

## Μέσα χορδών

### Έρευνα 1: Μέσα παράλληλων χορδών

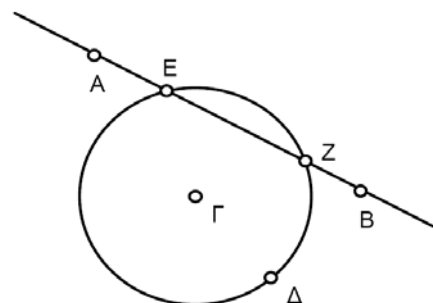
Σχεδιάστε με το Sketchpad το ίχνος των μέσων των χορδών κατά την παράλληλη μεταφορά μιας ευθείας. Για το σκοπό αυτό, πρέπει πρώτα να κατασκευάσετε τα μέσα. Κατόπιν χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες σχετικά με αυτόν το γεωμετρικό τόπο των μέσων ώστε να κατανοήσετε τις, παράλληλες προς μια ευθεία, εφαπτομένες, να απαντήσετε σε ερωτήματα και να δημιουργήσετε κατασκευές.

### Κατασκευή A

Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής με επιλογή του κύκλου και της ευθείας. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Τομών** από το μενού **Κατασκευή**.

Συνεχίστε με τη βοήθεια του Sketchpad το σχέδιο της ευθείας AB και του κύκλου ακτίνας ΓΔ.

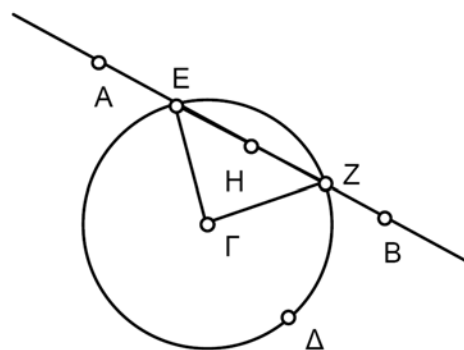
1. Μετακινήστε την ευθεία έτσι ώστε να τμήσει τον κύκλο σε δύο σημεία. Κατόπιν κατασκευάστε τα σημεία τομής E και Z μεταξύ ευθείας και κύκλου.



Ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου καλείται **χορδή**. Στο σχήμα αυτό το τμήμα EZ είναι η χορδή του κύκλου στην τέμνουσα AB.

Εφόσον το τμήμα βρίσκεται πάνω στην ευθεία, η επιλογή του ίσως είναι κάπως δύσκολη. Ενδέχεται, εκ παραδρομής, να επιλέξετε με το πρώτο κλικ την ευθεία. Αν ναι, κάντε εκ νέου κλικ ώστε να επιλεγεί το τμήμα.

2. Κατασκευάστε το τμήμα EZ και το μέσο του H.
3. Σχεδιάστε το ίχνος του σημείου H με επιλογή του σημείου και της εντολής Σχεδίαση ίχνους μέσου σημείου από το μενού Προβολή. (Για ένα έγχρωμο ίχνος, επιλέξτε το σημείο και ένα χρώμα από το μενού Προβολή.)
4. Προσθέστε στο σχήμα τα τμήματα ΓΕ και ΓΖ.



## Μέσα χορδών (συνέχεια)

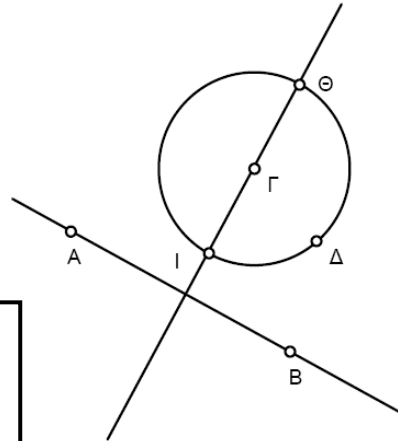
### Πειραματισμός

- ☞ Εκτελέστε παράλληλη μεταφορά της ευθείας.
- ☞ Μελετήστε το σχήμα ώστε να διαπιστώσετε τις σχέσεις μεταξύ των μερών του. Ειδικότερα, προβληματιστείτε σχετικά με τα ακόλουθα ερωτήματα:
  1. Ποιο είδος γεωμετρικού αντικειμένου προκύπτει από τη σχεδίαση του ίχνους του σημείου H; Πώς σχετίζεται αυτό το ίχνος με την ευθεία AB;
  2. Πόση είναι η γωνία ΓHZ; Τι είδους τρίγωνο είναι το ΓHZ;
  3. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΕΓZ; Πώς εξηγείται αυτό;

### Κατασκευή Β

Για την κατασκευή της κάθετης ευθείας, επιλέξτε το σημείο Γ και την ευθεία AB. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

Κατασκευάστε την ευθεία ε που διέρχεται το σημείο Γ και είναι κάθετη στην ευθεία AB. Κατασκευάστε τα σημεία Θ και Ι μέσω της τομής του κύκλου από την ευθεία ε. Αυτή η κάθετη ευθεία αποτελεί μια διάμετρο εφόσον από κατασκευής διέρχεται από το σημείο Γ.

