Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Η μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta + \gamma$ είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα μελετήσουν τη βασική ιδιότητα μιας άρτιας συνάρτησης, της $y = \alpha x^2$ (ο άξονας y΄y είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης). Στη συνέχεια, θα μελετήσουν τη μονοτονία της και θα προσεγγίσουν τη γραφική παράσταση και τη μονοτονία της γενικής μορφής του τριωνύμου $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μέσω της μεταφοράς της $y = \alpha x^2$.

Τέλος, οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τα συμπεράσματά τους για τη μελέτη μιας κατακόρυφης, προς τα επάνω, βολής.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ: Κεφ. 4: Εξισώσεις – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Γνωστικό αντικείμενο: Κεφ. 2: Συναρτήσεις.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 2.5: Η συνάρτηση $f(x) = x^2$.
  Παρ. 4.4: Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

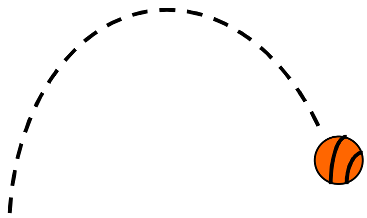
Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να συνδέσουν οι μαθητές την έννοια της άρτιας συνάρτησης με ένα γράφημα το οποίο διαθέτει άξονα συμμετρίας τον y΄y.
2. Να διαπιστώσουν οι μαθητές τη μονοτονία μίας συνάρτησης μέσα από έναν πίνακα τιμών, καθώς και μέσα από τη γραφική παράσταση.
3. Να μάθουν οι μαθητές ότι η γραφική παράσταση της $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y = \alpha x^2$ με παράλληλη μετατόπιση, φέρνοντάς την πρώτα στη μορφή $y = \alpha(x - \kappa)^2 + \lambda$.
4. Να μελετούν ένα φυσικό φαινόμενο όταν αυτό περιγράφεται μέσω μιας δευτεροβάθμιας σχέσης.

Όταν ένας παίκτης του μπάσκετ επιχειρεί σουτ, τότε η τροχιά της μπάλας είναι περίπου η ακόλουθη:



Κάθε σώμα, το οποίο εκτοξεύεται πλάγια με κάποια δύναμη, έχει αποδειχθεί από το Γαλιλαίο ότι εκτελεί μια τέτοια τροχιά, η οποία ονομάζεται παραβολική. Η απλούστερη εξίσωση μιας παραβολικής τροχιάς είναι η $y = \alpha x^2$.

Θέλουμε να μελετήσουμε τις μαθηματικές ιδιότητες της τροχιάς αυτής.

1 Πώς μπορεί να γίνει αυτό με τη βοήθεια του πίνακα τιμών του Function Probe; (Να επιλέξετε μια συγκεκριμένη εξίσωση, π.χ. $y = -5x^2$.)

2 Τι παρατηρείτε για τις τιμές της y όταν το x παίρνει αντίθετες τιμές; Μία συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα λέγεται άρτια. Ποια σχέση συνδέει τα $f(-x)$ και $f(x)$ σε μια άρτια συνάρτηση;

3 Οι τιμές της μεταβλητής x συνεχώς αυξάνονται. Συμβαίνει το ίδιο και με τις τιμές της μεταβλητής y; Να περιγράψετε τη μεταβολή τους.

4 Αυτά τα οποία διαπιστώσατε με τη βοήθεια του πίνακα τιμών να τα επαληθεύσετε και μέσω της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x^2$ στον πίνακα “Γράφημα” του Function Probe.

5 Αυτά τα οποία διαπιστώσαμε αφορούν τα συγκεκριμένα σημεία του πίνακα τιμών. Ισχύουν άραγε για όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης; Να αποκόψετε σημεία από τη γραφική παράσταση και να τα μεταφέρετε στον πίνακα. Τι παρατηρείτε;

6 Μια παραβολή δεν έχει πάντα κορυφή την αρχή των αξόνων. Να μεταφέρετε την αρχική παραβολή παράλληλα προς τους άξονες. Ποια μορφή έχει τώρα η εξίσωσή της;

7 Είναι η νέα παραβολή γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας από τη γραφική παράσταση, αλλά και από την εξίσωσή της.

