

## Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού

Όνοματεπώνυμο(α): \_\_\_\_\_

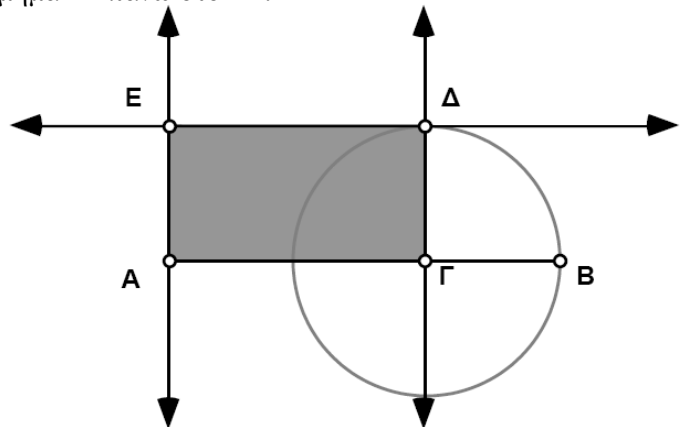
Έστω ότι διαθέτετε ένα συγκεκριμένο φράχτη και θέλετε να περιφράξετε τη μεγαλύτερη δυνατή ορθογώνια περιοχή. Ποιο ορθογώνιο θα επιλέγατε; Με άλλα λόγια, ποιο είδος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου έχει το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο; Θα ανακαλύψετε την απάντηση στα πλαίσια αυτής της έρευνας. Επίσης, αν έχετε ήδη μια ιδέα, η έρευνα αυτή θα σας βοηθήσει να επιβεβαιώσετε, αλλά και να θεμελιώσετε την ιδέα σας.

### Σχέδιο και έρευνα

1. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
2. Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AG$  πάνω στο  $AB$ .

Επιλέξτε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , το σημείο  $A$  και το σημείο  $\Gamma$ . Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Κάθετης ευθείας** από το μενού **Κατασκευή**.

3. Κατασκευάστε ευθείες κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και διερχόμενες από τα σημεία  $A$  και  $\Gamma$ .



Προσέξτε να αφήσετε ελεύθερο το πλήκτρο του ποντικιού όταν ο δείκτης είναι πάνω στο σημείο  $B$ .

4. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας  $GB$ .
5. Κατασκευάστε το σημείο  $\Delta$  στο σημείο τομής του κύκλου με την κάθετη ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $\Gamma$ .
6. Κατασκευάστε μια ευθεία διερχόμενη από το σημείο  $\Delta$  και παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .

7. Κατασκευάστε το σημείο  $E$ , την τέταρτη κορυφή του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου  $A\Gamma\Delta E$ .

Επιλέξτε διαδοχικά τις κορυφές του ορθογώνιου. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Εσωτερικού πολυγώνου** από το μενού **Κατασκευή**.

8. Κατασκευάστε το εσωτερικό  $A\Gamma\Delta E$ .
9. Μετρήστε το εμβαδόν και την περίμετρο αυτού του πολυγώνου.
10. Σύρτε το σημείο  $\Gamma$  εμπρός και πίσω ώστε να παρατηρήσετε τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το εμβαδόν και η περίμετρος του παραλληλόγραμμου.

## Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού (συνέχεια)

Επιλέξτε το σημείο A και το σημείο Γ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Απόσταση** από το μενού **Μέτρηση**. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τη μέτρηση του AE.



11. Μετρήστε τα AG και AE.

E1. Χωρίς να κάνετε μέτρηση, δηλώστε πώς σχετίζεται το AB με την περίμετρο του ορθογώνιου. Εξηγήστε γιατί το παραλληλόγραμμο αυτό έχει σταθερή περίμετρο.

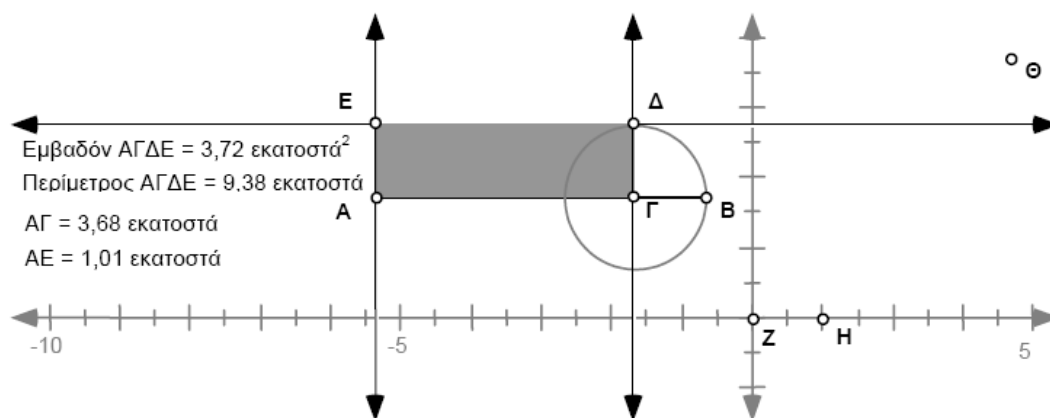
E2. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Γ παρατηρήστε ποιο ορθογώνιο σχήμα δίνει το μέγιστο εμβαδόν. Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, αυτό το σχήμα;

Στα βήματα 12-14 θα ανακαλύψετε τη σχέση αυτή με γραφικό τρόπο.

