

Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Όνοματεπώνυμο(α): _____

Η χρυσή τομή εμφανίζεται συχνά στη φύση: για παράδειγμα, στις αναλογίες του όστρακου ενός ναυτίλου ή και σε ορισμένες αναλογίες στο σώμα και στο πρόσωπό μας. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές εμφανίζουν τη χρυσή τομή ονομάζεται χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Σε ένα ορθογώνιο αυτού του είδους ο λόγος των διαστάσεων δύο πλευρών προς τη μεγάλη πλευρά ισούται με το λόγο της μεγάλης προς τη μικρή πλευρά. Τα χρυσά ορθογώνια παραλληλόγραμμο είναι ευχάριστα στην όραση, ίσως επειδή προσεγγίζουν το σχήμα του οπτικού πεδίου μας. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται συχνά στην αρχιτεκτονική και ιδιαίτερα στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική. Στη δραστηριότητα αυτή θα κατασκευάσετε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και θα βρείτε μια προσέγγιση της χρυσής τομής. Κατόπιν θα ανακαλύψετε πώς μέσα σε ένα χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούν να βρεθούν μικρότερα χρυσά παραλληλόγραμμο. Τέλος, θα κατασκευάσετε μια χρυσή σπείρα (σπειροειδή καμπύλη).

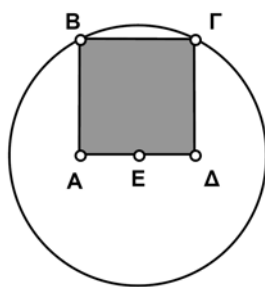


$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

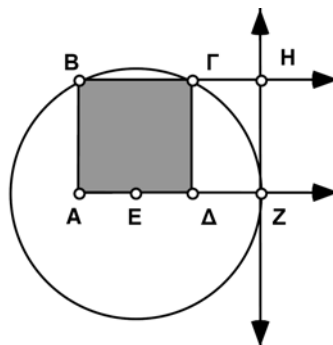
Σχέδιο και έρευνα

Στον φάκελο εγκατάστασης του Sketchpad ανοίξτε τον φάκελο **Δραστηριότητες** και επιλέξτε το αρχείο **Τετράγωνο.gsp**. Το Προσαρμοσμένο εργαλείο **Τετράγωνο από ακμή** κατασκευάζει το τετράγωνο από τα δύο άκρα της πλευράς, όχι από το μέσο.

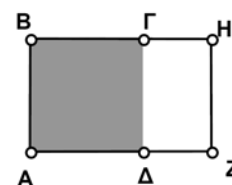
1. Χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο Τετράγωνο από ακμή για την κατασκευή ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ καθώς και του εσωτερικού του.
2. Προσανατολίστε το τετράγωνο έτσι ώστε τα σημεία ελέγχου σημεία Α και Β να βρίσκονται στην αριστερή πλευρά, το ένα πάνω από το άλλο.
3. Κατασκευάστε το μέσο Ε του τμήματος ΑΔ.
4. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΕΓ.



Βήματα 1-4



Βήματα 5-8



Βήματα 9-11

Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (συνέχεια)

Διατηρήστε πατημένο το πλήκτρο του ποντικιού στο εργαλείο τμημάτων για την εμφάνιση της παλέτας εργαλείων σχεδίασης ευθύγραμμων αντικειμένων. Σύρτε το δείκτη προς τα δεξιά για να επιλέξετε το εργαλείο ημιευθειών.

5. Επεκτείνετε τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ με ημιευθείες όπως στο σχήμα.
6. Κατασκευάστε το σημείο Ζ στην τομή του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ με τον κύκλο.
7. Κατασκευάστε μια ευθεία κάθετη στο ΑΔ που διέρχεται από το σημείο Ζ.
8. Κατασκευάστε το σημείο Η στην τομή αυτής της καθέτου με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΖΗΒ είναι ένα χρυσό ορθογώνιο.

