Τα ρομπότ

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Τα ρομπότ είναι ένα πρόβλημα μέσω του οποίου οι μαθητές θα μελετήσουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης, η οποία εκφράζει το ημερήσιο κέρδος μιας επιχείρησης ως συνάρτηση των ωρών λειτουργίας. Η συνάρτηση όμως έχει μια ιδιαιτερότητα: οι τιμές της εξαρτώνται και από τον αριθμό των ρομπότ τα οποία διαθέτει, είναι δηλαδή μια παραμετρική συνάρτηση. Στην ουσία, όταν ο τύπος μιας συνάρτησης περιέχει παράμετρο, δεν εκφράζει μια συγκεκριμένη συνάρτηση, αλλά μια οικογένεια συναρτήσεων.

Ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο, το οποίο μελετά το ρυθμό μεταβολής μίας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της x_o, είναι η παράγωγος η οποία μάς δείχνει την ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η f στο σημείο αυτό. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την παράγωγο για να μελετήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το κέρδος σε συνάρτηση με το χρόνο λειτουργίας, αλλά θα πρέπει να ερευνήσουν αν η αύξηση ή η μείωση του αριθμού των ρομπότ επηρεάζει το κέρδος. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να κάνουν περισσότερες από μία γραφικές παραστάσεις.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Παράγωγος συνάρτησης, ρυθμός μεταβολής.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 1.3 και 1.4. (Μαθηματικά γενικής παιδείας).

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να μάθουν οι μαθητές να χειρίζονται θέματα μεγίστων και ελαχίστων μίας συνάρτησης μέσα από την παράγωγο, να μελετούν το πρόσημο και τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου ώστε να υπολογίζουν τα ακρότατα της συνάρτησης και τη μονοτονία της.
2. Οι μαθητές να μάθουν ότι η γραφική παράσταση της παραγώγου f΄ μίας συνάρτησης f μάς δείχνει παραστατικά τα σημεία στα οποία αναζητούμε το μέγιστο ή το ελάχιστο μίας συνάρτησης (σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f΄ με τον άξονα x΄x).
3. Οι μαθητές να μάθουν να διερευνούν το μοντέλο ενός προβλήματος μέσα από τον Η/Υ, ιδιαίτερα όταν αυτό περιέχει μία παράμετρο α, δίνοντας διάφορες τιμές στην παράμετρο και ελέγχοντας τα αποτελέσματα στον Η/Υ.

Συχνά, αυτό που ονομάζουμε κοινή λογική μάς υπαγορεύει να συμπεράνουμε ότι όσο περισσότερες ώρες δουλεύει ένα εργοστάσιο και όσο περισσότερα ρομπότ χρησιμοποιεί τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος του. Είναι όμως σωστό αυτό;

Από τη μελέτη που έγινε για τη λειτουργία του, προκύπτει ότι το ημερήσιο κέρδος σε χιλιάδες ευρώ υπολογίζεται από τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x \cdot e^{-x/\alpha}$, όπου x ο ημερήσιος χρόνος εργασίας σε ώρες και α ο αριθμός των ρομπότ τα οποία διαθέτει.

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι όσο περισσότερες ώρες λειτουργεί το εργοστάσιο τόσο περισσότερο κέρδος θα έχει.

1 Ποια ιδιότητα των συναρτήσεων θα πρέπει να έχει η συνάρτηση του κέρδους ώστε να ισχύει η υπόθεση; Πώς μπορούμε να μελετήσουμε αυτή την ιδιότητα;

2 Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x; Ποιο είναι, δηλαδή, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;

3 Ας υποθέσουμε ότι το εργοστάσιο διαθέτει 10 ρομπότ. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης κέρδους και του ρυθμού μεταβολής στον Η/Υ. Πώς σχετίζονται οι δύο γραφικές παραστάσεις; Ποιοι περιορισμοί θα πρέπει να ισχύουν για το χρόνο x και το κέρδος y;

4 Με βάση τις γραφικές παραστάσεις, να υπολογίσετε το χρόνο που θα πρέπει να λειτουργεί το εργοστάσιο, σε ημερήσια βάση, για να έχει μέγιστο κέρδος.

