

Ένα παράξενο ορθογώνιο τρίγωνο

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Το «παράξενο ορθογώνιο τρίγωνο» είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα πρέπει να κάνουν χρήση των δυνατοτήτων του λογισμικού, ώστε να ερευνήσουν αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου το ημίγειο των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το διπλάσιο της αριθμητικής τιμής του μέτρου της γωνίας.

Το σενάριο υποστηρίζει ότι ένα τέτοιο τρίγωνο ήταν αντικείμενο συζητήσεων αρκετούς αιώνες πριν και ότι αποτελούσε ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα της εποχής του.

Οι μαθητές καταρχήν θα πρέπει να «μεταφράσουν» τη σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = 2x$ σε $\epsilon\phi x = 2x$.

Είναι αδύνατον για το μαθητή να χειριστεί μια τέτοια σχέση με αλγεβρικό λογισμό, οπότε θα καταφύγει στο γράφημα, από όπου θα διαπιστώσει ότι υπάρχει τέτοιο τρίγωνο. Το μέτρο της γωνίας αποτελεί τη λύση της εξίσωσης και θα εντοπιστεί με συνεχείς προσεγγίσεις, αφού δεν είναι κάποιος ακέραιος αριθμός ή ένας δεκαδικός με λίγα δεκαδικά ψηφία.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Γ ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Γραφική παράσταση συνάρτησης, ισότητα συναρτήσεων, θεώρημα του Bolzano.
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 1.1, 1.2, 1.8.

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να μάθουν οι μαθητές ότι οι λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = g(x)$ προσδιορίζονται από τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = g(x)$.
2. Να μάθουν ότι στις εξισώσεις, των οποίων οι λύσεις δεν προσδιορίζονται από κάποιον αλγόριθμο και είναι άρρητες, καθορίζουν μια ακρίβεια προσέγγισης και υπολογίζουν τη ρίζα προσεγγιστικά.
3. Να μάθουν να προσδιορίζουν το κοινό σημείο δύο καμπυλών, με κάποια προσέγγιση, από τον πίνακα της διαφοράς των τιμών τους. Στην ουσία, πίσω από τη μέθοδο αυτή βρίσκεται το θεώρημα του Bolzano.



Η παράδοση αναφέρει ότι κατά το Μεσαίωνα αρκετοί μαθηματικοί είχαν ασχοληθεί με το παρακάτω πρόβλημα:

«Να βρεθεί, αν υπάρχει, ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου ο λόγος των δύο κάθετων πλευρών είναι αριθμητικά ίσος με το διπλάσιο μέτρο της γωνίας του». Πολλοί υποστήριζαν ότι τέτοιο τρίγωνο δεν υπάρχει, άλλοι ότι, και να υπάρχει, δεν μπορεί να υπολογιστεί, άλλοι ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια τρίγωνα. Ο στόχος μας είναι να δώσουμε μια απάντηση σε αυτό το πρόβλημα με τη βοήθεια του λογισμικού.

- 1** Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο υποτίθεται ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση. Ποια σχέση συνδέει τις κάθετες πλευρές με την οξεία γωνία; (Επιλέξτε τυχαία μία από τις δύο οξείες γωνίες του τριγώνου.)
- 2** Ποια τριγωνομετρική συνάρτηση σχετίζεται με το πρόβλημα; Πώς μπορούμε να γράψουμε τη σχέση με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής;
- 3** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Η πρώτη θα αντιστοιχεί στο πρώτο μέλος της ισότητας και η δεύτερη συνάρτηση στο δεύτερο μέλος της ισότητας. Προσέξτε ότι το μέτρο της γωνίας, στον άξονα x , εκφράζεται σε ακτίνια.
- 4** Τι σημαίνουν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων για το πρόβλημα; Από τα σημεία τομής, ποιο αντιστοιχεί σε πραγματικό ορθογώνιο τρίγωνο και για ποιο λόγο;
- 5** Προφανώς, δεν αρκεί να απαντήσουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο ορθογώνιο τρίγωνο, θα πρέπει και να το κατασκευάσουμε, δηλαδή να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του. Πώς μπορεί να γίνει αυτό από τη γραφική παράσταση;
- 6** Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης η οποία αντιστοιχεί στη διαφορά των δύο μελών της ισότητας την οποία έχετε γράψει στο ερώτημα 2. Πώς μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε αν το πρόβλημα έχει λύση;
- 7** Η γραφική παράσταση δε δίνει πολύ αξιόπιστη προσέγγιση των συντεταγμένων ενός σημείου τομής. Θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και ο πίνακας τιμών. Έχετε ήδη προσεγγίσει το ζητούμενο σημείο, π.χ. $x \approx 1,17$. Στην πρώτη στήλη του πίνακα τιμών, να καταγράψετε 20 τιμές για το x από 1,16 μέχρι 1,17 ανά 0,001 (αυτό μπορεί να γίνει μέσω της εντολής “Γέμισμα” από το μενού “Πίνακας”). Στη στήλη του y , να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης $y = \epsilon\phi x - 2x$ για να εμφανιστούν οι τιμές της. Πώς διαπιστώνουμε από τον πίνακα τιμών πού κοντά βρίσκεται το σημείο; Πόσο μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο αυτό;
- 8** Πόσα τρίγωνα υπάρχουν που ικανοποιούν την αρχική ισότητα; Να κατασκευάσετε ένα.