Επιλέξτε τα αντικείμενα και έπειτα την εντολή **Απόκρυψη** από το μενού **Προβολή**.

9. Αποκρύψτε την ευθεία, τις ημιευθείες, τον κύκλο και το σημείο Ε.
10. Αποκρύψτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΔΓ και ΒΓ.
11. Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΗ, ΗΖ και ΖΑ.

12. Μετρήστε τα ΑΒ και ΑΖ.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ και ΑΒ και την εντολή **Λόγου** από το μενού **Μέτρηση**.

13. Μετρήστε το λόγο ΑΖ προς ΑΒ.
14. Υπολογίστε την έκφραση $(\overline{ΑΒ} + \overline{ΑΖ})/ΑΖ$.
15. Σύρτε το σημείο Α ή το σημείο Β ώστε να επαληθεύσετε ότι το παραλληλόγραμμό σας παραμένει πάντοτε χρυσό.

Ε1. Η χρυσή τομή (λόγος) αναπαρίσταται συχνά με το γράμμα Φ. Γράψτε μια προσέγγιση για το Φ.

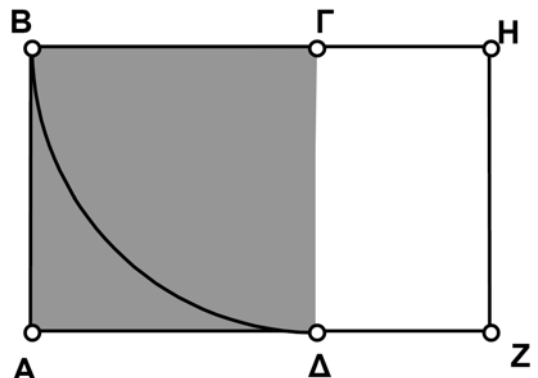


Συνεχίστε την έρευνα του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και προχωρήστε στην κατασκευή μιας χρυσής σπείρας.

16. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΓΒ.

Επιλέξτε, κατά σειρά, τον κύκλο και τα σημεία Β και Δ. Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Τόξου σε κύκλο** από το μενού **Κατασκευή**.

17. Κατασκευάστε τόξο κύκλου από το σημείο Β στο σημείο Δ. Κατόπιν αποκρύψτε τον κύκλο.



Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (συνέχεια)

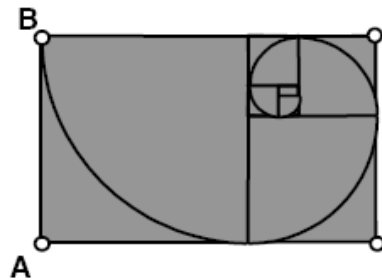
Επιλέξτε ολόκληρο το σχήμα (αλλά όχι τις μετρήσεις). Κατόπιν επιλέξτε την εντολή **Δημιουργία νέου εργαλείου...** από τα Προσαρμοσμένα εργαλεία στην Εργαλειοθήκη.

18. Δημιουργήστε Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή αυτή.
 19. Κατασκευάστε το παραλληλόγραμμο όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Κατόπιν χρησιμοποιήστε το Προσαρμοσμένο εργαλείο για τα σημεία Z και Δ. Θα πρέπει να διαπιστώσετε ότι το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται από το Προσαρμοσμένο εργαλείο είναι απόλυτα προσαρμοσμένο στην περιοχή ΔΖΗΓ.
- E2. Διατυπώστε μια υπόθεση σχετικά με την περιοχή ΔΖΗΓ.



Εάν κατά τη χρήση του Προσαρμοσμένου εργαλείου το παραλληλόγραμμό σας δεν είναι κατάλληλο, αναιρέστε την ενέργεια και δοκιμάστε εκ νέου στα σημεία με την αντίθετη σειρά.

