Η μεταβολή του εμβαδού ενός ορθογωνίου

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Η μεταβολή του εμβαδού ενός ορθογωνίου είναι ένα πρόβλημα μέσω του οποίου δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάσουν ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως ένα μαθηματικό μοντέλο ενός προβλήματος. Στη συνέχεια, προσπαθώντας να λύσουν το πρόβλημα το οποίο τούς έχει τεθεί, μελετούν τις ιδιότητες και τη γραφική παράσταση του τριωνύμου, συνδέουν τις χαρακτηριστικές ποσότητες του τριωνύμου (ρίζες, σύνολο τιμών, σημείο μεταβολής της μονοτονίας) με τη γεωμετρική τους απεικόνιση (σημεία τομής με τον x΄x, κορυφή).

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος α και πλάτος β. Αν αυξήσουμε το μήκος κατά x και συγχρόνως ελαττώσουμε το πλάτος κατά το ίδιο ποσό, τότε το εμβαδόν του μεταβάλλεται και για κάθε τιμή της μεταβολής x δίνεται από τον τύπο $E(x) = (\alpha + x)(\beta - x)$. Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha\beta$ δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου σαν συνάρτηση της μεταβολής x, η μελέτη επομένως της συνάρτησης μας παρέχει πληροφορίες για τον τρόπο που μεταβάλλεται το εμβαδόν.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: *Κεφάλαιο 2:* Συναρτήσεις, *Κεφάλαιο 4:* Εξισώσεις – Ανισώσεις Β΄ βαθμού.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 2.5 και 4.4.

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να μάθουν οι μαθητές ότι οι σχέσεις της μορφής $\psi = f(x)$, που είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς x, έχουν γραφικές παραστάσεις παραβολές.
2. Να κατανοήσουν οι μαθητές τη γεωμετρική σημασία αλγεβρικών χαρακτηριστικών του τριωνύμου, π.χ. ρίζες, μέγιστο – ελάχιστο, πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου παράγοντα κτλ.
3. Να μάθουν οι μαθητές να επιλύουν και να ερμηνεύουν γραφικά εξισώσεις, ανισώσεις και συστήματα δευτέρου βαθμού.
4. Να μάθουν οι μαθητές ότι η παραβολή διαθέτει άξονα συμμετρίας και ότι το μέγιστο μίας παραβολής (κορυφή) με αρνητικό συντελεστή προκύπτει για την τιμή $x = -\beta/2\alpha$. Εφόσον υπάρχουν ρίζες, το μέγιστο βρίσκεται στο μέσον του τμήματος που ορίζουν οι εικόνες τους πάνω στον άξονα x΄x.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος 3 μέτρα και πλάτος 2 μέτρα. Μας θέτουν το παρακάτω ερώτημα: «Αν ελαττώσουμε το μήκος κατά ένα ποσό και αυξήσουμε το πλάτος κατά το ίδιο ποσό, πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του ορθογωνίου;».

Μία αυθόρμητη απάντηση που δίνουν αρκετοί σε αυτό το ερώτημα είναι ότι το εμβαδόν δε μεταβάλλεται. Θέλουμε, με τη βοήθεια του λογισμικού, να ελέγξουμε αν είναι σωστός αυτός ο ισχυρισμός.

1 Να ονομάσετε το ποσό μεταβολής x. Αν ελαττώσουμε το μήκος κατά το ποσό x και αυξήσουμε το πλάτος κατά το ίδιο ποσό, ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

Ποια ποσά τελικά μεταβάλλονται και ποια παραμένουν σταθερά;

2 Πώς μπορούμε να ελέγξουμε τον τρόπο με τον οποίο συμμεταβάλλονται τα ποσά;

Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών, με τη βοήθεια του λογισμικού, για τις ποσότητες οι οποίες μεταβάλλονται.

3 Με βάση τον πίνακα, να κατασκευάσετε το γράφημα των σημείων με τετμημένη x και τεταγμένη το εμβαδόν του ορθογωνίου.

4 Θέλουμε να βρούμε ποια μορφή συνάρτησης έχει γραφική παράσταση που περνά από όλα τα σημεία του γραφήματος.

Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του εργαλείου μεταφοράς γραφικών παραστάσεων, μετακινήστε τη γραφική παράσταση πρώτα κατακόρυφα και κατόπιν οριζόντια, για να εφαρμόσει όσο το δυνατόν καλύτερα πάνω στα σημεία του αρχικού γραφήματος. Ο τύπος της συνάρτησης αναγράφεται στο πάνω μέρος του πίνακα.