✓ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

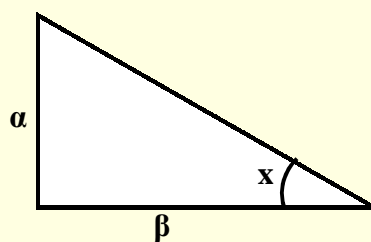
Ο καθηγητής, κατά την έναρξη της διδασκαλίας, δίνει στους μαθητές το φύλλο εργασίας. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Ακόμη, θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει λύσεις αν οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο. Τέλος, θα πρέπει να γνωρίζουν ότι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της σχέσης $y = f(x)$ με τον άξονα x αντιστοιχούν στις ρίζες της συνάρτησης $f(x)$.

- I. Στα ερωτήματα 1 και 2, οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο (εικόνα 1) και θα σημειώσουν τις πλευρές και τη γωνία του ώστε να φτάσουν στη ζητούμενη σχέση: $\epsilon\phi x = 2x$.

Εδώ θα πρέπει ο διδάσκων να διαπραγματευτεί με τους μαθητές αν είναι δυνατόν να λυθεί η τελευταία εξίσωση με τις μεθόδους που μέχρι τότε γνώριζαν.

Η διαπίστωση της αδυναμίας να λυθεί η εξίσωση με τις συμβατικές μεθόδους θα πρέπει να υποδείξει την ανάγκη να καταφύγουμε στις γραφικές παραστάσεις.

Εδώ θα ήταν χρήσιμο να επισημανθεί στους μαθητές ότι, με τις αλγεβρικές μεθόδους που μαθαίνουμε στο Λύκειο, μπορούμε να λύσουμε μόνο ένα πολύ περιορισμένο πλήθος εξισώσεων. Στις περιπτώσεις που δε διαθέτουμε μέθοδο επίλυσης μιας εξίσωσης, μπορούμε να καταφύγουμε στη γραφική παράσταση και με τη βοήθεια του λογισμικού να υπολογίζουμε προσεγγιστικά τις ρίζες.



Εικόνα 1.

- II. Για τα ερωτήματα 3 και 4, στο ίδιο σύστημα αξόνων θα γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των $y = \epsilon\phi x$ και $y = 2x$.

Οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να καθορίσουν, μετά από διαπραγμάτευση, κατάλληλη κλίμακα.

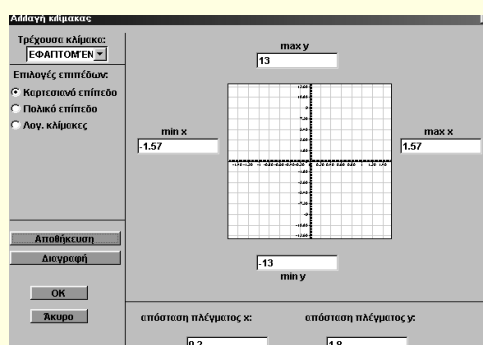


Καλό θα είναι, κατά την επιλογή της κλίμακας, τα διαστήματα πάνω στους δύο άξονες να έχουν ίσα μήκη ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.

Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής "Αλλαγή κλίμακας" από το μενού "Γράφημα" (εικόνα 2).

Κατά την επιλογή της κλίμακας, το διάστημα για τις τιμές της γωνίας θα είναι το $(-\pi/2, \pi/2)$, δηλαδή το $(-1,57, 1,57)$, ενώ για το y είναι αρκετό το διάστημα $(-13, 13)$. Αν επιλέξουμε μονάδα στον x το 0,2 και στον y το 1,8, τότε το επίπεδο θα χωριστεί σε τετράγωνα.