20. Συνεχίστε τη χρήση του Προσαρμοσμένου εργαλείου εντός του χρυσού παραλληλόγραμμου για τη δημιουργία μιας χρυσής σπείρας. Αποκρύψτε μη απαραίτητα σημεία.



Περαιτέρω εξερεύνηση

1. Έστω ότι η μικρή πλευρά του χρυσού παραλληλόγραμμου έχει μήκος 1 και η μεγάλη πλευρά μήκος Φ . Γράψτε μια σχέση αναλογίας μεταξύ των πλευρών, πολλαπλασιάστε χιαστί και χρησιμοποιήστε τον τύπο του τετραγώνου για τον υπολογισμό μιας ακριβούς τιμής του Φ .
2. Υπολογίστε τα Φ^2 και $1/\Phi$. Πώς συνδέονται οι αριθμοί αυτοί με το Φ ; Με αλγεβρικές πράξεις, δείξτε γιατί ισχύουν αυτές οι σχέσεις.

Το χρυσό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

(σ. 22)

Προαπαιτούμενα: Οι μαθητές πρέπει να έχουν εμπειρία στη ρύθμιση αναλογιών όπως αυτές που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή σχέσεων σε όμοια πολύγωνα. Θα εντυπωσιαστούν περισσότερο από τη δραστηριότητα αυτή αν γνωρίζουν ήδη κάποιες πληροφορίες σχετικά με τα χρυσά ορθογώνια και τη σημασία τους. Μια ευχάριστη δραστηριότητα είναι να αποφασίσουν μεταξύ τους ποιο είναι το πλέον δημοφιλές από μια ομάδα ορθογώνιων παραλληλόγραμμων, από τα οποία ένα ή δύο είναι χρυσά.

Χρόνος στην τάξη: 40-55 λεπτά.

Παράδειγμα σχεδίου: *Δραστηριότητες\Τετράγωνο.gsp* (Προσαρμοσμένο εργαλείο *Τετράγωνο (από ακμή)* για την κατασκευή του τετραγώνου).

Σχέδιο και έρευνα

- E1. Το Φ είναι περίπου ίσο με 1,618. Οι απαντήσεις των μαθητών θα ποικίλουν αναλόγως των ρυθμίσεων της ακρίβειας υπολογισμού στις Προτιμήσεις.
- E2. Το ΔΖΗΓ είναι επίσης ένα χρυσό ορθογώνιο, επειδή το Προσαρμοσμένο εργαλείο για την κατασκευή ενός χρυσού ορθογώνιου δημιουργεί ένα σχήμα που ταιριάζει απόλυτα στο εσωτερικό του ορθογώνιου αυτού.

Περαιτέρω εξερεύνηση

- Η αναλογία στο ορθογώνιο $1 \times \Phi$ αντιστοιχεί στην αναλογία στην κορυφή της πρώτης σελίδας της δραστηριότητας, εκτός του ότι $\alpha = 1$ και $\beta = \Phi$. Έτσι, έχουμε:
$$\Phi/1 = (1 + \Phi)/\Phi, \text{ από όπου έπεται } \Phi^2 = 1 + \Phi \text{ ή } \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Οι δύο λύσεις αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\dots$$

και

$$(1 - \sqrt{5})/2 = -0,618\dots$$

Η θετική τιμή δίνει τη χρυσή τομή.
- $\Phi^2 = 2,618\dots$, που ισούται με $\Phi + 1$. Αυτό επαληθεύεται στη δευτεροβάθμια εξίσωση του τελευταίου προβλήματος.
 $1/\Phi = 0,618\dots$, που ισούται με $\Phi - 1$. Για την αλγεβρική απόδειξη αυτού, ξεκινήστε με τον ορισμό $\Phi/1 = (1 + \Phi)/\Phi$. Άρα $\Phi = 1/\Phi + 1$. Λύστε ως προς $1/\Phi$ και έχετε $1/\Phi = \Phi - 1$.