις αλληλεπιδράσεις τους με τις εικαστικές τέχνες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2: Εργαστήριο στον Escher

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Είδος δραστηριότητας: Εργαστήριο

Οργάνωση τάξης: Εργασία σε ομάδες 5-6 ατόμων.

Ρόλος του διδάσκοντα: Διευκολυντικός, ενθαρρυντικός.

Σύνδεση με τους διδακτικούς στόχους:

A2, A4, B1, Δ1, Δ2

Ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο:

Το ίδιο που χρησιμοποιήθηκε στην 1^η Δραστηριότητα αξιοποιείται και εδώ, οι μαθητές όμως το επεξεργάζονται πια, όχι ατομικά, αλλά σε ομάδες.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2191>

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2173>

ΠΟΙΑ Η ΘΕΣΗ ΤΗΣ ΣΗΜΑΙΑΣ;

<http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-2174>

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ, ΣΤΡΟΦΕΣ ΚΑΙ ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1050?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/p6nhxwua>

Η ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1052?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/Fgzhs7Tz>

Η ΤΕΤΡΑΠΛΗ ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1051?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/kzxspm5z>

ΔΙΠΛΗ, ΤΡΙΠΛΗ ΚΑΙ ΕΞΑΠΛΗ ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8525/1053?locale=el>

ή εναλλακτικά:

<https://www.geogebra.org/m/CswXJ6Z7>

Περιγραφή:

Στο πλαίσιο αυτής της Δραστηριότητας δίνονται αρχικά στις ομάδες των μαθητών τα φύλλα εργασίας 1 έως 6, τα οποία περιέχουν εικαστικές δημιουργίες του Μ. C. Escher και ζητείται από τους μαθητές να συζητήσουν στο πλαίσιο της ομάδας τους με σκοπό να αναγνωρίσουν και να καταγράψουν τις ισομετρίες (μετατοπίσεις, ανακλάσεις, στροφές και ολισθανακλάσεις) που υλοποιούνται σε αυτά τα έργα. Κάθε ομάδα έχει στη διάθεσή της έναν Η/Υ στον οποίο οι μαθητές μπορούν να ανατρέξουν για βοήθεια στα μικροπείραματα που επεξεργάστηκαν στην 1^η Δραστηριότητα.

Αφού οι μαθητές ολοκληρώσουν την εργασία τους στα 6 φύλλα εργασίας, τους δίνεται το πιο εκτενές 7^ο φύλλο εργασίας, το οποίο περιέχει στην πρώτη στήλη μοτίβα αρχαίας και παραδοσιακής τέχνης που προέρχονται από διάφορους πολιτισμούς και στη δεύτερη στήλη έργα του Μ. C. Escher. Ζητείται από τις ομάδες των μαθητών να αναγνωρίσουν τις ισομετρίες που υλοποιούνται στα μοτίβα και στα έργα του Escher και αφού εντοπίσουν σε ποια μοτίβα και σε ποια έργα του Escher υλοποιούνται οι ίδιες ισομετρίες, να τα αντιστοιχίσουν.

Στο πλαίσιο μιας προσέγγισης φθίνουσας καθοδήγησης, οι μαθητές δεν έχουν στη διάθεσή τους το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας των μικροπειραμάτων για τα έργα του Escher και για τα μοτίβα που πρέπει να επεξεργαστούν στα φύλλα εργασίας, οπότε καλούνται να ενεργοποιήσουν τη σκέψη και τη φαντασία τους, να αυτενεργήσουν και να προσπαθήσουν να εφαρμόσουν την αποκτηθείσα γνώση στο νέο περιβάλλον.

Αποτελέσματα της δραστηριότητας:

Τα φύλλα εργασίας αξιοποιήθηκαν και για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της συγκεκριμένης ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής. Στα φύλλα εργασίας 1 έως 6 οι ομάδες των μαθητών κατάφεραν να αναγνωρίσουν σωστά τις περισσότερες ισομετρίες που υπάρχουν στα έργα του Escher που τους δόθηκαν. Στο 7^ο φύλλο εργασίας, όπου και η δυσκολία τους εγχειρήματος ήταν μεγαλύτερη, οι μαθητές κατάφεραν σε ικανοποιητικό βαθμό να αναγνωρίσουν αρκετές από τις ισομετρίες των μοτίβων και των έργων του Escher και να αντιστοιχίσουν σωστά αρκετά μοτίβα στα ομόλογα έργα του Escher.