Η κλίμακα, στη συνέχεια, καλό θα είναι να αποθηκευτεί με κάποιο όνομα.



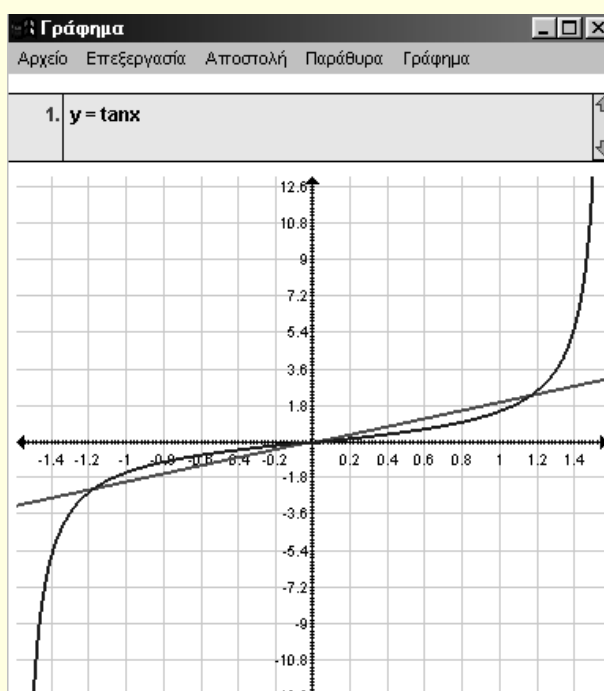
Εικόνα 2.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα.

Είναι φανερό ότι υπάρχει τρίγωνο που ικανοποιεί τη σχέση $εφ\alpha = 2\alpha$ αφού οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται (εικόνα 3).

Το σημείο τομής που έχει θετικές συντεταγμένες αντιστοιχεί σε πραγματικό τρίγωνο.

! Εδώ θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι οι τύποι των συναρτήσεων θα πρέπει να γράφονται στην αγγλική γλώσσα.



Εικόνα 3.

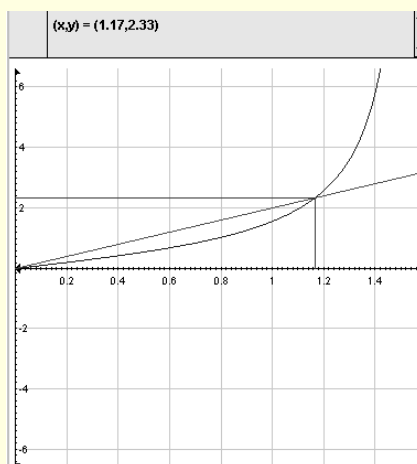
- III. Στο ερώτημα 5, για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής, έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε το εργαλείο μεγέθυνσης και το εργαλείο εντοπισμού συντεταγμένων (εικόνα 4).



Εικόνα 4.

Αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν το εργαλείο εντοπισμού των συντεταγμένων, μπορούν να βρουν μια προσέγγιση για τη ζητούμενη τιμή.

Το σημείο τομής που προσδιορίζεται με αυτό τον τρόπο είναι το $(1,17, 2,33)$, άρα η γωνία του τριγώνου είναι περίπου $1,17$ ακτίνια (εικόνα 5).



Εικόνα 5.

IV. Στο ερώτημα 6, οι μαθητές, αφού διαγράψουν τις γραφικές παραστάσεις που ήδη υπάρχουν στην οθόνη, κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \tan x - 2x$.

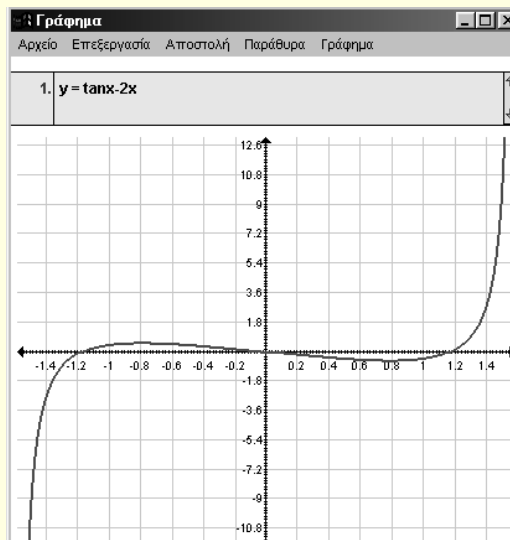
Εδώ ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει τη ζητούμενη τιμή μέσα από μια διαφορετική προσέγγιση.