5 Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τον τύπο της συνάρτησης του εμβαδού που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

6 Τώρα πλέον γνωρίζετε τη σχέση που συνδέει τη μεταβολή x των διαστάσεων με το εμβαδόν. Να καθαρίσετε την οθόνη και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που έχετε προσδιορίσει στα προηγούμενα ερωτήματα.

Ποια κλίμακα πιστεύετε ότι είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

Ποιο είναι το νόημα των αρνητικών τιμών για το x;

7 Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε από τη γραφική παράσταση τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν;

8 Να υπολογίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. Ποια είναι η σημασία των σημείων αυτών για το συγκεκριμένο πρόβλημα; Ποια είναι η σχέση των δύο αυτών σημείων με το προηγούμενο ερώτημα;

9 Σε ένα άλλο ορθογώνιο, ιδίων διαστάσεων, ελαττώνουμε μόνο το μήκος κατά το ήμισυ της μεταβολής των διαστάσεων του αρχικού ορθογωνίου, δηλαδή κατά x/2. Είναι δυνατόν το νέο ορθογώνιο να αποκτήσει το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό για κάποια τιμή του x; Πώς μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό με τη βοήθεια του λογισμικού;

Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε΄ του νέου ορθογωνίου ως συνάρτηση του x και να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης στο ίδιο σύστημα αξόνων με την προηγούμενη.

10 Θέλουμε να βρούμε για ποια τιμή του x τα δύο εμβαδά είναι ίσα. Πώς μπορεί να γίνει αυτό με τη βοήθεια του λογισμικού και των γραφικών παραστάσεων;

Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα.

11 Με βάση τις δυο γραφικές παραστάσεις, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το εμβαδόν του πρώτου ορθογωνίου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του δευτέρου ορθογωνίου.

Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Ο καθηγητής, κατά την έναρξη της διδασκαλίας, δίνει στους μαθητές το φύλλο εργασίας.

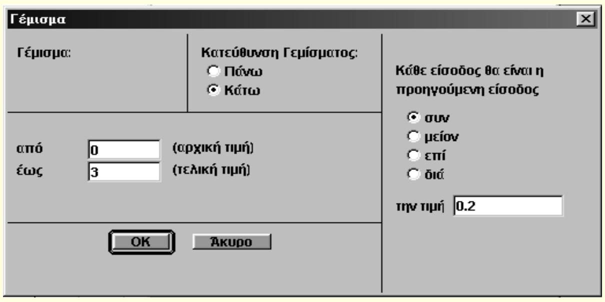
Εδώ θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τους τύπους των ριζών ενός τριωνύμου, τη μονοτονία και τον τύπο που μας δίνει τις συντεταγμένες της κορυφής του τριωνύμου.

I. Στόχος της ερώτησης 1 είναι να συμβολίσουν οι μαθητές με x το ποσό το οποίο μπορεί να μεταβάλλεται αυθαίρετα. Οι μαθητές γράφουν 3 – x για το μήκος και 2 + x για το πλάτος του ορθογωνίου και αναγνωρίζουν ότι τα ποσά που μεταβάλλονται είναι οι διαστάσεις και το εμβαδόν, ενώ το ποσό που δε μεταβάλλεται είναι η περίμετρος.

II. Στόχος της ερώτησης 2 είναι να κατασκευάσουν οι μαθητές έναν πίνακα τιμών, ο οποίος να περιέχει τιμές των ποσοτήτων οι οποίες μεταβάλλονται. Τόσο το πλήθος των τιμών όσο και το βήμα στην κατασκευή κλίμακας μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενα διαπραγμάτευσης για τους μαθητές.