Γενικότερα, η προσέγγιση της φθίνουσας καθοδήγησης που επιλέχθηκε, ήταν αποτελεσματική. Οι μαθητές ενεργοποιήθηκαν, αυτενέργησαν και κατάφεραν να εφαρμόσουν πολύ ικανοποιητικά τις γνώσεις που απέκτησαν στο πλαίσιο της 1^{ης} Δραστηριότητας, στο νέο περιβάλλον των έργων του Escher και αρκετά ικανοποιητικά στο περισσότερο άγνωστο περιβάλλον των μοτίβων της αρχαίας και λαϊκής τέχνης. Η οργάνωση της τάξης σε ομάδες είχε θεαματικά αποτελέσματα ως προς την κοινωνική διάσταση της ενσωμάτωσης των νέων μαθητών του σχολείου (δεδομένου ότι η εκπαιδευτική πρακτική πραγματοποιήθηκε στην αρχή του σχολικού έτους σε μαθητές της

Α΄ Λυκείου) και ως προς τον βαθμό ικανοποίησης των μαθητών από την συγκεκριμένη εκπαιδευτική πρακτική. Οι μαθητές ανέπτυξαν σημαντικές δεξιότητες συνεργασίας στο πλαίσιο της εργασίας τους στις ομάδες. Επίσης, ενισχύθηκε το πολιτισμικό τους κεφάλαιο μέσα από τη διεύρυνση της οπτικής τους για τα μαθηματικά και τη σχέση τους με την τέχνη και γενικότερα για τη συμβολή τους στην ανάπτυξη των διαφόρων πολιτισμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3: Εφαρμογή

Διάρκεια: Η δραστηριότητα αυτή είναι ενδεικτική μιας σειράς δραστηριοτήτων που υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο της διδασκαλίας του μαθήματος της Ευκλείδειας γεωμετρίας καθ' όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους. Δεν πρόκειται για μια αυτόνομη δραστηριότητα που υλοποιείται σε συγκεκριμένο αριθμό διδακτικών ωρών αλλά για μία δραστηριότητα που ενσωματώνεται στη διαδικασία απόδειξης επιλεγμένων θεωρημάτων και στη διαδικασία επίλυσης επιλεγμένων ασκήσεων του σχολικού βιβλίου.

Είδος δραστηριότητας: Παρουσίαση, συζήτηση.

Οργάνωση τάξης: Η οργάνωση που υπάρχει στην τάξη κάθε φορά, είτε ατομικά, είτε σε ομάδες των 2 ατόμων (ανά θρανίο) είτε σε ομάδες των 5-6 ατόμων.

Ρόλος του διδάσκοντα: Ενθαρρυντικός, διευκολυντικός, συμβουλευτικός.

Σύνδεση με τον διδακτικό στόχο:

A2, B1, B2, B3, Γ1

Ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο:

Ενδεικτικά προβλήματα του σχολικού βιβλίου Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ τάξης Λυκείου σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Σημειώνονται οι ισομετρίες που υλοποιούνται στο σχήμα ή σε μέρος του σχήματος.