8 Για ποιες τιμές της μεταβλητής x η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και για ποιες γνησίως φθίνουσα; Ποιες είναι οι συντεταγμένες της κορυφής της; Πώς σχετίζονται οι συντεταγμένες αυτές με τη μετακίνηση της αρχικής παραβολής;

9 Όταν εκτοξεύουμε προς τα επάνω ένα σώμα με αρχική ταχύτητα U_o, τότε το ύψος h στο οποίο βρίσκεται ανά πάσα χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $h(t) = U_o t - (1/2)gt^2$. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή του g είναι 10 m/sec^2, ενώ η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι 20 m/sec. Ποια είναι η συγκεκριμένη εξίσωση του ύψους; Τι μορφή θα έχει η γραφική παράσταση της σχέσης;

10 Να φέρετε την εξίσωση του ύψους στη μορφή $y = \alpha(x - \kappa)^2 + \lambda$. Στη συνέχεια, να κάνετε τη γραφική παράσταση με τη βοήθεια της $y = \alpha x^2$.

11 Σε τι ύψος θα φτάσει το σώμα, επί πόσο χρόνο θα βρίσκεται σε ανοδική πορεία και επί πόσο χρόνο συνολικά θα κινείται;

12 Πώς σχετίζονται οι απαντήσεις του ερωτήματος 9 με αυτές του ερωτήματος 7;

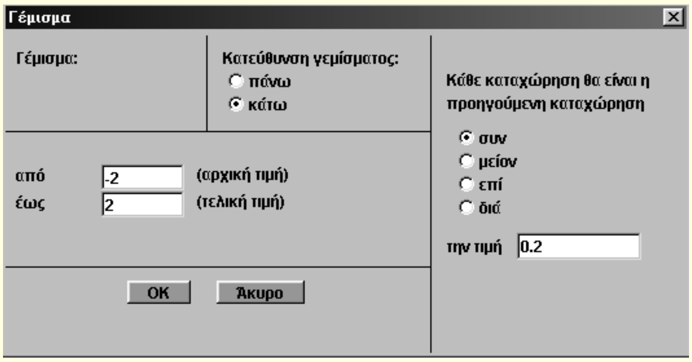
✔ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Ο καθηγητής κατά την έναρξη της διδασκαλίας δίνει στους μαθητές το φύλλο εργασίας. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της γνησίως αύξουσας και της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. Ακόμη, θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x - \alpha)$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ με μεταφορά δεξιά ή αριστερά, ενώ η $y = f(x) + \kappa$ με μεταφορά πάνω ή κάτω.

Στη συνέχεια, συζητά με τους μαθητές για την τροχιά που ακολουθεί μια μπάλα του μπάσκετ και γενικά ένα σώμα το οποίο βάλλεται υπό γωνία.

I. Στην ερώτηση 1, οι μαθητές θα κατασκευάσουν έναν πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $y = -5x^2$. Η επιλογή της συνάρτησης σχετίζεται, αφενός, με την τροχιά μιας πλάγιας βολής και, αφετέρου, με την ερώτηση 8.

! Στον πίνακα τιμών, η στήλη των τιμών για το x καλό θα είναι να συμπληρωθεί για τιμές μεταξύ –2 και 2 ώστε να αποφύγουμε πολύ μεγάλες τιμές για το y. Η συμπλήρωση θα γίνει με την εντολή “Γέμισμα” από το μενού “Πίνακας” (εικόνα 1).



Εικόνα 1.

! Η συμπλήρωση της στήλης για τη μεταβλητή y θα γίνει με τη βοήθεια του τύπου $y = -5x^2$ (εικόνα 2).