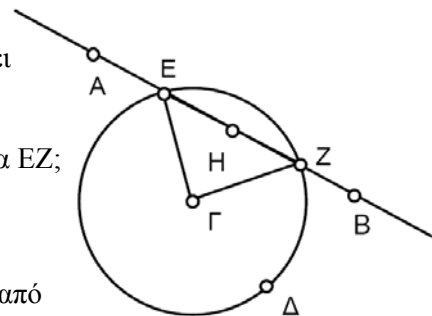


*Μια ευθεία είναι **διάμετρος** (ευθεία) ενός κύκλου αν διέρχεται το κέντρο του κύκλου. Μια χορδή είναι **διάμετρος** (χορδή) ενός κύκλου αν διέρχεται το κέντρο του κύκλου.*

Άρα διάμετρος μπορεί να είναι μια ευθεία ή μια χορδή.

### Ερωτήματα

- E1. Τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο προκύπτει από τη σχεδίαση ίχνους του σημείου H;
- E2. Πώς σχετίζεται το ίχνος του H με την ευθεία EZ;
- E3. Ποιο το μέγεθος της γωνίας ΓHZ;
- E4. Τι είδους ευθεία είναι η AB όταν διέρχεται από τα σημεία Θ ή Ι;



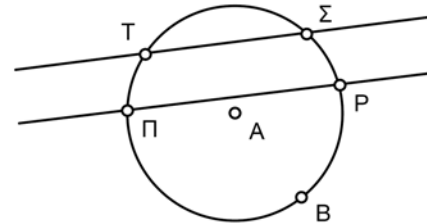
### Μέσα χορδών (συνέχεια)

- E5. Εξηγήστε γιατί το μέσο της χορδής EZ βρίσκεται στη διάμετρο που είναι κάθετος στην ευθεία AB. Υπόδειξη: Πώς συνδέεται η ευθεία ΘΙ με το τρίγωνο ΕΓΖ;
- E6. Σχεδιάστε μια ευθεία και έναν κύκλο. Πόσες ευθείες παράλληλες στη δοθείσα εφάπτονται στον κύκλο; Πώς μπορείτε να βρείτε τα σημεία στα οποία εφάπτονται στον κύκλο αυτές οι ευθείες;

### Προβλήματα - Τετράπλευρα

Κατασκευάστε έναν κύκλο και δύο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Π, Ρ, Σ και Τ όπως στο σχήμα.

1. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των αποστάσεων ΠΤ και ΡΣ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Κατασκευάστε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

2. Τι σχήμα έχει το τετράπλευρο ΠΡΣΤ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Έστω ότι οι ευθείες μεταφέρονται έτσι ώστε το ΠΡΣΤ να γίνει παραλληλόγραμμο. Τι μπορείτε να αναφέρετε περαιτέρω σχετικά με το σχήμα του ΠΡΣΤ στην περίπτωση αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

### Έρευνα 2: Σχεδίαση ίχνους του μέσου χορδής με μεταφορά μέσω σταθερού σημείου

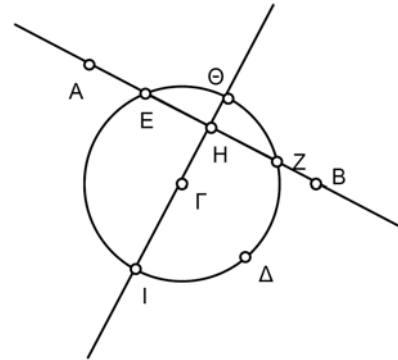
Η προηγούμενη έρευνα επικεντρωνόταν στο ίχνος του μέσου μιας χορδής καθώς αυτή μεταφερόταν παράλληλα προς τον εαυτό της. Στην παρούσα έρευνα θα εξετάσετε το ίχνος του μέσου μιας χορδής καθώς η ευθεία, στην οποία ανήκει η χορδή, μεταφέρεται μέσω ενός σταθερού σημείου. Στη συνέχεια, θα έχετε τα απαραίτητα εργαλεία για την κατασκευή εφαιπτομένων σε έναν κύκλο και διερχομένων από δοθέν σημείο.