Άσκηση Εμπέδωσης 2 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/uujdya8t>

Άσκηση Εμπέδωσης 3 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/j7m52y7x>

Άσκηση Εμπέδωσης 4 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/ycsvhvj>

Άσκηση Αποδεικτική 1 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/ru8dand3>

Εφαρμογή 1 σελίδα 52

<https://www.geogebra.org/m/ameahvxz>

Σύνθετα θέματα 3 σελίδα 48

<https://www.geogebra.org/m/auxjxbvv>

Αποδεικτικές 4 σελίδα 54

<https://www.geogebra.org/m/kr628svz>

Σύνθετα θέματα 1 σελίδα 54

<https://www.geogebra.org/m/uz55rehb>

Περιγραφή:

Όπως προαναφέρθηκε, η δραστηριότητα αυτή είναι ενδεικτική και επαναλαμβάνεται πολλές φορές καθ' όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους όταν πρόκειται να διαπραγματευτούμε την απόδειξη ενός θεωρήματος ή την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ τάξης του Λυκείου. Αφού κάνουμε το σχήμα και καταγράφουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα του γεωμετρικού προβλήματος που θέλουμε να επιλύσουμε και πριν προχωρήσουμε στη συζήτηση της λύσης του, καλούμε τους μαθητές να εντοπίσουν τις ισομετρίες που υλοποιούνται σε όλο το σχήμα ή σε μέρος του σχήματος του προβλήματος. Συνήθως, κάποιοι μαθητές εντοπίζουν σωστά κάποιες ή όλες τις ισομετρίες που υπάρχουν στο σχήμα, ενώ κάποιοι μαθητές δεν μπορούν να δουν αυτές τις ισομετρίες, ιδιαίτερα όταν βασίζονται σε άξονες ή σε σημεία που δεν υποδεικνύονται από την εκφώνηση του θεωρήματος ή του προβλήματος και συνεπώς δεν υπάρχουν στο σχήμα. Με τη βοήθεια σχημάτων υλοποιημένων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (Geogebra) (βλ. ενδεικτικό ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο) βοηθούμε τους μαθητές να αντιληφθούν αυτές τις ισομετρίες και με βοήθειά τους να εντοπίσουν και να καταγράψουν τις κανονικότητες (ισότητες τμημάτων, γωνιών, σχημάτων) που υπάρχουν στο σχήμα. Μέσα σε αυτή την καταγραφή υπάρχουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος που προσπαθούμε να επιλύσουμε και όχι μόνον αυτά. Υπάρχουν δηλαδή σχέσεις που γνωρίζουμε ότι ισχύουν (δεδομένα), σχέσεις που θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν (ζητούμενα), σχέσεις που δεν γνωρίζουμε ότι ισχύουν αλλά μπορούν να στοιχειοθετηθούν από τα δεδομένα και να μας βοηθήσουν να αποδείξουμε τα ζητούμενα και ενδεχομένως σχέσεις που δεν

γνωρίζουμε ούτε μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν. Η συνεισφορά αυτής της καταγραφής στη διαδικασία ανακάλυψης της επίλυσης του προβλήματος από τον μαθητή είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς προκειμένου να ανακαλύψει ο μαθητής τα στοιχεία της επιχειρηματολογίας που απαιτεί η αποδεικτική πορεία που θα οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Στη συνέχεια αυτά τα στοιχεία πρέπει να οργανωθούν σε μία λογική δομή, η οποία θα αποτελέσει κομμάτι της αποδεικτικής διαδικασίας ή και ολόκληρη την αποδεικτική διαδικασία που οδηγεί στη λύση του προβλήματος (Η συγκεκριμένη εκπαιδευτική πρακτική δεν διαπραγματεύεται τη συντακτική πλευρά της απόδειξης αλλά μόνο την ανακαλυπτική της πλευρά).

Αποτελέσματα της δραστηριότητας:

Οι μαθητές, εντοπίζοντας τις ισομετρίες που υλοποιούνται στο σχήμα ή σε μέρος του σχήματος ενός θεωρήματος ή ενός προβλήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, έχουν στα χέρια τους ένα σημαντικό εργαλείο που τους βοηθά να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως “Από πού να ξεκινήσω την απόδειξη ενός γεωμετρικού προβλήματος; ” ή “Που να βρω στοιχεία-επιχειρήματα για να οργανώσω μία απόδειξη;”. Όταν η εφαρμογή αυτής της δραστηριότητας παρεμβλήθηκε πριν τη διαπραγμάτευση της λύσης ενός θεωρήματος ή ενός προβλήματος της Γεωμετρίας, κατάφεραν να ανταποκριθούν καλύτερα ιδίως οι μαθητές που αντιμετώπιζαν δυσκολίες με τη Γεωμετρία. Σε βάθος χρόνου, οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα να εντοπίζουν στο σχήμα κανονικότητες στις οποίες θα βασιστούν για να αναπτύξουν την ικανότητα διατύπωσης μιας τυπικής απόδειξης, που είναι και ένα κεντρικό ζητούμενο των στόχων του αναλυτικού προγράμματος για γνωστικό αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ και Β΄ Λυκείου.

