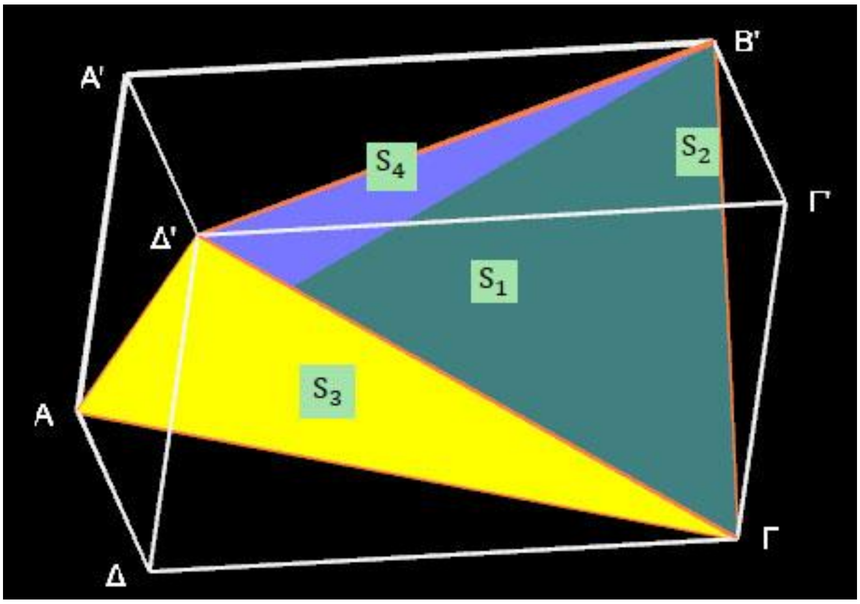
Θεμα 4/σελίδα 306

Συμβολίζουμε με P_1, P_2, P_3 τα εμβαδά των εδρών του παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΑ-Α'Β'ΓΆ' και με S_1, S_2, S_3, S_4 τα εμβαδά των εδρών του τετραέδρου ΑΓΒ'Δ'. Να δείξετε ότι:

1. $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$
2. Αν h_1, h_2, h_3, h_4 τα ύψη του τετραέδρου και d_1, d_2, d_3 οι αποστάσεις των απέναντι ακμών του τότε ισχύει

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}$$

Απόδειξη.



1. Έστω S_1 το εμβαδόν της έδρας ΑΓΒ', α η δίεδρη με ακμή την Β'Γ, β η δίεδρη με ακμή την ΑΓ, γ η δίεδρη με ακμή την ΑΒ', S_2 το εμβαδόν της έδρας Δ'ΓΒ', S_3 το εμβαδόν της έδρας ΑΓΔ' και S_4 το εμβαδόν της έδρας ΑΔ'Β'.

Σε προηγούμενο θέμα είχαμε αποδείξει τη σχέση

$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \text{συνφ} = \frac{1}{4}(\text{αβημθ})^2$, όπου φ η δίεδρη γωνία μιας ακμής S_1, S_2 τα εμβαδά των εδρών των δύο εδρών της ακμής, α το μήκος της ακμής, β το μήκος της απέναντι ακμής και θ η γωνία μεταξύ της ακμής και της απέναντι της.

Η σχέση αυτή για τη δίεδρη με ακμή την Β'Γ (την έχουμε συμβολίσει με α) δίδει

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \text{συνα} = \left(\frac{1}{2}\text{ΑΔ}' \cdot \text{Β}'\text{Γ} \cdot \text{ημθ}\right)^2 \quad (1)$$ όπου θ η γωνία των ασυμβάτων $\text{ΑΔ}', \text{Β}'\text{Γ}$

Είναι $\text{Β}'\text{Γ} = \text{Α}'\text{Δ}$ και η γωνία θ των ασυμβάτων $\text{ΑΔ}', \text{Β}'\text{Γ}$ είναι η γωνία των διαγωνίων του παραλληλογράμμου $\text{ΑΑ}'\text{Δ}'\text{Δ}$, άρα το δεύτερο μέλος της (1) είναι το εμβαδόν P_1 του παραλληλογράμμου $\text{ΑΑ}'\text{Δ}'\text{Δ}$. Έτσι η (1) γίνεται:

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \text{συνα} = P_1^2 \quad (2)$$

Όμοια από τη δίεδρη β με ακμή την ΑΓ έχουμε:

$$S_1^2 + S_3^2 - 2S_1 \cdot S_3 \cdot \text{συνβ} = P_2^2 \quad (3)$$

όπου P_2 το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΔΓΒ

Όμοια από τη δίεδρη γ με ακμή την έχουμε:

$$S_1^2 + S_4^2 - 2S_1 \cdot S_4 \cdot \text{συνγ} = P_3^2 \quad (4)$$

όπου P_3 το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $\text{ΓΓ}'\text{Δ}'\text{Δ}$

Προσθέτοντας τις (2),(3),(4) έχουμε:

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \text{συνα} + S_1^2 + S_3^2 - 2S_1 \cdot S_3 \cdot \text{συνβ} + S_1^2 + S_4^2 - 2S_1 \cdot S_4 \cdot \text{συνγ} = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \quad (5)$$

Το πρώτο μέλος της (5) γίνεται:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2S_1^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot συνα - 2S_1 \cdot S_3 \cdot συνβ - 2S_1 \cdot S_4 \cdot συνγ =$$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2S_1^2 - 2S_1 \cdot (S_2 \cdot συνα + S_3 \cdot συνβ + S_4 \cdot συνγ) =$$

Σε άλλο θέμα είχαμε αποδείξει ότι το $S_2 \cdot συνα + S_3 \cdot συνβ + S_4 \cdot συνγ$ είναι ίσο με S_1 άρα η τελευταία και στη συνέχεια η (5) γίνεται:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2S_1^2 - 2S_1 \cdot S_1 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \quad \text{και τελικά}$$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \quad (6)$$

2. Οι αποστάσεις d_1, d_2, d_3 μεταξύ των απέναντι ακμών του τετραέδρου είναι τα τρία ύψη του παραλληλεπιπέδου και αν V ο όγκος του τετραέδρου τότε 3V είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου, άρα:

$$3V = P_1 \cdot d1 \text{ ή } P_1 = \frac{3V}{d_1}$$

Όμοια

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot h_1 \text{ ή } \quad S_1 = \frac{3V}{h_1}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (6) προκύπτει η προς απόδειξη .