Οι ποδηλάτες

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Οι ποδηλάτες είναι ένα πρόβλημα στο οποίο δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να συνδέσουν το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας με ένα φυσικό μέγεθος (ταχύτητα) και να κατασκευάσουν γραμμικά μοντέλα της μορφής $y = \alpha \cdot x$ ή $y = \alpha \cdot x + \beta$ μέσα από ένα απλό πραγματικό πρόβλημα.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$, συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- Διδακτική ενότητα: 2.4, 3.1.

Εργαλεία λογισμικού

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να συνδέσουν οι μαθητές την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας με την ταχύτητα στην ομαλή κίνηση.
2. Να ανακαλύψουν τη σχέση η οποία συνδέει δύο ποσά τα οποία συμμεταβάλλονται ιδιαίτερα όταν η σχέση που τα συνδέει είναι γραμμική.
3. Να κατανοήσουν την ισοδυναμία της γραφικής επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων με την αλγεβρική επίλυση.
4. Να αντιληφθούν τη σημασία της επιλογής κατάλληλης κλίμακας κατά τη χρήση του λογισμικού.
5. Να κατασκευάσουν, μέσω του προβλήματος, μία συνάρτηση πολλαπλών τύπων.

Ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιώργος είναι τρεις φίλοι στους οποίους, εκτός από την ποδηλασία, αρέσει και η ακρίβεια.

Κάθε Κυριακή ξεκινούν με τα ποδήλατά τους, από τον τόπο διαμονής τους, για ποδηλασία.

Ο Ανδρέας και ο Βασίλης ξεκινούν από την Αθήνα, και συγκεκριμένα από την περιοχή των Αμπελοκήπων, και κατευθύνονται στον Πειραιά, στο Στάδιο Ειρήνης και Φιλίας, όπου και θα σταματήσουν. Η απόσταση: Αθήνα – Πειραιάς είναι 20 χιλιόμετρα. Ο Γιώργος ξεκινά από την περιοχή Γκάζι, η οποία απέχει 6 χιλιόμετρα από το σημείο εκκίνησης των δύο προηγουμένων και η οποία βρίσκεται μεταξύ των Αμπελοκήπων και του Σταδίου Ειρήνης και Φιλίας και κατευθύνεται, και αυτός, προς το σημείο όπου θα σταματήσουν και οι άλλοι δύο. Ο Ανδρέας διανύει 2 χιλιόμετρα κάθε 4 λεπτά, ενώ ο Γιώργος και ο Βασίλης διανύουν 1 χιλιόμετρο κάθε 4 λεπτά.

Οι τρεις φίλοι θέλουν να τους εφοδιάσουμε με όλα εκείνα τα στοιχεία με τα οποία θα μπορούν ανά πάσα στιγμή να γνωρίζουν τη σχετική τους θέση, την απόστασή τους από την Αθήνα (πόλη Α) και τον Πειραιά (πόλη Π) και τα διαγράμματα πορείας τους.

1 Να τοποθετήσετε πάνω σε μία ευθεία τις αρχικές θέσεις των τριών φίλων. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα ο οποίος να δίνει κάθε 4 λεπτά την απόσταση κάθε ποδηλάτη από την περιοχή των Αμπελοκήπων.

2 Βάσει του πίνακα, δεν μπορούμε να ξέρουμε ανά πάσα χρονική στιγμή (π.χ. κάθε λεπτό) την απόστασή τους από την περιοχή των Αμπελοκήπων; Πώς μπορούμε να λύσουμε αυτό το πρόβλημα με τις δυνατότητες που μας παρέχει το λογισμικό; Να δώσετε μία γεωμετρική λύση (γραφική παράσταση) και μία αλγεβρική (να βρείτε έναν τύπο).

3 Παρατηρούμε ότι κάθε ευθεία σχηματίζει διαφορετική γωνία με τον άξονα x΄x. Πώς σχετίζεται αυτή η γωνία με τα δεδομένα του προβλήματος;

4 Να κατασκευάσετε, με τη βοήθεια του λογισμικού, έναν πίνακα ο οποίος να δίνει κάθε λεπτό την απόσταση κάθε ποδηλάτη από την πόλη Π. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις και να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών. Τι παρατηρείτε τώρα για τις γωνίες των ευθειών;

5 Ας σχολιάσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις του ερωτήματος 2. Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι δύο ποδηλάτες θα συναντηθούν καθώς θα κατευθύνονται προς το Στάδιο Ειρήνης και Φιλίας; Σε πόση απόσταση από την περιοχή των Αμπελοκήπων θα συναντηθούν; Θα συναντηθεί ο Βασίλης με το Γιώργο;