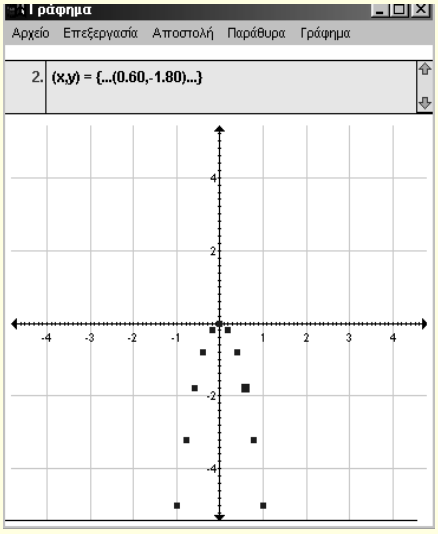
x	y=-5x^2
-1.6	-12.8
-1.4	-9.8
-1.2	-7.2
-1	-5
-0.8	-3.2
-0.6	-1.8
-0.4	-0.8
-0.2	-0.2
0	0
0.2	-0.2
0.4	-0.8
0.6	-1.8
0.8	-3.2
1	-5
1.2	-7.2
1.4	-9.8
1.6	-12.8
1.8	-16.2
2	-20

Εικόνα 2.

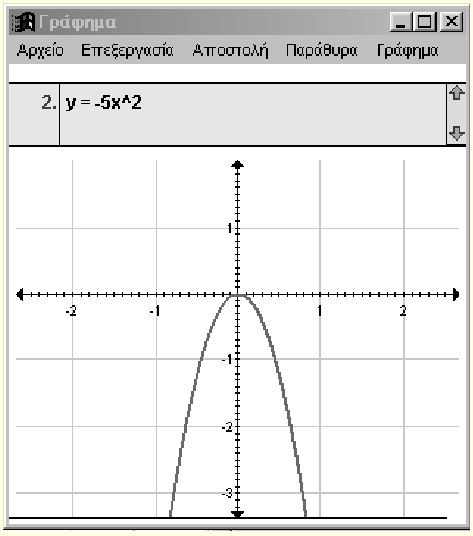
II. Στην ερώτηση 2, οι μαθητές θα παρατηρήσουν τη συμμετρία των τιμών της μεταβλητής y, με δεδομένη τη συμμετρία των τιμών της μεταβλητής x. Στη συνέχεια, καλό θα είναι να γράψουν μερικές ισότητες της μορφής $f(-0{,}2) = f(0{,}2)$, $f(-0{,}4) = f(0{,}4)$ κτλ., ώστε να φτάσουν στο γενικό συμπέρασμα $f(-x) = f(x)$, που αποτελεί τη συμβολική έκφραση της ιδιότητας των άρτιων συναρτήσεων.

III. Οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι, ενώ οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνονται, οι τιμές της μεταβλητής y αυξάνονται μέχρι το 0 και στη συνέχεια ελαττώνονται. Η παρατήρηση αυτή θα δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να προσεγγίσουν μέσω του πίνακα τιμών τη μεταβολή της μονοτονίας της συνάρτησης, ώστε κατόπιν να παρατηρήσουν την ίδια μεταβολή και μέσω της γραφικής απεικόνισης των ζευγών.

IV. Οι μαθητές αποστέλλουν τα σημεία του πίνακα τιμών στον πίνακα “Γράφημα” μέσω της εντολής “Σημεία σε γράφημα” από το μενού “Αποστολή” και αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των σημείων τις οποίες είχαν παρατηρήσει στις προηγούμενες ερωτήσεις (εικόνα 3). Στη συνέχεια, από το μενού “Γράφημα” επιλέγουν “Νέος τύπος” και κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (εικόνα 4).

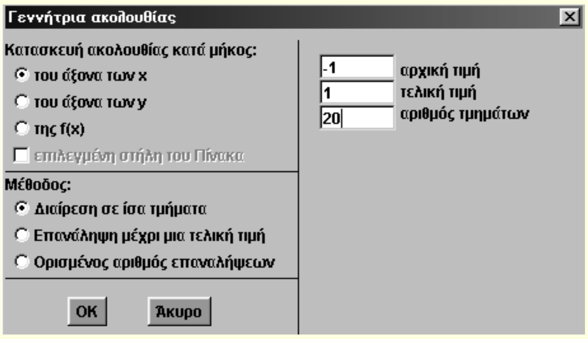


Εικόνα 3.