5 Ας επιχειρήσουμε τώρα να εξετάσουμε το πώς μεταβάλλεται το κέρδος της επιχείρησης σε σχέση με τον αριθμό των ρομπότ. Αν αυξηθεί ο αριθμός των ρομπότ, θα αυξηθεί το κέρδος; Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για τιμές του α μεγαλύτερες του 10. Ποιο είναι το τελικό συμπέρασμα;

✔ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Ο καθηγητής, κατά την έναρξη της διδασκαλίας, δίνει στους μαθητές το φύλλο εργασίας. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μελέτη της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης μέσω της παραγώγου, καθώς και ότι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης εκφράζεται μέσω της παραγώγου.

I. Στην ερώτηση 1, θα πρέπει οι μαθητές να μεταφράσουν την έκφραση «περισσότερο κέρδος» με την έκφραση «αύξουσα συνάρτηση» ώστε να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να γίνει χρήση της παραγώγου.

II. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι προφανώς το διάστημα από 0 μέχρι 24.

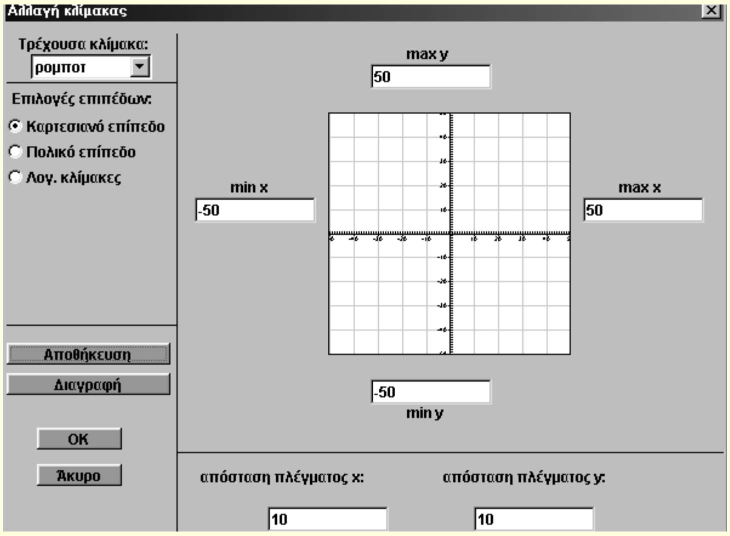
III. Στις ερωτήσεις 3 και 4, για τα 10 ρομπότ που έχουμε, η συνάρτηση του κέρδους είναι $Y = 10xe^{-\frac{x}{10}}$.

Τότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, με βάση τους κανόνες παραγώγισης, είναι $Y' = (10 - x)e^{-\frac{x}{10}}$, οπότε για $x = 10$ έχουμε ότι $Y' = 0$.

Καταρχήν, οι μαθητές θα επιλέξουν, μετά από διαπραγμάτευση, κατάλληλη κλίμακα.

Καλό θα είναι, κατά την επιλογή της κλίμακας, τα διαστήματα πάνω στους δύο άξονες να έχουν ίσα μήκη ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.

Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής “Αλλαγή κλίμακας” από το μενού “Γράφημα” (εικόνα 1).



Εικόνα 1.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα.

Οι συναρτήσεις που θα πρέπει να ορίσουμε στο λογισμικό είναι οι εξής:

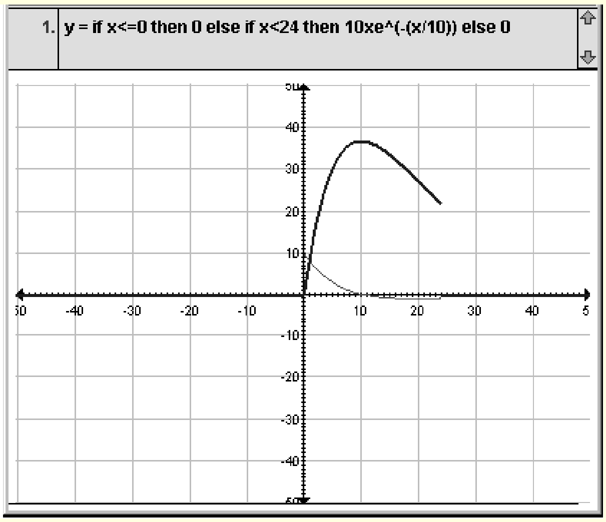
$$Y = \begin{cases} 10xe^{-\frac{x}{10}} & 0 < x < 24 \\ 0 & x \le 0,\ x \ge 24 \end{cases} \qquad Y' = \begin{cases} (10 - x)e^{-\frac{x}{10}} & 0 < x < 24 \\ 0 & x \le 0,\ x \ge 24 \end{cases}$$

τις οποίες μπορούμε να εισαγάγουμε στο λογισμικό με την επιλογή "Νέος τύπος" από το μενού "Γράφημα" και δίνοντας αντίστοιχα τα παρακάτω δεδομένα:

Y **y= if x<=0 then 0 else if x<24 then 10xe^(-(x/10)) else 0**

Y΄ **y= if x<=0 then 0 else if x<24 then (10-x)e^(-(x/10)) else 0**

Εδώ, όπως φαίνεται στην οθόνη (εικόνα 2), το κέρδος δεν αυξάνει συνεχώς. Στο σημείο x = 10, η γραφική παράσταση της παραγώγου τέμνει τον x΄x, άρα μηδενίζεται και σε αυτό το σημείο έχουμε το μέγιστο y για τη συνάρτηση κέρδους.



Εικόνα 2.

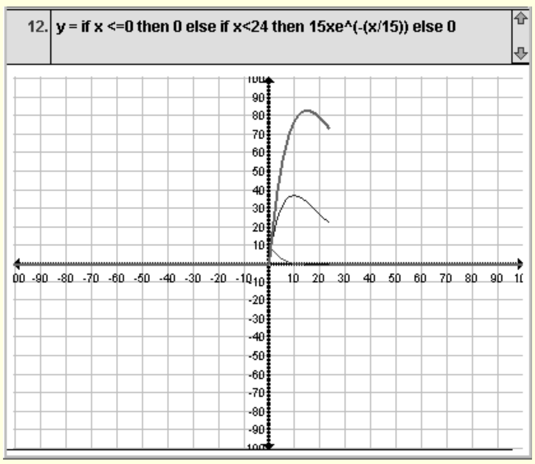
! Όταν η παράγωγος είναι αρνητική, έχει δηλαδή γραφική παράσταση κάτω από τον άξονα x΄x, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

Αν ο διδάσκων κρίνει ότι είναι δυσνόητη η χρήση των εκφράσεων για συναρτήσεις διπλού τύπου, μπορεί να υποδείξει στους μαθητές να επιλέξουν κλίμακα στην οποία το x θα έχει ελάχιστη τιμή 0 και μέγιστη 24.

IV. Στην ερώτηση 5, θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης για δύο τιμές της παραμέτρου α, π.χ. για α = 10 και για α=15.

Είναι φανερό ότι η αύξηση των ρομπότ από 10 σε 15 οδηγεί σε αύξηση των κερδών.

Εδώ καλό θα ήταν οι μαθητές να κατασκευάσουν τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και για άλλες τιμές της παραμέτρου α και των παραγώγων. Μία σημαντική παρατήρηση που θα μπορούσε να γίνει είναι το γεγονός ότι μπορεί να αυξάνονται τα κέρδη της επιχείρησης όταν αυξάνεται ο αριθμός των ρομπότ, αλλά για το μέγιστο κέρδος απαιτούνται περισσότερες ώρες λειτουργίας της επιχείρησης.



Εικόνα 3.