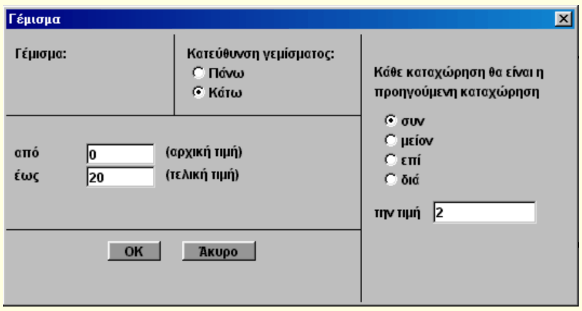
6 Οι τρεις φίλοι θέλουν να γνωρίζουν τις μεταξύ τους αποστάσεις ανά πάσα χρονική στιγμή. Να κάνετε, όπως και στο ερώτημα 2, τις γραφικές παραστάσεις των σχέσεων οι οποίες για κάθε χρονική στιγμή μάς δίνουν την απόσταση του Ανδρέα από το Βασίλη, του Γιώργου από τον Ανδρέα και του Γιώργου από το Βασίλη. Ποιες είναι οι σχέσεις που μας δίνουν αυτές τις αποστάσεις;

✔ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

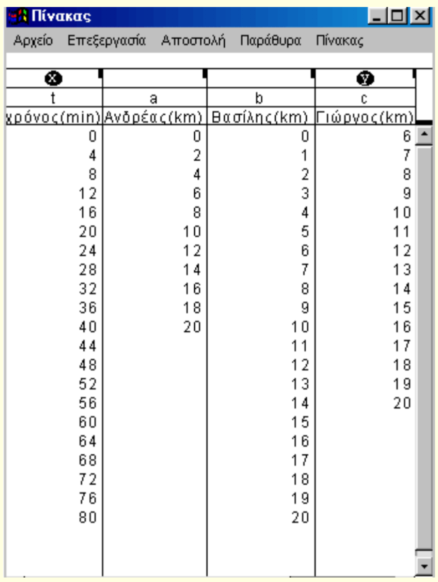
I. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν ότι τα ανάλογα ποσά συνδέονται με τη σχέση $y = \alpha x$ και ότι η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής είναι ευθεία η οποία περνά από την αρχή των αξόνων. Ακόμη, θα πρέπει να έχουν γνωρίσει τη σημασία της συνάρτησης πολλαπλού τύπου.

II. Στόχος της ερώτησης 1 είναι να συμπληρώσουν οι μαθητές, με τη βοήθεια του λογισμικού, τις στήλες του πίνακα (χρόνος, Ανδρέας, Βασίλης, Γιώργος) και να μάθουν τη χρήση της εντολής “Γέμισμα”. Η στήλη του Γιώργου καλό θα είναι να συμπληρωθεί χωρίς τη χρήση του τύπου $y = \alpha \cdot x + \beta$, αφού αυτό τον τύπο προσπαθούν να προσεγγίσουν. Θα πρέπει να καταγράψουμε τόσες τιμές για κάθε στήλη, ώστε ο πίνακας να περιέχει τα ζεύγη που αντιστοιχούν τόσο στην εκκίνηση όσο και στον τερματισμό κάθε ποδηλάτη.

! Για να γεμίσουμε κάθε στήλη, τοποθετούμε στην ένδειξη “από“ την πρώτη τιμή του αντίστοιχου μεγέθους, δηλαδή το 0 για το χρόνο (t) και για την απόσταση του Ανδρέα (a) και του Βασίλη (b) από την Αθήνα και 6 για την απόσταση του Γιώργου (r) από την Αθήνα, και στην ένδειξη “έως” την τελευταία τιμή, δηλαδή το 80 για το χρόνο και το 20 για την απόσταση κάθε ποδηλάτη. Στην ένδειξη “την τιμή” τοποθετούμε το ποσό κατά το οποίο αυξάνει η απόσταση του κάθε ποδηλάτη 4 λεπτά.



Εικόνα 1. Το παράθυρο διαλόγου για το γέμισμα της στήλης a.