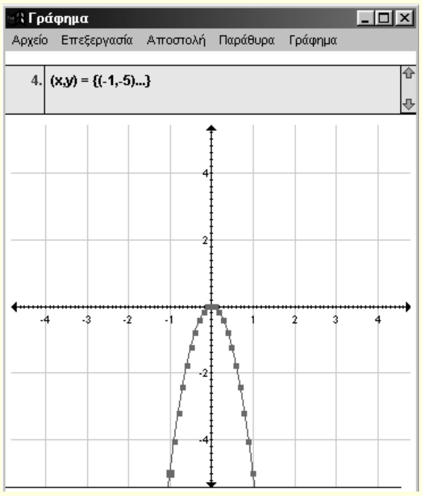


Εικόνα 4.

V. Στην ερώτηση 5, οι μαθητές θα αποκόψουν σημεία από τη γραφική παράσταση μέσω της εντολής “Δείγμα από καμπύλη-Σύνολο σημείων” από το μενού “Γράφημα” (εικόνες 5 και 6).



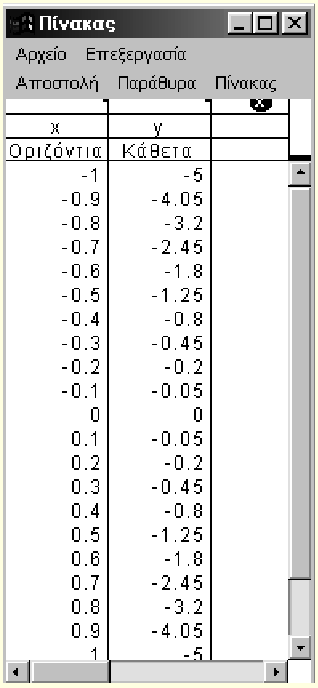
Εικόνα 5.



Εικόνα 6.

Η αποστολή των σημείων από τη γραφική παράσταση στον πίνακα τιμών θα δείξει στο μαθητή την ισοδυναμία του πίνακα τιμών (εικόνα 7) με τη γραφική παράσταση, αφού θα έχει τη δυνατότητα να αναγνωρίσει τις ίδιες ιδιότητες μιας συνάρτησης και στα δύο.

Γενικότερα, ο μαθητής μέσω του λογισμικού έχει τη δυνατότητα να συνδέσει τις τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης: Πίνακας τιμών – Γράφημα – Τύπος. Η σύνδεση αυτή θα οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.



x	y
Οριζόντια	Κάθετα
-1	-5
-0.9	-4.05
-0.8	-3.2
-0.7	-2.45
-0.6	-1.8
-0.5	-1.25
-0.4	-0.8
-0.3	-0.45
-0.2	-0.2
-0.1	-0.05
0	0
0.1	-0.05
0.2	-0.2
0.3	-0.45
0.4	-0.8
0.5	-1.25
0.6	-1.8
0.7	-2.45
0.8	-3.2
0.9	-4.05
1	-5

Εικόνα 7.

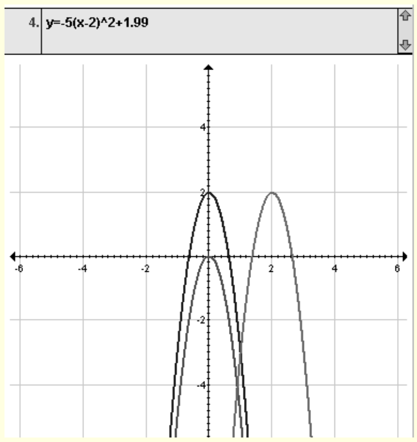
VI. Στην ερώτηση 6, οι μαθητές θα μεταφέρουν τη γραφική παράσταση της $y = -5x^2$ με τη βοήθεια του κατάλληλου εργαλείου (εικόνα 8) και θα παρατηρήσουν ότι η εξίσωση της νέας παραβολής έχει άμεση σχέση με τους δύο τρόπους μεταφοράς της αρχικής (εικόνα 9).

