

Γραφήματα οικογένειας παραβολών

Η βολή ενός αντικειμένου στον αέρα έχει ως αποτέλεσμα μια καμπυλωμένη τροχιά, η οποία είναι πάντοτε μια **παραβολή**. Η παραβολή είναι το γράφημα μιας **δευτεροβάθμιας συνάρτησης**, δηλαδή οποιασδήποτε πολυωνυμικής συνάρτησης μιας μεταβλητής, που περιέχει ένα δευτεροβάθμιο όρο, ενώ κανένας άλλος όρος δεν είναι υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη του 2.

Στη δραστηριότητα αυτή θα κατασκευάσετε γραφήματα δευτεροβάθμιων συναρτήσεων της μορφής $y = a(x - b)^2 + c$.

Σχέδιο

- Βήμα 1: Ανοίξτε ένα νέο σχέδιο και επιλέξτε Ορισμός συστήματος συντεταγμένων από το μενού Γράφημα.
- Βήμα 2: Κατασκευάστε το σημείο Γ στον άξονα x και μετρήστε την τετμημένη του.
- Βήμα 3: Η συντεταγμένη x του σημείου Γ θα είναι η μεταβλητή x. Σύρτε το σημείο Γ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής του x_{Γ} .
- Βήμα 4: Θα αποτυπώσετε ένα σημείο της συνάρτησης $y = a(x - b)^2 + c$ με απώτερο σκοπό την αποτύπωση ολόκληρης της συνάρτησης. Το σημείο αυτό θα έχει τις συντεταγμένες $(x_{\Gamma}, a(x_{\Gamma} - b)^2 + c)$, καθώς $y = a(x - b)^2 + c$. Έχετε ήδη βρει μια έκφραση για το x_{Γ} αλλά χρειάζεστε ακόμη τιμές για τα a, b και c. Κατασκευάστε τρία σημεία στον άξονα y. Δημιουργήστε τις ετικέτες a, b και c, αντίστοιχα, για τα σημεία.
- Βήμα 5: Βρείτε τις τεταγμένες κάθε σημείου. Αυτές οι συντεταγμένες y είναι οι τιμές των a, b και c.
- Βήμα 6: Το σχέδιό σας πρέπει να εμφανίζει τώρα μετρήσεις των y_a , y_b και y_c . Ο τύπος της παραβολής θα γίνει πολύ πιο σαφής αν αντικαταστήσετε τα a, b και c με αυτές τις τιμές. Με το εργαλείο κειμένου (όχι το εργαλείο βέλους επιλογής) κάντε διπλό κλικ στο y_a και αλλάξτε στην ετικέτα της μέτρησης το $y[a]$ σε a. Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία για την αλλαγή του y_b σε b και του y_c σε c.
- Βήμα 7: Εφόσον έχετε μια μεταβλητή, το x_{Γ} , και ένα σύνολο από σταθερές, τα a, b και c, μπορείτε τώρα να υπολογίσετε μια τιμή του y για τη δευτεροβάθμια συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε αυτές τις τιμές στην οθόνη σας και στον Υπολογιστή για τη δημιουργία της έκφρασης $y = a(x_{\Gamma} - b)^2 + c$. Σύρτε το σημείο Γ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής της τιμής y της συνάρτησης όταν αλλάζει η μεταβλητή x_{Γ} .

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

Βήμα 8: Για την αποτύπωση ενός διατεταγμένου ζεύγους της δευτεροβάθμιας συνάρτησης, επιλέξτε κατά σειρά τα x_Γ και $a(x_\Gamma - b)^2 + c$, καθώς και την εντολή Αποτύπωση με (x, y) από το μενού Γράφημα. Σύρτε το σημείο Γ για να αλλάξει το x_Γ και παρατηρήστε διαφορετικά σημεία της δευτεροβάθμιας συνάρτησης. Μπορείτε να δείτε το σχήμα της παραβολής;

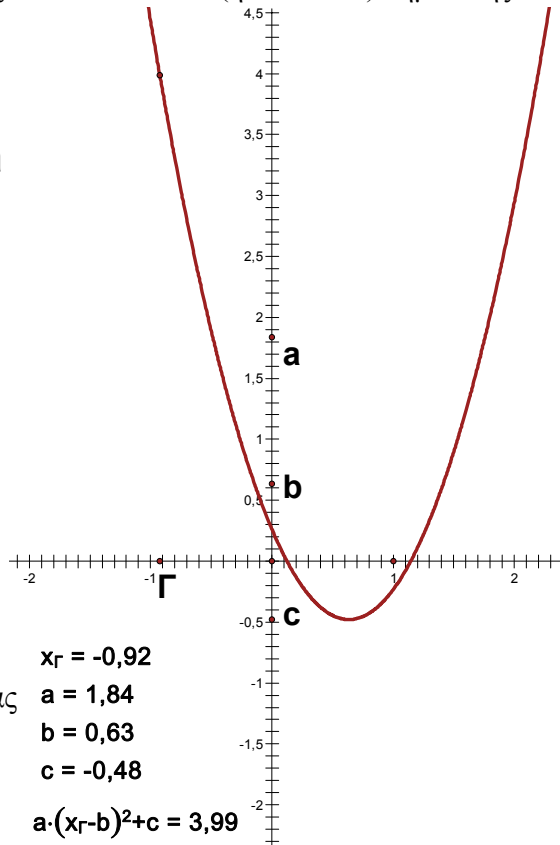
Βήμα 9: Ολόκληρη η δευτεροβάθμια συνάρτηση είναι το σύνολο των δυνατών θέσεων του αποτυπωμένου σημείου $(x_\Gamma, a(x_\Gamma - b)^2 + c)$ για διάφορες τιμές του x_Γ . Για τη δημιουργία αυτού του γραφήματος, επιλέξτε το σημείο Γ και το αποτυπωμένο σημείο, κατόπιν επιλέξτε Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί μια συνεχής καμπύλη ενός μέρους της παραβολής.