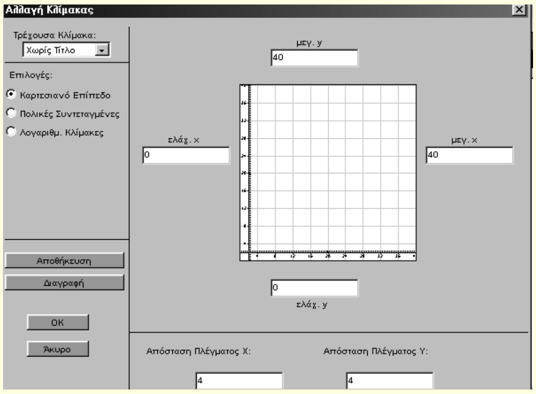
t χρόνος(min)	a Ανδρέας(km)	b Βασίλης(km)	c Γιώργος(km)
0	0	0	6
4	2	1	7
8	4	2	8
12	6	3	9
16	8	4	10
20	10	5	11
24	12	6	12
28	14	7	13
32	16	8	14
36	18	9	15
40	20	10	16
44		11	17
48		12	18
52		13	19
56		14	20
60		15	
64		16	
68		17	
72		18	
76		19	
80		20	

Εικόνα 2. Ο πίνακας που δημιουργείται μετά το γέμισμα όλων των στηλών.

III. Στόχος της ερώτησης 2 είναι να επιλέξουν οι μαθητές, μετά από διαπραγμάτευση, κατάλληλη κλίμακα και στη συνέχεια να βρουν τις εξισώσεις με τη βοήθεια του λογισμικού.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα.

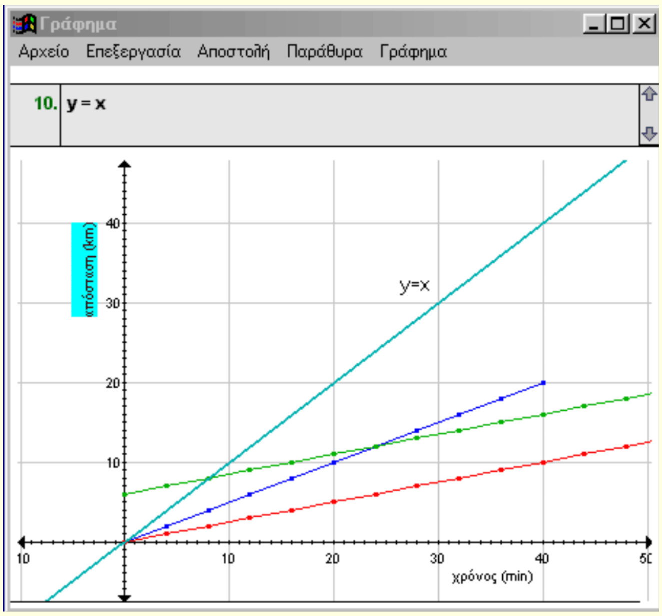
Καλό θα είναι, κατά την επιλογή της κλίμακας, τα διαστήματα πάνω στους δύο άξονες να έχουν ίσα μήκη ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.



Εικόνα 3. Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής "Αλλαγή κλίμακας" από το μενού "Γράφημα".

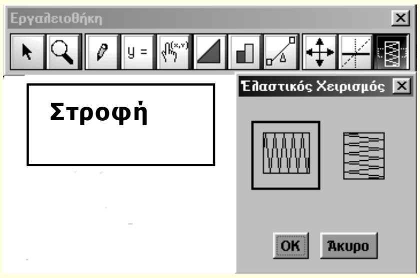
Για να απαντήσουν στην ερώτηση οι μαθητές, κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της $y = x$ και, μεταφέροντάς τη με τα κατάλληλα εργαλεία, την προσαρμόζουν κάθε φορά στα σημεία που προέρχονται από τον πίνακα (εικόνα 4).

Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα οι μαθητές να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η ευθεία που προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία είναι, π.χ., η $y = 0{,}51x$ και όχι η $y = 0{,}5x$, που είναι η σωστή. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εκτιμήσουν αν η ευθεία που έχουν βρει είναι η κατάλληλη αποκόπτοντας σημεία από την ευθεία και ελέγχοντας τις συντεταγμένες τους (βλ. και παρατήρηση VII).

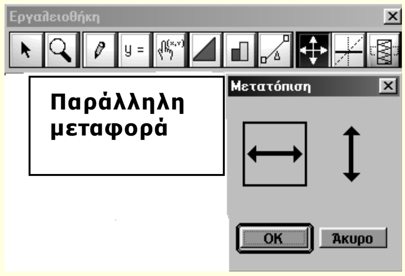


Εικόνα 4.

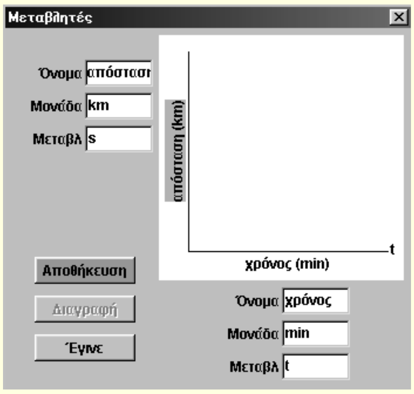
Η προσαρμογή της ευθείας πάνω στα σημεία γίνεται μέσω της επιλογής από την εργαλειοθήκη των εργαλείων που φαίνονται στις εικόνες 5 και 6.