## Μέσα χορδών (συνέχεια)

### Πειραματισμός

Χρησιμοποιήστε την κατασκευή από την Έρευνα 1 όπως φαίνεται στο σχήμα δεξιά. (Σημειώστε ότι οι ακτίνες ΓΕ και ΓΖ είναι κρυμμένες.)

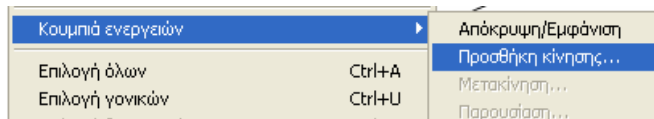
- ☞ Σχεδιάστε το ίχνος του σημείου Η καθώς μεταφέρετε το σημείο Β. Έτσι εξασφαλίζετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το σταθερό σημείο Α.
- ☞ Μελετήστε διεξοδικά το ίχνος. Τι είδους γεωμετρικό αντικείμενο διαγράφεται από το μέσο;



### Προσθήκη κίνησης

Αυτή είναι μια τεχνική που θα αποδειχτεί χρήσιμη σε πολλές έρευνες αυτού του βιβλίου.

Επειδή το ίχνος του σημείου Η ίσως εξαρτάται από τη θέση του σημείου Α, βοηθά να χρησιμοποιήσετε ένα κουμπί Προσθήκης κίνησης για την επίτευξη της μεταφοράς. Να πώς γίνεται αυτό.

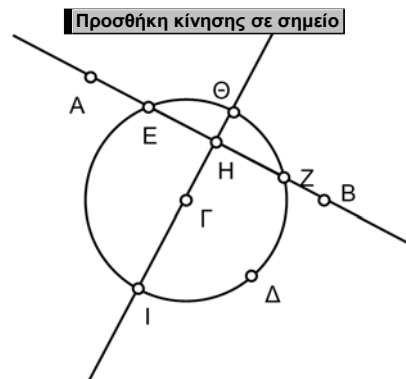


Ένας άλλος τρόπος παρατήρησης του ίχνους του Η είναι η κατασκευή του γεωμετρικού τόπου αυτού του σημείου. Επιλέξτε το σημείο Η, το σημείο Β και τον κύκλο. Επιλέξτε την εντολή **Γεωμετρικού τόπου** από το μενού **Κατασκευή**.

1. Επιλέξτε το σημείο Β και την περιφέρεια του κύκλου. Από το μενού Επεξεργασία επιλέξτε Κουμπιά ενεργειών. Επιλέξτε Προσθήκη κίνησης από το αναδυόμενο υπομενού.

Εμφανίζεται ένα πλαίσιο διαλόγου.

2. Επιλέξτε 'Μία φορά μόνο' και κάντε κλικ στο ΟΚ. Κάντε κλικ στο κουμπί. Θα πρέπει να δείτε το σημείο Β να μεταβαίνει στο σημείο Ζ του κύκλου και κατόπιν να μετακινείται γύρω από τον κύκλο. Επίσης, θα πρέπει να δείτε το ίχνος του σημείου Η.
3. Χρησιμοποιήστε το κουμπί Προσθήκη κίνησης για να πειραματιστείτε με το ίχνος του σημείου Η για διαφορετικές θέσεις του σημείου Α.



## **Μέσα χορδών (συνέχεια)**

### **Ερωτήματα**

Τα παρακάτω ερωτήματα σας ζητούν να διατυπώσετε μια εικασία σχετικά με το ίχνος του σημείου  $H$  για καθεμιά από τρεις διαφορετικές θέσεις του σημείου  $A$ . Προσπαθήστε να είστε όσο το δυνατόν πιο ακριβείς σχετικά με το όνομα του αντικειμένου, το μέγεθος και τη θέση του.

- E1. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο  $A$  βρίσκεται εκτός του κύκλου;
- E2. Τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με την ευθεία  $AB$  όταν το σημείο  $B$  ταυτίζεται με το σημείο  $\Theta$  ή το σημείο  $Z$ ;
- E3. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο  $A$  βρίσκεται πάνω στον κύκλο;
- E4. Ποιο γεωμετρικό αντικείμενο είναι το ίχνος όταν το σημείο  $A$  βρίσκεται εντός του κύκλου;

### **Προβλήματα κατασκευών**

*Ένα αντικείμενο για το ίχνος του σημείου  $H$ .* Στην Έρευνα 1 αποδείχτηκε ότι η ευθεία  $\Theta I$ , που είναι η μεσοκάθετος της χορδής, περιέχει το ίχνος του μέσου  $H$  της χορδής καθώς αυτή μετακινούταν παράλληλα προς τον εαυτό της. Θεωρήστε τις εξής τρεις δυνατότητες για το σημείο  $A$ : εκτός του κύκλου, πάνω στον κύκλο και εντός του κύκλου. Κατασκευάστε για κάθε περίπτωση ένα αντικείμενο, στο οποίο βρίσκεται το ίχνος του σημείου  $H$ , καθώς μεταφέρεται το σημείο  $B$ .