φύλλο αξιολόγησης

Η απόσταση S ενός μετεωρίτη από τη Γη δίνεται από τη σχέση $S(x) = \frac{1}{x^2} + 2\ln(x) + c, x > 0$. όπου x η χρονική στιγμή κατά την οποία ο μετεωρίτης βρίσκεται σε απόσταση S (η μέτρηση του x γίνεται σε μήνες και του S σε εκατοντάδες εκατομμύρια χιλιόμετρα) και c μία σταθερά η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $[-2, 0]$.

Ερώτηση 1η (6 μονάδες)

Με τη βοήθεια του λογισμικού απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα: Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του μετεωρίτη από τη Γη και σε πόσο χρόνο θα φτάσει σε αυτήν, αν $c = 0$.

Ερώτηση 2η (8 μονάδες)

Μπορείτε να προβλέψετε αν ο μετεωρίτης θα χτυπήσει τη Γη; Από τι εξαρτάται αυτό;

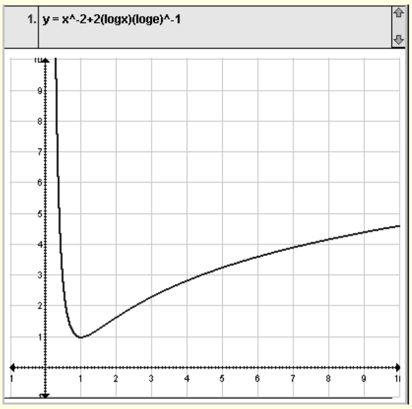
Ερώτηση 3η (6 μονάδες)

Αποδείξτε με μαθηματικό τρόπο την πρόβλεψή σας.

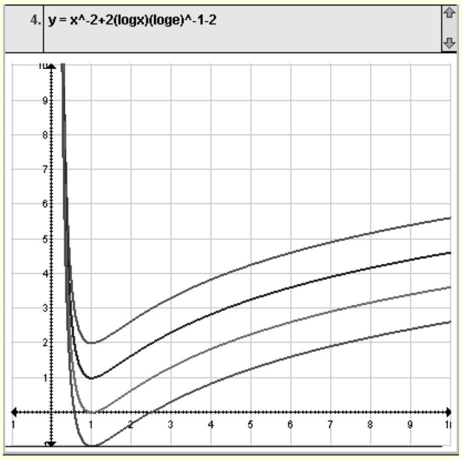
Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

Ε$_1$) Εδώ θα γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^{-2} + 2(\log x)(\log e)^{-1}$, $x > 0$ αφού $\ln x = \dfrac{\log x}{\log e}$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι η ελάχιστη απόσταση θα είναι 100.000.000 χιλιόμετρα. Στην απόσταση αυτή θα φτάσει σε ένα μήνα.



Ε$_2$) Οι γραφικές παραστάσεις για τις διάφορες τιμές του c υποδεικνύουν ότι ο μετεωρίτης θα μπορούσε να χτυπήσει τη Γη, αν $c \leq -1$.



Ε$_3$) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2\ln x + c$, $x > 0$, τότε η συνάρτηση αυτή θα εκφράζει την απόσταση του μετεωρίτη από τη Γη σε κάθε χρονική στιγμή x.

Μελετάμε το πρόσημο της παραγώγου: $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}(x-1)\cdot(x+1)$. Για $x > 0$ και μέχρι το 1, η f είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι ο μετεωρίτης πλησιάζει τη Γη, ενώ, για $x>1$, η f είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι απομακρύνεται. Η ελάχιστη απόσταση του μετεωρίτη από τη Γη θα είναι επομένως $f(x) = 1 + c$ όταν το x πάρει την τιμή 1. Αυτό σημαίνει ότι, μόνο αν $c > T-1$, δεν θα υπάρξει σύγκρουση αφού μόνο τότε $f(x) > 0$.

Σε ένα μήνα ο μετεωρίτης θα έχει φτάσει στην ελάχιστη απόσταση από τη Γη 100.000.000 χιλιόμετρα. (Εδώ έχουμε σιωπηρά υποθέσει ότι η αρχή της παρατήρησης βρίσκεται πολύ κοντά στη χρονική στιγμή $x = 0$, αφού $x \neq 0$.)