Εικόνα 5.



Εικόνα 6.



Εικόνα 7. Από την επιλογή "Μεταβλητές" του μενού "Γράφημα" μπορούμε να ονομάσουμε τους άξονες και να καθορίσουμε τις μεταβλητές και τις μονάδες μέτρησης.

Τέλος, θα ήταν χρήσιμο να υπογραμμιστεί από το διδάσκοντα ότι, μέσω της γραφικής παράστασης, επιτυγχάνουμε τη μετάβαση από το διακριτό χώρο των ζευγών στο συνεχή χώρο του γραφήματος, πράγμα το οποίο είναι σημαντικό για τη μελέτη ενός φαινομένου.

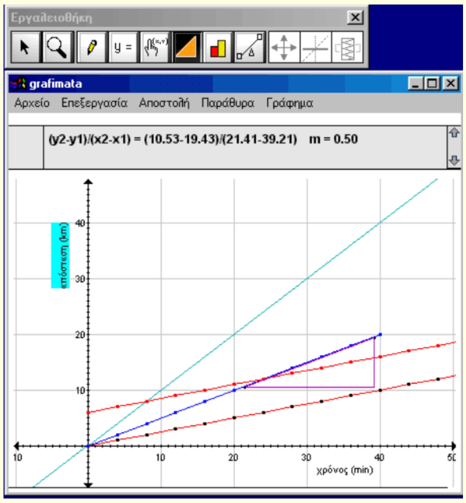
IV. Στην ερώτηση 3, οι μαθητές θα υπολογίσουν την κλίση κάθε ευθείας και θα διαπιστώσουν (εικόνα 8) ότι:

α) ταυτίζεται με το συντελεστή του x στη σχέση $y = \alpha \cdot x + \beta$,

β) ορίζεται μέσω ενός ορθογωνίου τριγώνου, οπότε σχετίζεται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x,

γ) συνδέεται με την ταχύτητα στην ομαλή κίνηση.

Εδώ είναι σημαντικό να επισημανθεί η σημασία του πηλίκου διαφορών, το οποίο εμφανίζεται στην ετικέτα του γραφήματος όταν μετρούμε την κλίση μιας ευθείας. Το πηλίκο αυτό θα συνδέσει την κλίση της ευθείας με την εφαπτομένη και την ταχύτητα.



Εικόνα 8.

V. Η ερώτηση 4 έχει στόχο να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι η κλίση της ευθείας είναι αρνητική στην περίπτωση που η γωνία είναι αμβλεία. Η συμπλήρωση των στηλών της απόστασης από τον Πειραιά τώρα πλέον μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του λογισμικού (εικόνα 9).

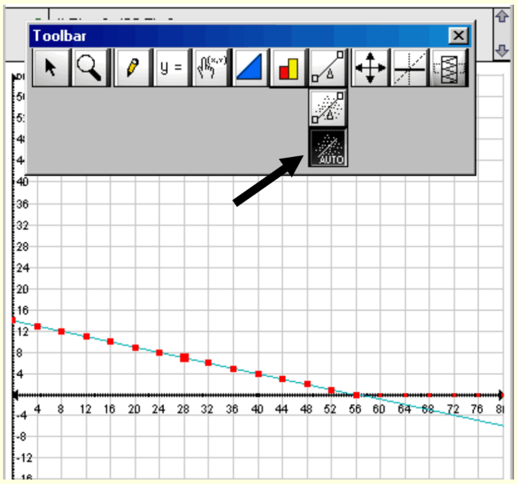
Οι στήλες a, b και c του πίνακα πρέπει να συμπληρωθούν με την τιμή 20, εφόσον οι ποδηλάτες περιμένουν στον Πειραιά μέχρι να φτάσει και ο τελευταίος.