*Εφαπτομένες.* Μετακινήστε το σημείο  $A$  εκτός του κύκλου. Χρησιμοποιήστε το αντικείμενο που κατασκευάσατε προηγουμένως για την κατασκευή ευθειών εφαπτομένων στον κύκλο και διερχομένων από το σημείο  $A$ .

### **Ερώτημα**

Ποια είναι η καλύτερη δυνατή εξήγηση που μπορείτε να δώσετε για το σχήμα που διαγράφει το ίχνος του μέσου  $H$  όταν όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο  $A$ ; (Οι επόμενες έρευνες θα δώσουν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το ερώτημα αυτό.)

## Μέσα χορδών

(σ. 43)

Ένας από τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου είναι να εισαγάγει τους μαθητές στην εξερεύνηση, διατύπωση υποθέσεων και κατασκευή με το Sketchpad, παρέχοντας παράλληλα τις απαραίτητες μιας νοητής εικόνας σχετικής με την έννοια της εφαπτομένης.

### Έρευνες 1 και 2

Ένα σύντομο οπτικό πείραμα για την εξοικείωση με την έννοια της εφαπτομένης και την ανάπτυξη της σχετικής ορολογίας. Μπορεί να διεξαχθεί πολύ γρήγορα ή σε μια επίδειξη στην τάξη.

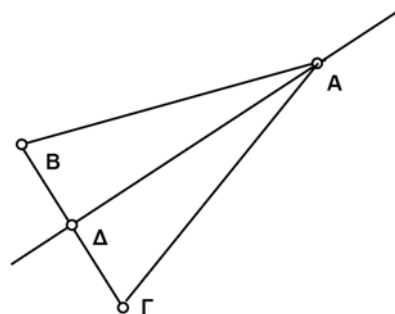
#### Έρευνα 1

Οι μαθητές πειραματίζονται με παράλληλες χορδές και τα μέσα τους. Στη συνέχεια, κατασκευάζουν το γεωμετρικό τόπο των μέσων.

Ακολουθούν οι κύριες μαθηματικές ιδέες (οι οποίες δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες):

- Το μέσο μιας χορδής βρίσκεται στη διάμετρο που είναι κάθετη στη χορδή, άρα ο γεωμετρικός τόπος των μέσων παράλληλων χορδών είναι η διάμετρος αυτή.
- Αν δοθεί ένας κύκλος, για κάθε ευθεία υπάρχουν δύο εφαπτομένες στον κύκλο και παράλληλες προς την ευθεία αυτή. Τα σημεία επαφής είναι τα δύο άκρα της κάθετης στη δοθείσα ευθεία διαμέτρου.
- Εάν μια ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται σε έναν κύκλο και στο σημείο  $P$ , η διάμετρος του κύκλου από το  $P$  είναι κάθετος στην ευθεία.

Για την απόδειξη αυτών των συμπερασμάτων, οι μαθητές πρέπει να κατανοούν τη βασική γεωμετρία του ισοσκελούς τριγώνου και ειδικότερα του γεγονότος ότι, αν η ευθεία  $AD$  είναι ένα ύψος, τότε το τμήμα  $AD$  είναι διάμεσος.



#### Έρευνα 2

Ζητείται από τους μαθητές να ανακαλύψουν ότι τα μέσα των χορδών που (αν επεκταθούν) διέρχονται από δοθέν σημείο  $P$  κείνται επί ενός τόξου (ή κύκλου, αν το  $P$  βρίσκεται στο εσωτερικό του δοθέντος κύκλου).

Στο σημείο αυτό ίσως είναι σημαντικό για τους μαθητές να εξετάσουν πιθανές αιτίες για την αιτιολόγηση του συμπεράσματος αυτού, όμως ενδέχεται, στην αρχή του μαθήματος της γεωμετρίας, να μην είναι έτοιμοι για μια αυστηρή απόδειξη.

Η ενότητα αυτή είναι αφιερωμένη σε προβλήματα κατασκευής. Ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάσουν κύκλους εφαπτόμενους σε μια ευθεία, αν δίνεται το κέντρο ή ένα σημείο της ευθείας (η λύση στο πρόβλημα αυτό δεν είναι μοναδική). Επίσης, ζητείται η κατασκευή κύκλων εφαπτόμενων σε κύκλους.