Επιλέξτε κατά σειρά τις μετρήσεις του AG και του εμβαδού του ΓΔΕΑ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Αποτύπωση με (x, y)** από το μενού **Γράφημα**. Εάν το σημείο Θ δεν είναι ορατό, μεταφέρετε το σημείο Η για την προσαρμογή της κλίμακας των αξόνων.

12. Αποτυπώστε το μέγεθος του AG και του εμβαδού του ΑΓΔΕ με (x, y). Θα πρέπει να λάβετε άξονες και ένα σημείο Θ όπως στο επόμενο σχήμα.

13. Σύρτε το σημείο Γ προκειμένου να μετακινηθεί το σημείο Θ, ώστε να αντιστοιχεί σε διαφορετικά μήκη πλευρών και εμβαδά.



## Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού (συνέχεια)

Επιλέξτε το σημείο  $\Theta$  και το σημείο  $\Gamma$ . Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Γεωμετρικού τύπου** από το μενού **Κατασκευή**.

14. Για να δείτε ένα γράφημα όλων των δυνατών εμβαδών του παραλληλόγραμμου αυτού, κατασκευάστε το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $\Theta$  όπως ορίζεται από το σημείο  $\Gamma$ . Τοποθετήστε το σημείο  $\Gamma$  έτσι ώστε το σημείο  $\Theta$  να βρίσκεται στη μέγιστη τιμή του εμβαδού του παραλληλόγραμμου.

Μπορείτε να επιλέξετε το σημείο  $\Theta$  και να μετρήσετε τις συντεταγμένες του.

- E3. Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Theta$  στο γράφημα και εξηγήστε πώς σχετίζονται με τα μήκη των πλευρών και με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.



15. Μεταφέρετε το σημείο  $\Gamma$  έτσι ώστε το σημείο  $\Theta$  να κινηθεί εμπρός και πίσω μεταξύ των δύο σημείων  $Z$  και  $H$  στο γράφημα.

- E4. Δώστε τις συντεταγμένες των σημείων  $Z$  και  $H$  στο γράφημα και εξηγήστε πώς σχετίζονται με τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.



### Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Διερευνήστε λόγους εμβαδού προς περίμετρο σε άλλα πολύγωνα. Διατυπώστε μια εικασία σχετικά με το είδος των πολυγώνων που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.
2. Ποια είναι η εξίσωση του γραφήματος που κατασκευάσατε; Έστω  $AG = x$  και  $AB = P/2$ , όπου  $P$  είναι η περίμετρος (σταθερά). Γράψτε μια εξίσωση για το εμβαδόν  $AGDE$  σε συνάρτηση με τα  $x$ ,  $P$ . Για ποια τιμή του  $x$  (σε συνάρτηση με το  $P$ ) έχουμε μια μέγιστη τιμή του  $A$ ;

## Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού

(σ. 18)

**Προαπαιτούμενα:** Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις έννοιες *ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τετράγωνο, εμβαδόν και περίμετρος*.

**Χρόνος στην τάξη:** 40-50 λεπτά. Εάν δεν υπάρχει αρκετός χρόνος, μπορείτε να σταματήσετε στο τέλος της πρώτης σελίδας μετά από το ερώτημα 2. Έτσι, δε θα προβείτε στη διερεύνηση του προβλήματος με τη χρήση των μεγίστων και ελαχίστων ενός γραφήματος.

### Σχέδιο και έρευνα

- E1. Καθώς οι μαθητές μεταφέρουν το σημείο Γ, πρέπει να παρατηρήσουν ότι το εμβαδόν του ορθογώνιου μεταβάλλεται αλλά η περιμέτρος του διατηρείται σταθερή. Επειδή τα ΓΒ και ΓΔ είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το άθροισμα δύο πλευρών του ορθογώνιου, ΑΓ + ΓΔ, ισούται με ΑΒ. Άρα το ΑΒ ισούται με το ήμισυ της περιμέτρου του ορθογώνιου. Όσο αυτό το μήκος παραμένει σταθερό, η περίμετρος του ορθογώνιου θα διατηρείται σταθερή.
- E2. Το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.
- E3. Οι συντεταγμένες του ανώτατου σημείου του γραφήματος εμφανίζουν το πλευρικό μήκος και το εμβαδόν του ορθογώνιου με το μέγιστο εμβαδόν. Το πλευρικό μήκος στο σημείο αυτό επαληθεύει ότι το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το τετράγωνο.
- E4. Στα κατώτατα σημεία του γραφήματος το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει όταν ΑΓ = 0 και όταν ΑΓ = ΑΒ.

Μπορείτε να διερευνήσετε από κοινού με τους μαθητές γιατί το γράφημα του γεωμετρικού τόπου του πλευρικού μήκους ή του εμβαδού ενός ορθογώνιου είναι μια παραβολή.

### Περαιτέρω εξερεύνηση

- 1. Τα κανονικά πολύγωνα διαθέτουν μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο. Πολύγωνα με περισσότερες πλευρές είναι περισσότερο αποτελεσματικά. Ο κύκλος είναι το κλειστό επίπεδο σχήμα με το μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο.
- 2. Το εμβαδόν του ορθογώνιου μπορεί να αναπαρασταθεί από την εξίσωση  $E = x[(1/2)P - x]$ . Το γράφημα είναι μια παραβολή με ρίζες τις 0 και P/2. Άρα η τιμή του x για το μέγιστο είναι P/4. Εφόσον το μήκος της πλευράς του ορθογώνιου με το μέγιστο εμβαδόν είναι το 1/4 της περιμέτρου του ορθογώνιου, το ορθογώνιο πρέπει να είναι τετράγωνο.