Για παράδειγμα, στην πρώτη στήλη καταχωρούν 16 τιμές για το x, στη δεύτερη στήλη 16 τιμές για το μήκος, στην τρίτη στήλη 16 τιμές για το πλάτος και στην τέταρτη στήλη 16 τιμές για το εμβαδόν του ορθογωνίου ως εξής:

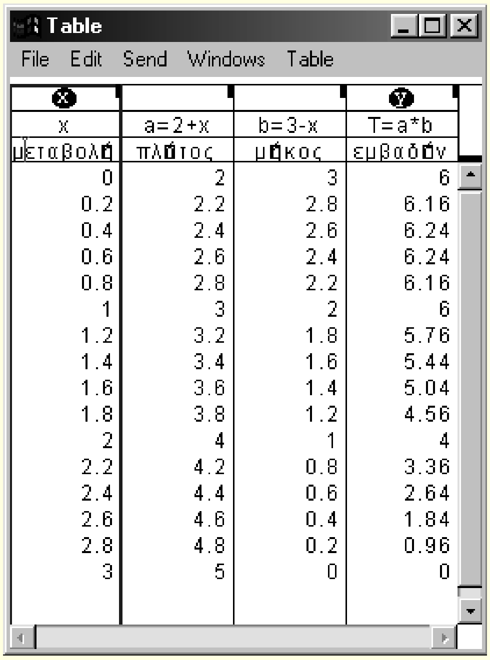
Επιλέγουν την πρώτη στήλη του πίνακα και σε αυτήν ενεργοποιούν το πρώτο κελί. Από το μενού “Πίνακας” επιλέγουν “Γέμισμα” και συμπληρώνουν τον πίνακα που εμφανίζεται (εικόνα 1).



Εικόνα 1.

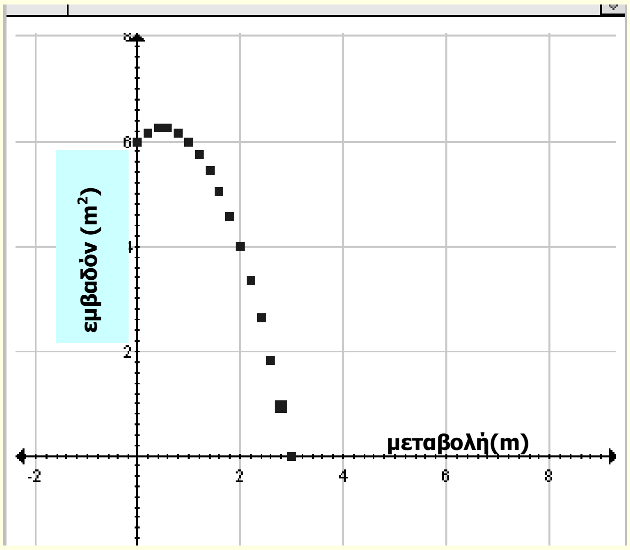
III. Στόχος της ερώτησης 3 είναι να παραστήσουν οι μαθητές τα ζεύγη του πίνακα (εικόνα 2) με σημεία πάνω στους άξονες.

! Με την εντολή “Αποστολή” στέλνουμε τα σημεία (x, y) στους άξονες, οπότε εμφανίζεται η εικόνα 3.



x μεταβολή	a=2+x πλάτος	b=3-x μήκος	T=a*b εμβαδόν
0	2	3	6
0.2	2.2	2.8	6.16
0.4	2.4	2.6	6.24
0.6	2.6	2.4	6.24
0.8	2.8	2.2	6.16
1	3	2	6
1.2	3.2	1.8	5.76
1.4	3.4	1.6	5.44
1.6	3.6	1.4	5.04
1.8	3.8	1.2	4.56
2	4	1	4
2.2	4.2	0.8	3.36
2.4	4.4	0.6	2.64
2.6	4.6	0.4	1.84
2.8	4.8	0.2	0.96
3	5	0	0

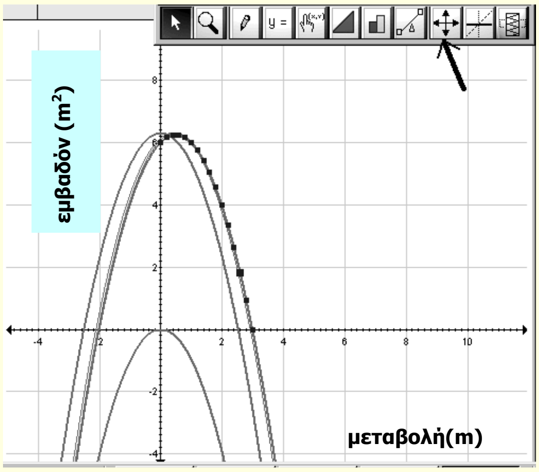
Εικόνα 2.



Εικόνα 3.

IV. Με την ερώτηση 4, επιδιώκουμε η διάταξη των σημείων στο γράφημα να παραπέμψει τους μαθητές σε παραβολή με αρνητικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου παράγοντα.

! Οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη βασική γραφική παράσταση της $y = -x^2$ και θα τη μετακινήσουν με τη βοήθεια του εργαλείου της παράλληλης μεταφοράς μέχρι να προσαρμοστεί ικανοποιητικά πάνω στα σημεία του γραφήματος (εικόνα 4).



Εικόνα 4.

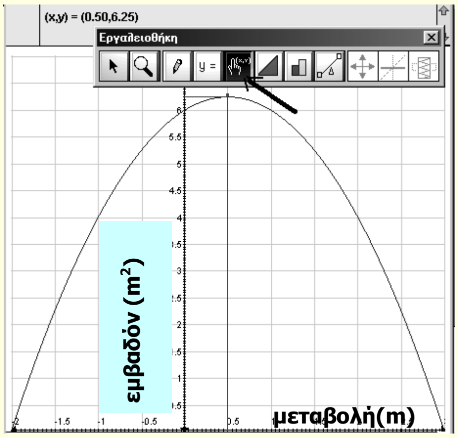
V. Η ερώτηση 5 έχει στόχο να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι η αλγεβρική προσέγγιση επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα της προσέγγισης μέσω του λογισμικού. Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από την έκφραση $(3 - x)(2 + x)$, επομένως η συνάρτηση του εμβαδού Ε δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + x + 6$.

VI. Η ερώτηση 6 έχει στόχο να χειριστούν οι μαθητές τη συνάρτηση $y = -x^2 + x + 6$ για τιμές του x μεταξύ –2 και 3. Οι αρνητικές τιμές για το x έχουν την έννοια της αύξησης του μήκους και της μείωσης του πλάτους. Η μέγιστη τιμή για το y δεν είναι ακόμη γνωστή και το άνω όριο μπορεί να θεωρηθεί ο αριθμός 7.

VII. Η ερώτηση 7 έχει στόχο να υποδείξει στους μαθητές τη χρήση της συμμετρίας. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να επιβεβαιώσουν αλγεβρικά τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής, τις οποίες υπολόγισαν με το εργαλείο εύρεσης συντεταγμένων.

! Η συμμετρία είναι ισχυρή ένδειξη για την τιμή του x για την οποία το y παίρνει τη μέγιστη τιμή (εικόνα 5).

Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε να επιβεβαιώσει τη συμμετρία και αλγεβρικά για τιμές του x συμμετρικές του 1/2.



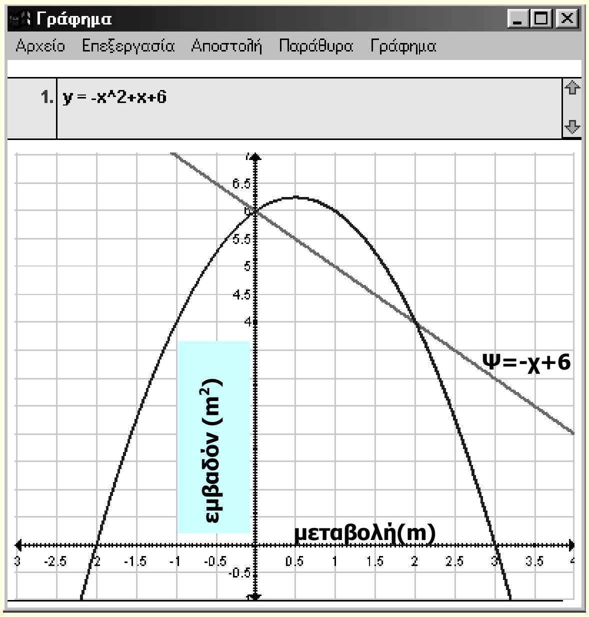
Εικόνα 5.

VIII. Οι μαθητές, στην ερώτηση 8, θα κάνουν πάλι χρήση της συμμετρίας. Οι τιμές του y μηδενίζονται για $x = -2$ και $x = 3$. Εκεί μηδενίζεται το εμβαδόν και στο μέσον βρίσκεται το σημείο στο οποίο παρουσιάζεται η μέγιστη τιμή για το y.