Πίνακας

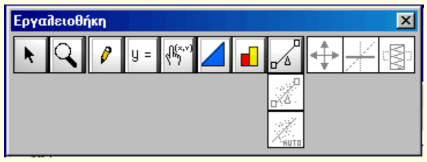
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	a	b	c	A=20-a	S=20-b	R=20-c
χρόνος(min)	Ανδρέας(km)	Βασίλης(km)	Γιώργος(km)	km	km	km
0	0	0	6	20	20	14
4	2	1	7	18	19	13
8	4	2	8	16	18	12
12	6	3	9	14	17	11
16	8	4	10	12	16	10
20	10	5	11	10	15	9
24	12	6	12	8	14	8
28	14	7	13	6	13	7
32	16	8	14	4	12	6
36	18	9	15	2	11	5
40	20	10	16	0	10	4
44	20	11	17	0	9	3
48	20	12	18	0	8	2
52	20	13	19	0	7	1
56	20	14	20	0	6	0
60	20	15	20	0	5	0
64	20	16	20	0	4	0
68	20	17	20	0	3	0
72	20	18	20	0	2	0
76	20	19	20	0	1	0
80	20	20	20	0	0	0

Εικόνα 9.



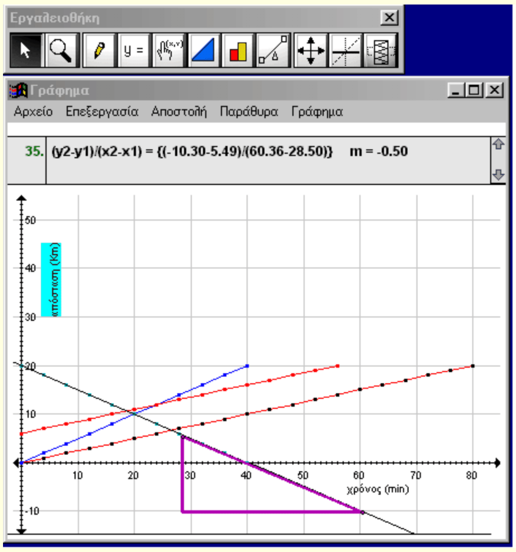
Εικόνα 10.



Εικόνα 11.

Προφανώς, θα παρουσιαστούν και σημεία πάνω στον άξονα x'x όπως φαίνεται στην εικόνα 10. Αν διαγράψουμε ένα ένα τα σημεία αυτά, επιλέγοντας "Διαγραφή σημείου" από το μενού "Επεξεργασία", μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα άλλα με τη βοήθεια του αυτόματου εργαλείου που φαίνεται στην εικόνα 10.

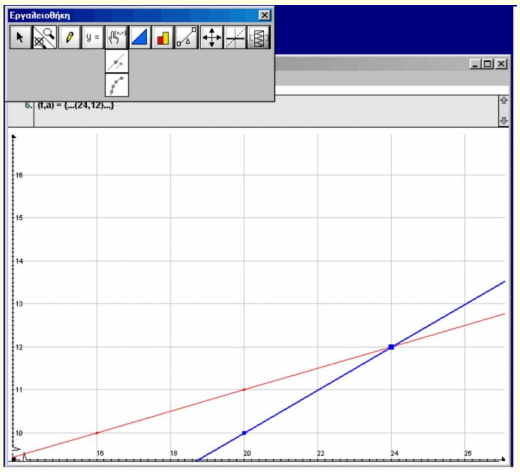
Τέλος, καλό θα είναι να γίνει μια αναφορά στο ότι η ευθεία με αρνητική κλίση είναι ένα απλό παράδειγμα γνησίως φθίνουσας συνάρτησης (βλ. εικόνα 12).



Εικόνα 12.

VI. Η ερώτηση 5 έχει στόχο να οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι η λύση ενός συστήματος παριστάνεται από το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των εξισώσεων (βλ. εικόνα 13). Εδώ είναι χρήσιμο να συζητηθεί η σημασία της παραλληλίας των δύο γραφικών παραστάσεων (αδύνατο σύστημα).

Η χρήση του λογισμικού εδώ δεν είναι περιττή, αφού σε πολύπλοκα συστήματα (με συντελεστές δύσχρηστους) το λογισμικό μπορεί να προσφέρει μία ικανοποιητική προσέγγιση.



Εικόνα 13.

VII. Ο στόχος της ερώτησης 6 είναι να υπολογίσουν οι μαθητές μία σχέση η οποία δεν προσεγγίζεται εύκολα όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

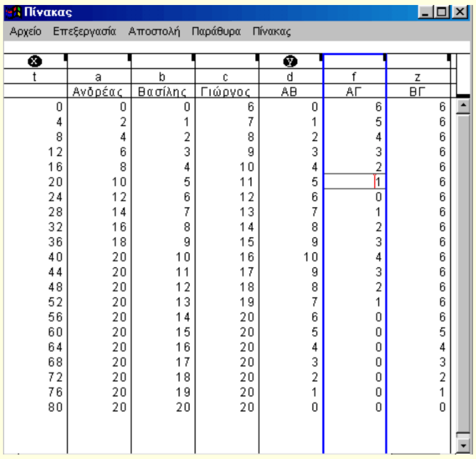
Καταρχήν, θα κατασκευάσουν έναν πίνακα (εικόνα 14) ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα της ερώτησης 2 (αφού πρώτα συμπληρωθούν οι στήλες) αφαιρώντας τους αριθμούς που υπάρχουν στα κελιά έναν προς ένα. Εδώ θα πρέπει να επισημανθεί στους μαθητές ότι μία ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x είναι η γραφική παράσταση μιας σταθερής συνάρτησης.