Έρευνα

1. Αλλάξτε τις θέσεις των τριών σημείων στον άξονα y . Περιγράψτε τον τρόπο επίδρασης της τιμής των a , b και c στο σχήμα της παραβολής. Μην παραλείψετε να εξετάσετε και αρνητικές τιμές.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

2. Η **κορυφή** μιας παραβολής είναι το ανώτατο (ή κατώτατο) σημείο της παραβολής. Κάντε κλικ με το εργαλείο σημείων για την τοποθέτηση ενός σημείου στην κορυφή της παραβολής και τη μέτρηση των συντεταγμένων του. (Βοηθά αν οι μετρήσεις σας έχουν ακρίβεια χιλιοστού.) Εξηγήστε πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις τιμές των b , c σε μια δευτεροβάθμια συνάρτηση για τον προσδιορισμό της κορυφής του γραφήματος.



Παρουσιάστε τις ιδέες σας μέσω δικτύου

Συζητήστε τα ευρήματά σας με το συνεργάτη σας ή με την ομάδα σας. Για την παρουσίασή τους, μπορείτε να εκτυπώσετε ή να αποθηκεύσετε σχολιασμένα σχέδια ή να παρουσιάσετε τις ιδέες σας μέσω ενός δικτύου. Στο σχέδιό σας συγκρίνετε διαφορετικές παραβολές και δείξτε πώς επηρεάζεται το σχήμα τους από τις τιμές των a , b και c . Επίσης, εξηγήστε πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες των κορυφών τους με τις τιμές των b , c . Ίσως θέλετε να προσθέσετε κίνηση στην παραβολή σας, ώστε να αλλάξετε το σχήμα της σύμφωνα με τη θέση ενός ή περισσότερων από τα σημεία a , b και c .

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Έστω ότι ρίχνετε μια μπάλα που φθάνει σε ύψος 10 μέτρων και τελικά προσγειώνεται σε απόσταση 5 μέτρων από σας. Σύρτε τα σημεία a , b και c στο σχέδιό σας για την εύρεση μιας παραβολής που περιγράφει τη διαδρομή της μπάλας.

Υπόδειξη: Σύρτε το σημείο $(1, 0)$ για να αλλάξει η κλίμακα, ώστε να μπορείτε να αναπαραστήσετε τα 10 μέτρα στον άξονα y . Επίσης, ίσως είναι σκόπιμο να αποτυπώσετε λίγα σημεία.

Σημειώστε την εξίσωση της παραβολής σας.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών (συνέχεια)

2. α. Σε μια ελεύθερη βολή ένας παίκτης του μπάσκετ ύψους 2 μέτρων ρίχνει την μπάλα από απόσταση 5 μέτρων σε ένα καλάθι σε ύψος 3,3 μέτρων. Σύρτε τα σημεία a , b και c στο σχέδιό σας για την εύρεση μιας παραβολής που περιγράφει τη διαδρομή της μπάλας. Υποθέστε ότι κατά τη βολή τα χέρια του παίκτη βρίσκονται στο ίδιο ύψος με το κεφάλι του. Σημειώστε την εξίσωση της παραβολής σας.

β. Πόσες διαφορετικές παραβολές μοντελοποιούν την κατάσταση στο ζήτημα α; Πόσες διαφορετικές ελεύθερες βολές είναι δυνατές;
3. Ίσως γνωρίζετε ήδη ότι δύο σημεία ορίζουν πάντοτε μία και μόνο ευθεία. Ορίζουν πάντοτε τρία σημεία ακριβώς μια παραβολή;
4. Δημιουργήστε με το Sketchpad το γράφημα μιας άλλης ενδιαφέρουσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία με αυτή για το γράφημα της παραβολής.

Γραφήματα οικογένειας παραβολών

(σ. 48)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να είναι κάπως εξοικειωμένοι με δευτεροβάθμιες συναρτήσεις. Προηγούμενη εμπειρία με δημιουργία γραφημάτων στο Sketchpad είναι επίσης χρήσιμη.

Χρόνος στην τάξη: 40 λεπτά. Αύξηση του χρόνου αν οι μαθητές πρέπει να παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους.