Εδώ καλό θα είναι να γίνει συζήτηση με τους μαθητές για τον τρόπο με τον οποίο το λογισμικό εμφανίζει την εξίσωση της τελικής καμπύλης που προκύπτει μετά από τις δύο μεταφορές, ώστε να συνδέσουν τον τρόπο μεταφοράς μιας καμπύλης με τις μεταβολές που συμβαίνουν στον τύπο της καμπύλης.

Το βασικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει είναι ότι η εξίσωση οποιασδήποτε παραβολής μπορεί να πάρει τη μορφή:

$y = \alpha(x - \kappa)^2 + \lambda$.

Εικόνα 8.



Εικόνα 9.

VII. Οι ερωτήσεις 7 και 8 θα απαντηθούν με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης και του τρόπου με τον οποίο έγινε η μεταφορά. Ο διδακτικός στόχος εδώ είναι να μάθει ο μαθητής ότι στην ουσία οι δύο μεταφορές έχουν μεταθέσει τους άξονες στο σημείο (κ, λ).

VIII. Μέχρι τώρα οι μαθητές έχουν μελετήσει την παραβολή και στη συνέχεια καλούνται να χρησιμοποιήσουν το μαθηματικό μοντέλο του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου στη μελέτη ενός φυσικού φαινομένου όπως είναι η βολή ενός σώματος. Στην ερώτηση 9, οι μαθητές θα αναγνωρίσουν την εξίσωση μιας παραβολής. Εδώ ο διδάσκων θα πρέπει να συζητήσει με τους μαθητές τη διαφορά μεταξύ της τροχιάς του σώματος (ευθεία) και της γραφικής παράστασης του ύψους ως συνάρτησης του χρόνου.

IX. Η εξίσωση $h(t) = U_o t - 1/2gt^2$ θα γραφεί ως συνάρτηση $y = -5x^2 + 20x$, η οποία μετατρέπεται σε $y = -5(x - 2)^2 + 20$. Τώρα ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να μελετήσει το συνολικό χρόνο κίνησης μέχρι να επιστρέψει στο έδαφος, που είναι το διπλάσιο του αριθμού που αντιστοιχεί στη μεταφορά πάνω στον άξονα x΄x, δηλαδή 4. Στο σημείο 2, από όπου περνά ο νέος άξονας συμμετρίας, το y παίρνει τη μέγιστη τιμή, που αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

φύλλο αξιολόγησης

Ερώτηση 1η (5 μονάδες)

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες;

i) $y = 2x^3$

ii) $y = \frac{1}{2}x^2$

iii) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

iv) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας με τη βοήθεια του Η/Υ.

Ερώτηση 2η (7 μονάδες)

Αν θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της $y = \frac{1}{2}x^2$ σαν βασική, κατά πόσο πρέπει να μεταφερθεί ώστε να προκύψουν οι γραφικές παραστάσεις των iii) και iv);

Ερώτηση 3η (8 μονάδες)

Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ και $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ με βάση τη μονοτονία και τα ακρότατα της $y = \frac{1}{2}x^2$, καθώς και τις μεταφορές της γραφικής παράστασης.

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

E_1) Οι ii) iii) είναι άρτιες αφού διαθέτουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

E_2) Η iii) προκύπτει από τη ii) με μεταφορά κατά 1 προς τα κάτω, ενώ η iv) προκύπτει με μεταφορά κατά 1 αριστερά και κατά 1/2 προς τα επάνω: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$.

E_3) Η $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι το 0 και μετά το 0 γνησίως αύξουσα, ενώ στο 0 παρουσιάζει ελάχιστο το -1. Η $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα μέχρι το -1 και μετά είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο -1 παρουσιάζει ελάχιστο το 1/2.