Μία άλλη σημαντική δραστηριότητα με την οποία θα εμπλακούν οι μαθητές είναι και αυτή της κατασκευής συνάρτησης πολλαπλών τύπων. Αυτό θα συμβεί αφού η απόσταση, π.χ., του Ανδρέα από το Γιώργο στην αρχή μειώνεται, σε κάποια χρονική στιγμή γίνεται 0, στη συνέχεια αυξάνεται και τέλος, όταν ο Ανδρέας θα φτάσει και θα σταματήσει στον Πειραιά, η απόσταση θα αρχίσει να μικραίνει.

Όπως φαίνεται σε κάθε γράφημα, ο τύπος της συνάρτησης αλλάζει για τις διάφορες τιμές του χρόνου και οι μαθητές τώρα με βάση τον πίνακα με τα ζεύγη τιμών αλλά και τις γραφικές παραστάσεις (εικόνες 15,16,17) μπορούν να γράψουν τους τύπους των συναρτήσεων που μας δίνουν τις αποστάσεις μεταξύ των ποδηλατών.

Για παράδειγμα, η απόσταση ΒΓ (του Βασίλη από το Γιώργο) δίνεται από τον τύπο:

$$f(t) = \begin{cases} 6 & 0 \leq t \leq 56 \\ -\dfrac{1}{4}t + 20 & 56 < t \leq 80 \end{cases}$$

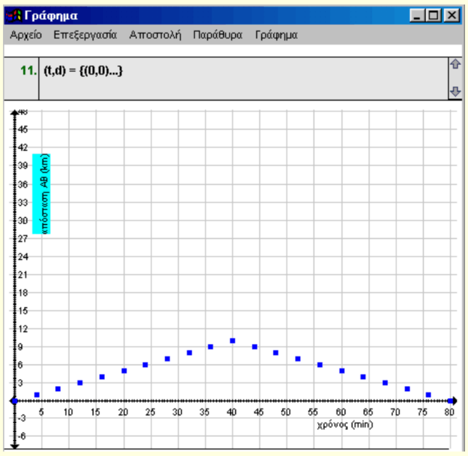


Πίνακας

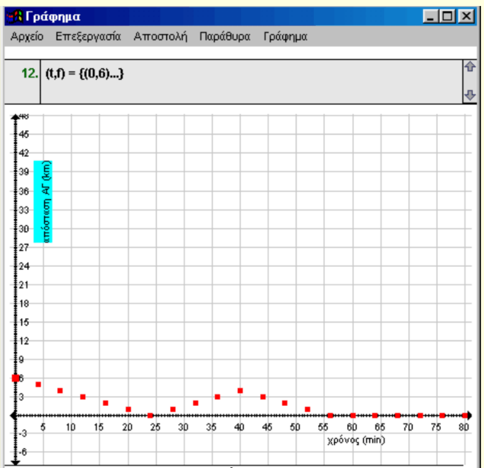
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	a Ανδρέας	b Βασίλης	c Γιώργος	d ΑΒ	f ΑΓ	z ΒΓ
0	0	0	6	0	6	6
4	2	1	7	1	5	6
8	4	2	8	2	4	6
12	6	3	9	3	3	6
16	8	4	10	4	2	6
20	10	5	11	5	1	6
24	12	6	12	6	0	6
28	14	7	13	7	1	6
32	16	8	14	8	2	6
36	18	9	15	9	3	6
40	20	10	16	10	4	6
44	20	11	17	9	3	6
48	20	12	18	8	2	6
52	20	13	19	7	1	6
56	20	14	20	6	0	6
60	20	15	20	5	0	5
64	20	16	20	4	0	4
68	20	17	20	3	0	3
72	20	18	20	2	0	2
76	20	19	20	1	0	1
80	20	20	20	0	0	0

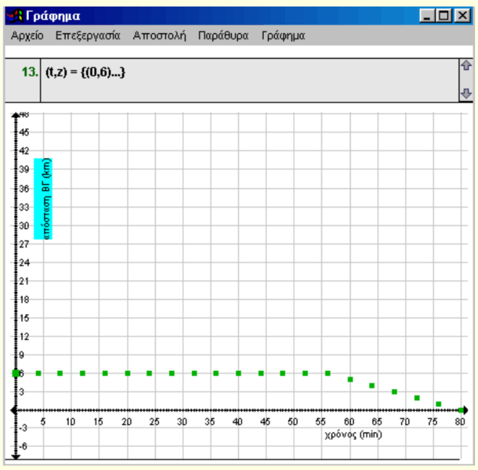
Εικόνα 14.