4. Στοιχεία τεκμηρίωσης και επέκτασης της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής

4.1 Αποτελέσματα - Αντίκτυπος

Με την υλοποίηση αυτής της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής επιτεύχθηκε η καλλιέργεια της οπτικής εξοικείωσης των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα και η ενίσχυση της ικανότητάς τους να παρατηρούν, να διακρίνουν και να αντιλαμβάνονται γεωμετρικά σχήματα, γεωμετρικές ιδιότητες, γεωμετρικές σχέσεις και γενικότερα να εντοπίζουν τις κανονικότητες που υλοποιούνται στο πλαίσιο ενός προβλήματος

γεωμετρίας, όπως αυτό αποκρυσταλλώνεται στο σχήμα. Η μη τυπική προσέγγιση μέσω των εικαστικών δημιουργιών του Μ. C. Escher, δημιούργησε ένα ελκυστικό και ταυτόχρονα μαθησιακά αποτελεσματικό περιβάλλον που συνέβαλλε στον οπτικό εγγραμματισμό των μαθητών και είχε ως αποτέλεσμα τη διεύρυνση της οπτικής τους για το μάθημα των Μαθηματικών και τις διασυνδέσεις του με την Τέχνη, τον Πολιτισμό και τον πραγματικό κόσμο.

Οι μαθητές, έχοντας ως γνωστικό υπόβαθρο τους στοιχειώδεις γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (μετατόπιση, ανάκλαση, στροφή, ολισθανάκλαση), διαθέτουν ένα εργαλείο που τους βοηθά να αναπτύξουν μία στρατηγική αντιμετώπισης των γεωμετρικών προβλημάτων ενώ ταυτόχρονα καλλιεργεί την ικανότητά τους να κατανοούν, να αναπαράγουν και να στοιχειοθετούν από την αρχή μαθηματικές αποδείξεις.

Επίσης, οι μαθητές καλλιέργησαν δεξιότητες χρήσης ΤΠΕ και ανέπτυξαν δεξιότητες συνεργασίας και κοινωνικές δεξιότητες στο πλαίσιο της συμμετοχής τους στις ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες της ανοιχτής εκπαιδευτικής πρακτικής. Βελτίωσαν τη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά ανακαλύπτοντας όψεις τους που δεν υπάρχουν στο τυπικό αναλυτικό πρόγραμμα. Ταυτόχρονα, ενισχύθηκε το πολιτισμικό κεφάλαιο των μαθητών μέσα από τη διαπραγμάτευση των εικαστικών δημιουργιών του Escher και των αρχαίων και λαϊκών μοτίβων διαφόρων πολιτισμών. Η ανακάλυψη του κοινού μαθηματικού υποβάθρου αναδεικνύει την ιδέα ενός στοιχειώδους τρόπου γεωμετρικής σκέψης, κοινού σε πολλούς πολιτισμούς και ενισχύει την ιδέα της Τέχνης ως παγκόσμιας γλώσσας.

4.2 Απρόσμενα γεγονότα

Η εργασία σε ομάδες, ιδιαίτερα κατά την υλοποίηση της 2^{ης} Δραστηριότητας, συνέβαλε σημαντικά στην ενσωμάτωση των νέων μαθητών της Α΄ Λυκείου και στην ανάπτυξη καλών σχέσεων μεταξύ τους. Κατά την υλοποίηση της Δραστηριότητας, αναπτύχθηκε ένα κλίμα ευφορίας στο οποίο φαίνεται ότι συνέβαλε η ελκυστική μορφή της μη τυπικής διαπραγμάτευσης του μαθηματικού περιεχομένου των έργων τέχνης.