Κατασκευαστικές συμβουλές

- Βήμα 5: Για τη συντεταγμένη y , επιλέξτε την εντολή Μέτρηση > Τεταγμένη (y).
- Βήμα 6: Αυτό το βήμα αλλαγής ετικέτας περιλαμβάνει επιπλέον εργασία αλλά καθιστά τις τιμές στην οθόνη περισσότερο ευανάγνωστες και εύχρηστες.
- Βήμα 7: Οι μαθητές πρέπει να μην ξεχνούν να χρησιμοποιούν το σύμβολο του πολλαπλασιασμού πριν από τις παρενθέσεις. Για την ύψωση σε δύναμη χρησιμοποιήστε το πλήκτρο \wedge .
- Βήμα 9: Εάν θέλετε μια πιο λεία παραβολή, μπορείτε να αλλάξετε το πλήθος των σημείων του γεωμετρικού τόπου με δεξί κλικ στον τελευταίο μέσω του Μενού περιβάλλοντος και επεξεργασία των Ιδιοτήτων του. Κατόπιν επιλέξτε ένα μεγαλύτερο αριθμό σημείων.

Έρευνα

1. Η τιμή του a καθορίζει τη διεύθυνση της παραβολής. Αν το a είναι αρνητικό, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Αν το a είναι θετικό, η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Η τιμή του a καθορίζει επίσης το εύρος της παραβολής. Όσο μεγαλύτερη απόλυτα η τιμή του a , τόσο πιο «στενή» η παραβολή.

Η τιμή του c καθορίζει την κατακόρυφη θέση της παραβολής. Η μεταβολή του c έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των τιμών του y . Η τιμή του b καθορίζει την οριζόντια θέση της παραβολής. Η μεταβολή του b έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των τιμών του x .
2. Το c είναι η συντεταγμένη y της κορυφής και το b η συντεταγμένη x , συνεπώς οι συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής είναι (b, c) .

Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με την παραβολή ωστόσο περιλαμβάνει τα αναγκαία τρία σημεία. Εάν ο παίκτης του μπάσκετ στέκεται στην αρχή των αξόνων και ρίχνει τη μπάλα προς τα δεξιά, η εξίσωση είναι $y = -1,6(x - 2,5)^2 + 10$. Ο έλεγχος της εξίσωσης αυτής μπορεί να γίνει αλγεβρικά. Η εύρεση της παραβολής είναι ευκολότερη αν οι μαθητές αποτυπώσουν τα σημεία $(2,5, 10)$ και $(5, 0)$.

2. α. Οι απαντήσεις ποικίλλουν. Οι μαθητές μπορούν να αποτυπώσουν τα σημεία $(0, 2)$ και $(5, 3,3)$ και κατόπιν να προσαρμόσουν την παραβολή ώστε να διέρχεται και από τα δύο σημεία αυτά. Το μοντέλο αυτό δείχνει τον παίκτη να στέκεται στην αρχή των αξόνων και να ρίχνει την μπάλα προς τα δεξιά. Υπάρχουν πολλές δυνατές παραβολές που περιέχουν αυτά τα δύο σημεία. Η εξίσωση μιας παραβολής που διέρχεται πολύ κοντά από τα σημεία αυτά είναι $y = -0,5(x - 2,76)^2 + 5,80$. Για την εύρεση μιας ακριβούς εξίσωσης, απαιτούνται αλγεβρικές μέθοδοι.
- β. Υπάρχουν πολλές δυνατές παραβολές, αναλόγως του μέγιστου ύψους της τροχιάς της μπάλας (δύο σημεία δεν ορίζουν με μοναδικό τρόπο μια παραβολή). Άρα υπάρχουν επίσης πολλές δυνατές, επιτυχείς, ελεύθερες βολές.
3. Τρία σημεία ορίζουν με μοναδικό τρόπο μια παραβολική συνάρτηση, εφόσον δεν είναι συγγραμμικά. Εάν έχετε παραβολές που δεν είναι συναρτήσεις, τρία μη συγγραμμικά σημεία ορίζουν πολλές παραβολές. Εάν οι μαθητές διαθέτουν εμπειρία στην επίλυση συστημάτων εξισώσεων, μπορείτε να τους αναπτύξετε τον τρόπο με τον οποίο οι συντεταγμένες x και y τριών διαφορετικών σημείων μπορούν να εισαχθούν στη γενική συνάρτηση $y = a(x - b)^2 + c$ για την παραγωγή τριών διαφορετικών (γραμμικών) εξισώσεων. Εφόσον τώρα οι άγνωστοι είναι τρεις, δηλαδή a , b και c , μπορείτε να λύσετε αυτό το γραμμικό σύστημα 3×3 ως προς τους τρεις αγνώστους. Εάν τα τρία αρχικά σημεία είναι συγγραμμικά, το σύστημα δεν έχει λύση.
4. Τα γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποτελούν καλά παραδείγματα. Λόγου χάρι, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν το γράφημα της συνάρτησης $y = a \sin bx$, αφού προηγουμένως κατασκευάσουν μεταβλητά μήκη για τα a και b . Κατόπιν μπορούν να μεταβάλουν τις περιόδους και τα πλάτη των ημιτονοειδών κυμάτων τους.