Εικόνα 15.



Εικόνα 16.



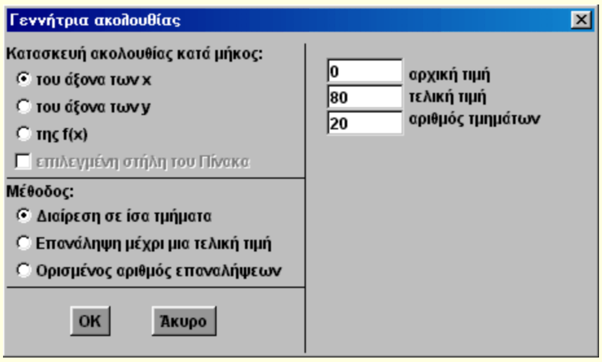
Εικόνα 17.

VIII. *Παρατήρηση για συζήτηση με αφορμή την ερώτηση 2.*

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, με τη μέθοδο της προσαρμογής μιας ευθείας πάνω σε συνευθειακά σημεία, δεν είναι βέβαιο ότι έχουμε προσαρμόσει ακριβώς τη ζητούμενη ευθεία. Για να το εξασφαλίσουμε αυτό, μπορούμε να αποκόψουμε σημεία από την ευθεία και να ελέγξουμε αν αυτά ικανοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος. Ας ελέγξουμε, για παράδειγμα, την απάντηση στην ερώτηση 2 για την περίπτωση του Ανδρέα.

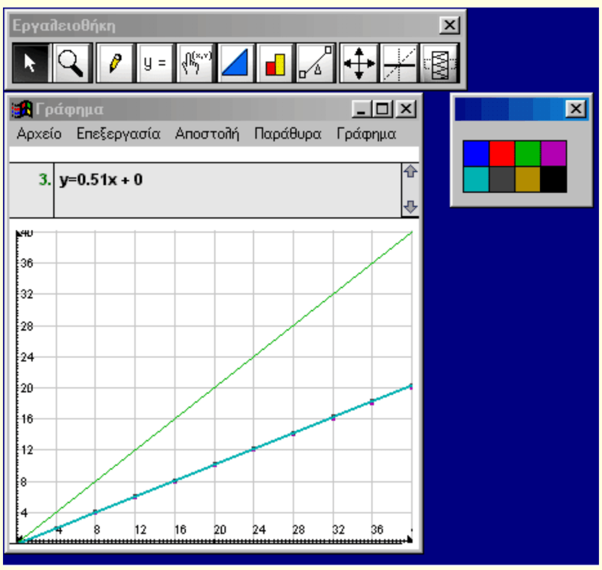
Από το μενού "Γράφημα" του παραθύρου "Γράφημα" επιλέγουμε "Δείγμα από καμπύλη" και ύστερα "Σύνολο σημείων", αφού πρώτα έχουμε επιλέξει την ευθεία $y = 0{,}51x + 0$, από την οποία θα αποκόψουμε σημεία. Στο παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται, συμπληρώνουμε τον αριθμό τμημάτων στα οποία επιθυμούμε να διαιρέσουμε το επιλεγμένο τμήμα του άξονα (εικόνα 18).

Το πλήθος των σημείων τα οποία αποκόπτουμε με αυτό τον τρόπο είναι κατά ένα μεγαλύτερο από τον αριθμό των τμημάτων.

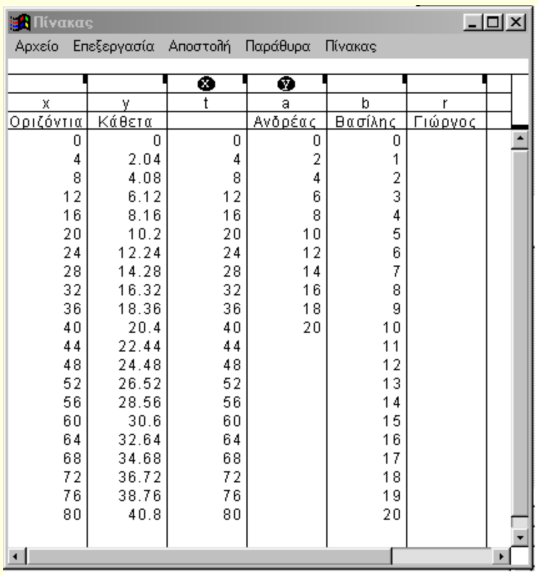


Εικόνα 18.