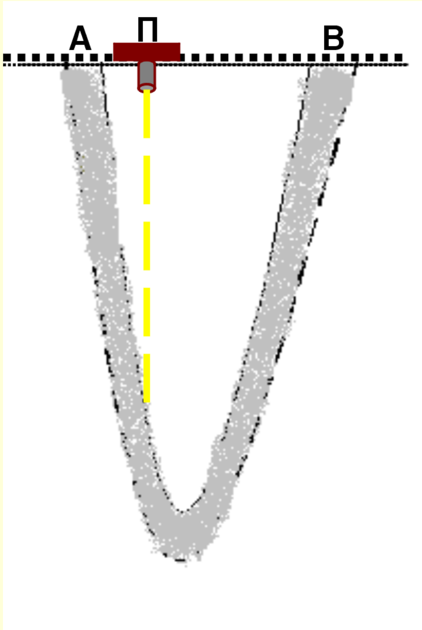
IX. Η συνάρτηση του νέου εμβαδού είναι $E'(x) = -x + 6$.

Και στις δύο επόμενες ερωτήσεις, οι μαθητές βρίσκουν τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων και επιλέγουν τιμές για το x που βρίσκονται μεταξύ των τετμημένων των σημείων τομής.

! Τα σημεία τομής έχουν προφανείς συντεταγμένες, οι οποίες επιβεβαιώνονται και αλγεβρικά.



Εικόνα 6.



x(m)	h(m)
0	0
0.3	2.91
0.6	5.64
0.9	8.19
1.2	10.56
1.5	12.75
1.8	14.76
2.1	15.79
2.4	18.24
2.7	19.71
3	21.8
3.3	22.11
3.6	23.04
3.9	23.79
4.2	24.36
4.5	24.75
4.8	24.96
5.1	24.99
5.4	24.84
5.7	24.51
6	24

Εικόνα 7.

Στην εικόνα φαίνεται ένα παραβολικό φρεάτιο (πηγάδι), το οποίο έχει κατασκευαστεί για τις ανάγκες κάποιων έργων. Επειδή μας ενδιαφέρει η ακρίβεια της κατασκευής, έχουμε τοποθετήσει κατά μήκος του ανοίγματος ΑΒ έναν κυλιόμενο μικρό μετρητή αποστάσεων Π, ο οποίος κάθε 30 εκατοστά μετρά το βάθος του φρεατίου και καταγράφει τις τιμές σε έναν πίνακα. Η πρώτη στήλη περιέχει τις τιμές της απόστασης ΠΑ, την οποία συμβολίζουμε με x, ενώ η δεύτερη στήλη περιέχει τις τιμές για το βάθος h του φρεατίου.

Ερώτηση 1η (6 μονάδες)

Να καταγράψετε τις τιμές στον πίνακα του Function Probe και στη συνέχεια στον πίνακα “Γράφημα”, αφού πρώτα κατασκευάσετε κατάλληλη κλίμακα. Από τη διάταξη των σημείων, να βρείτε τα σημεία του φρεατίου στα οποία δεν υπάρχει ακρίβεια στην κατασκευή.

Ερώτηση 2η (8 μονάδες)

Να βρείτε το μέγιστο βάθος του φρεατίου, καθώς και το άνοιγμα του φρεατίου, δηλαδή την απόσταση ΑΒ.

Ερώτηση 3η (6 μονάδες)

Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να αυξηθεί ή να μειωθεί το βάθος του φρεατίου στα σημεία τα οποία δεν υπάρχει ακρίβεια στην κατασκευή, ώστε να αποκατασταθεί η ακρίβεια.

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

E_1) Θα πρέπει να αξιολογηθούν πολύ θετικά οι μαθητές οι οποίοι θα αλλάξουν τα πρόσημα των μετρήσεων της δεύτερης στήλης ώστε η γραφική παράσταση να προσομοιάζει με το φρεάτιο. Τα σημεία στα οποία παρουσιάζεται ανωμαλία στα τοιχώματα του φρεατίου είναι τα (2,1, 15,79) και (3, 21,8).

E_2) Η παραβολή που περνά από όλα τα σημεία είναι η $y = x^2 - 10x$. Το μέγιστο βάθος του φρεατίου είναι 25 μέτρα και το άνοιγμά του 10 μέτρα.

E_3) Το σημείο με τετμημένη 2,1 έχει τεταγμένη −16,59, άρα το αρχικό βάθος θα πρέπει να αυξηθεί κατά 0,8 μέτρα. Το σημείο με τετμημένη 3 έχει τεταγμένη −21, άρα το αρχικό βάθος θα πρέπει να αυξηθεί κατά 0,8 μέτρα.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Η μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta + \gamma$ είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα μελετήσουν τη βασική ιδιότητα μιας άρτιας συνάρτησης, της $y = \alpha x^2$ (ο άξονας y΄y είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης). Στη συνέχεια, θα μελετήσουν τη μονοτονία της και θα προσεγγίσουν τη γραφική παράσταση και τη μονοτονία της γενικής μορφής του τριωνύμου $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μέσω της μεταφοράς της $y = \alpha x^2$.