4.3 Εκπαιδευτική τεχνική σε σημαντικά στιγμιότυπα

Ο ρόλος του διδάσκοντα ήταν κυρίως υποστηρικτικός, διευκολυντικός και συμβουλευτικός χωρίς να υπάρχουν δραστικές διδακτικές παρεμβάσεις. Η μη τυπική διδακτική προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε βοήθησε στη δραστηριοποίηση των μαθητών και στην ανάπτυξη της αυτενέργειάς τους, ιδιαίτερα κατά την πραγματοποίηση της 2^{ης} Δραστηριότητας.

4.4 Σχέση με άλλες ανοιχτές εκπαιδευτικές πρακτικές

Η πρωτοτυπία της παρούσας εκπαιδευτικής πρακτικής έγκειται στο ότι αξιοποιεί ετερόκλητα στοιχεία όπως, ψηφιακό περιεχόμενο που δημιουργήθηκε για άλλους σκοπούς, μαθηματικό περιεχόμενο μη συναφές με το υπό διαπραγμάτευση θέμα (η θεωρία των γεωμετρικών μετασχηματισμών δεν είναι σχετική ούτε πάντα συμβατή με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, έργα τέχνης και πολιτισμικό υλικό, προκειμένου να επιτύχει κάποιους στόχους του τυπικού αναλυτικού προγράμματος του μαθήματος της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου.

4.5 Αξιοποίηση, γενίκευση, επεκτασιμότητα

Η παρούσα ανοιχτή εκπαιδευτική πρακτική μπορεί να αξιοποιηθεί σε ευρεία κλίμακα δεδομένου ότι δεν είναι ειδικού σκοπού και αποσκοπεί στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας της Α΄ τάξης Λυκείου και έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί από κάθε εκπαιδευτικό που διδάσκει το συγκεκριμένο μάθημα. Υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας πρόσθετου ψηφιακού υλικού που θα μπορούσε να υποστηρίξει και να εμπλουτίσει αυτή την εκπαιδευτική πρακτική.

5. Πρόσθετο υλικό που αξιοποιήθηκε

Αναφέρετε εδώ τυχόν πρόσθετο υλικό που αξιοποιήθηκε.

- Βιβλία
- Σημειώσεις
- Χάρτες
- Websites
- Λογισμικό

Αξιοποιήθηκε το ανοιχτό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra καθώς και εφαρμογές που σχεδιάστηκαν με τη βοήθεια αυτού του λογισμικού.

Έργα του Escher σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας:

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ, ΣΤΡΟΦΕΣ ΚΑΙ ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ESCHER

<https://www.geogebra.org/m/p6nhxwua>

Η ΟΛΙΣΘΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<https://www.geogebra.org/m/Fgzhs7Tz>

Η ΤΕΤΡΑΠΛΗ ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<https://www.geogebra.org/m/kzxspm5z>

ΔΙΠΛΗ, ΤΡΙΠΛΗ ΚΑΙ ΕΞΑΠΛΗ ΣΤΡΟΦΗ ΣΤΟΝ ESCHER

<https://www.geogebra.org/m/CswXJ6Z7>

Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας:

Άσκηση Εμπέδωσης 2 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/uujdya8t>

Άσκηση Εμπέδωσης 3 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/l7m52y7x>

Άσκηση Εμπέδωσης 4 σελίδα 43

<https://www.geogebra.org/m/yatszvhnj>

Άσκηση Αποδεικτική 1 σελίδα 43



<https://www.geogebra.org/m/ru8dand3>

Εφαρμογή 1 σελίδα 52

<https://www.geogebra.org/m/ameahvxz>

Σύνθετα θέματα 3 σελίδα 48

<https://www.geogebra.org/m/auxjxbvv>

Αποδεικτικές 4 σελίδα 54

<https://www.geogebra.org/m/kr628svz>

Σύνθετα θέματα 1 σελίδα 54

<https://www.geogebra.org/m/uz55rehb>