Τα σημεία που έχουν αποκοπεί εμφανίζονται πάνω στην ευθεία (βλ. εικόνα 19). Στη συνέχεια, από το μενού "Αποστολή" του παραθύρου "Γράφημα" τα σημεία αποστέλλονται στον πίνακα, όπου και γίνεται έλεγχος (βλ. εικόνα 20). Παρατηρούμε ότι, ενώ η στήλη x συμπίπτει με τη στήλη t, η στήλη y δε συμπίπτει με τη στήλη a.



Εικόνα 19.



x Οριζόντια	y Κάθετα	t	a Ανδρέας	b Βασίλης	r Γιώργος
0	0	0	0	0	
4	2.04	4	2	1	
8	4.08	8	4	2	
12	6.12	12	6	3	
16	8.16	16	8	4	
20	10.2	20	10	5	
24	12.24	24	12	6	
28	14.28	28	14	7	
32	16.32	32	16	8	
36	18.36	36	18	9	
40	20.4	40	20	10	
44	22.44	44		11	
48	24.48	48		12	
52	26.52	52		13	
56	28.56	56		14	
60	30.6	60		15	
64	32.64	64		16	
68	34.68	68		17	
72	36.72	72		18	
76	38.76	76		19	
80	40.8	80		20	

Εικόνα 20.

Ερώτηση 1η (7 μονάδες)

Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες μεταβολών παριστάνουν ποσά x και y, των οποίων η σχέση έχει γραφική παράσταση μία ευθεία;

Α

x	y
1	−1
2	2
3	−3
4	4
5	−5
6	6

Β

x	y
1	3
3	9
5	15
7	21
9	27
11	33

Γ

x	y
−1	1/2
−2	1
−3	3/2
−4	2
−5	5/2
−6	3

Δ

x	y
1	−1
2	0
3	1
4	2
5	3
6	4

Ε

x	y
2	−4
4	−6
5	−10
6	−12
7	−14

α) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας χωρίς τη βοήθεια του Η/Υ. **(3,5 μονάδες)**

β) Να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησής σας μέσω του Η/Υ. Να εξηγήσετε, εφόσον τα αποτελέσματα στον Η/Υ συμφωνούν με αυτά της ερώτησης (α), την ορθότητα των απαντήσεων που έχετε δώσει στο (α). **(3,5 μονάδες)**

Ερώτηση 2η (7 μονάδες)

Σε όσους από τους παραπάνω πίνακες η σχέση μεταξύ των x και y έχει γραφική παράσταση ευθεία, να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας η οποία είναι η γραφική παράσταση της σχέσης:

α) Χωρίς τη χρήση του υπολογιστή. **(3 μονάδες)**

β) Με τη χρήση του υπολογιστή. **(4 μονάδες)**

Ερώτηση 3η (6 μονάδες)

Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων που είναι ευθείες:

α) Χωρίς τη χρήση υπολογιστή. **(3 μονάδες)**

β) Με τη χρήση του υπολογιστή. **(3 μονάδες)**

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

$Ε_1$) Στους πίνακες Β, Γ, Δ για ίσες μεταβολές του x αντιστοιχούν ίσες μεταβολές του y, άρα παριστάνουν ευθείες (έλεγχος της απάντησης με εισαγωγή των πινάκων στον υπολογιστή και εύρεση των σημείων).

$Ε_2$) Η εύρεση μπορεί να γίνει μέσω της παρατήρησης των αναλογιών $\frac{y}{x} = 3$ για τον Β, $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$ για τον Γ και της $x - 2 = y$ για τον Δ πίνακα. Η εύρεση μπορεί να γίνει μέσω του υπολογιστή.

$Ε_3$) **α)** Οι ευθείες είναι οι $(ε_1)$ $y = 3x$, $(ε_2)$ $y = -\frac{1}{2}x$ και $(ε_3)$ $y = x - 2$. Οι $(ε_1)$, $(ε_2)$ έχουν κοινό σημείο το $(0, 0)$, οι $(ε_1)$, $(ε_3)$ το σημείο $(-1, -3)$, αφού $3x = x - 2$, και οι $(ε_2)$, $(ε_3)$ το σημείο $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, αφού $-\frac{1}{2}x = x - 2$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις στον υπολογιστή δίνουν τις συντεταγμένες αυτών των σημείων.