Τώρα πλέον αναζητά τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης, άρα τα σημεία τομής με τους άξονες.



Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να συσχετίσουν τις δύο γραφικές παραστάσεις (εικόνες 3 και 6).

Συγκεκριμένα, αν παρατηρήσουν την απόσταση των δύο γραφικών παραστάσεων στην εικόνα 3, τα διαστήματα δηλαδή στα οποία αυτή αυξάνεται και αυτά στα οποία ελαττώνεται, τότε μπορούν να αναγνωρίσουν τις μεταβολές αυτές στα ίδια διαστήματα και στην εικόνα 6.



Εικόνα 6.

- V. Στο ερώτημα 7, οι μαθητές θα εφαρμόσουν στην ουσία το θεώρημα του Bolzano με τη βοήθεια του πίνακα τιμών.

Αφού έχουν ήδη εντοπίσει μία προσεγγιστική τιμή, μέσω γραφικής παράστασης, προσπαθούν να εντοπίσουν ένα όσο το δυνατόν μικρότερο διάστημα προσέγγισης της τιμής.



Η στήλη των τιμών του x θα συμπληρωθεί με τη βοήθεια της εντολής "Γέμισμα".

Εδώ είναι φανερό ότι αναζητούμε την τιμή του x με ακρίβεια χιλιοστού (εικόνα 7).

Εικόνα 7.

Στη συνέχεια, ζητούμε από το λογισμικό να μας παρουσιάσει τις αντίστοιχες τιμές για το y . Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί αν στη στήλη του y γράψουμε τον τύπο $y = \tan x - 2x$, οπότε το λογισμικό συμπληρώνει τη στήλη με βάση τις τιμές που υπάρχουν στην πρώτη στήλη (εικόνα 8).

Εδώ πλέον είναι φανερό ότι η ζητούμενη τιμή βρίσκεται μεταξύ 1,165 και 1,166, αφού η πρώτη δίνει αρνητική τιμή για το y , ενώ η δεύτερη θετική (εικόνα 8).

x	y=tanx-2x
1.16	-0.024
1.161	-0.02
1.162	-0.016
1.163	-0.011
1.164	-0.0070
1.165	-0.0020
1.166	0.0020
1.167	0.0060
1.168	0.011
1.169	0.015
1.17	0.02
1.171	0.025
1.172	0.029
1.173	0.034
1.174	0.039
1.175	0.043
1.176	0.048
1.177	0.053
1.178	0.058
1.179	0.062
1.18	0.067

Εικόνα 8.

Ο διδάσκων θα μπορούσε, στο σημείο αυτό, να συζητήσει με τους μαθητές για το αν υπάρχει η δυνατότητα να προσεγγίσουν τη ζητούμενη τιμή με οποιαδήποτε ακρίβεια, αλλά και το αν αυτό είναι αναγκαίο για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

VI. Στο ερώτημα 8, οι μαθητές θα πρέπει να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειρα όμοια ορθογώνια τρίγωνα με την ιδιότητα $\frac{\alpha}{\beta} = 2^x$.

Αυτό οφείλεται στο ότι όλα τα όμοια προς το αρχικό τρίγωνα διατηρούν την ιδιότητα αυτή και είναι μια ευκαιρία να αναδειχθούν οι δύο βασικές ιδιότητες των ομοίων τριγώνων (διατήρηση του λόγου των πλευρών και του μέτρου των γωνιών).

Θέλουμε να ελέγξουμε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο να ισχύει η σχέση $10^{\sin x} = x$.

Ερώτηση 1η (4 μονάδες)

Να γράψετε μια ισοδύναμη σχέση η οποία να μην περιέχει δύναμη.

Ερώτηση 2η (8 μονάδες)

Με τη βοήθεια του λογισμικού, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, οι ρίζες της οποίας είναι οι ζητούμενοι αριθμοί.

Ερώτηση 3η (8 μονάδες)

Να επαληθεύσετε, με τη βοήθεια του πίνακα τιμών, τις λύσεις που έχετε βρει μέσω της γραφικής παράστασης και να υπολογίσετε με προσέγγιση χλιοστού το ζητούμενο αριθμό.

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

- E₁)** $\log x = \sin x$.
- E₂)** Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = \log x - \sin x$. Μια πρώτη προσέγγιση από τη γραφική παράσταση δίνει περίπου 1,3.
- E₃)** Κατασκευή πίνακα τιμών με βήμα 0,001. Η ζητούμενη τιμή είναι περίπου 1,303.