Τέλος, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τα συμπεράσματά τους για τη μελέτη μιας κατακόρυφης, προς τα επάνω, βολής.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ: Κεφ. 4: Εξισώσεις – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Γνωστικό αντικείμενο: Κεφ. 2: Συναρτήσεις.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 2.5: Η συνάρτηση $f(x) = x^2$.
  Παρ. 4.4: Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

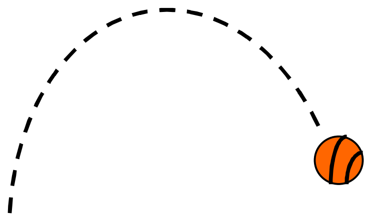
Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να συνδέσουν οι μαθητές την έννοια της άρτιας συνάρτησης με ένα γράφημα το οποίο διαθέτει άξονα συμμετρίας τον y΄y.
2. Να διαπιστώσουν οι μαθητές τη μονοτονία μίας συνάρτησης μέσα από έναν πίνακα τιμών, καθώς και μέσα από τη γραφική παράσταση.
3. Να μάθουν οι μαθητές ότι η γραφική παράσταση της $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y = \alpha x^2$ με παράλληλη μετατόπιση, φέρνοντάς την πρώτα στη μορφή $y = \alpha(x - \kappa)^2 + \lambda$.
4. Να μελετούν ένα φυσικό φαινόμενο όταν αυτό περιγράφεται μέσω μιας δευτεροβάθμιας σχέσης.

Όταν ένας παίκτης του μπάσκετ επιχειρεί σουτ, τότε η τροχιά της μπάλας είναι περίπου η ακόλουθη:



Κάθε σώμα, το οποίο εκτοξεύεται πλάγια με κάποια δύναμη, έχει αποδειχθεί από το Γαλιλαίο ότι εκτελεί μια τέτοια τροχιά, η οποία ονομάζεται παραβολική. Η απλούστερη εξίσωση μιας παραβολικής τροχιάς είναι η $y = \alpha x^2$.

Θέλουμε να μελετήσουμε τις μαθηματικές ιδιότητες της τροχιάς αυτής.

1 Πώς μπορεί να γίνει αυτό με τη βοήθεια του πίνακα τιμών του Function Probe; (Να επιλέξετε μια συγκεκριμένη εξίσωση, π.χ. $y = -5x^2$.)

2 Τι παρατηρείτε για τις τιμές της y όταν το x παίρνει αντίθετες τιμές; Μία συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα λέγεται άρτια. Ποια σχέση συνδέει τα $f(-x)$ και $f(x)$ σε μια άρτια συνάρτηση;

3 Οι τιμές της μεταβλητής x συνεχώς αυξάνονται. Συμβαίνει το ίδιο και με τις τιμές της μεταβλητής y; Να περιγράψετε τη μεταβολή τους.

4 Αυτά τα οποία διαπιστώσατε με τη βοήθεια του πίνακα τιμών να τα επαληθεύσετε και μέσω της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x^2$ στον πίνακα “Γράφημα” του Function Probe.

5 Αυτά τα οποία διαπιστώσαμε αφορούν τα συγκεκριμένα σημεία του πίνακα τιμών. Ισχύουν άραγε για όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης; Να αποκόψετε σημεία από τη γραφική παράσταση και να τα μεταφέρετε στον πίνακα. Τι παρατηρείτε;

6 Μια παραβολή δεν έχει πάντα κορυφή την αρχή των αξόνων. Να μεταφέρετε την αρχική παραβολή παράλληλα προς τους άξονες. Ποια μορφή έχει τώρα η εξίσωσή της;

7 Είναι η νέα παραβολή γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας από τη γραφική παράσταση, αλλά και από την εξίσωσή της.

8 Για ποιες τιμές της μεταβλητής x η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και για ποιες γνησίως φθίνουσα; Ποιες είναι οι συντεταγμένες της κορυφής της; Πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες αυτές με τη μετακίνηση της αρχικής παραβολής;