Μικρά και μεγάλα τετράγωνα

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Τα μικρά και τα μεγάλα τετράγωνα είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα μελετήσουν ή καλύτερα θα συγκρίνουν δύο διαφορετικά μοντέλα μεταβολών: το ένα είναι το εκθετικό και το άλλο το δευτεροβάθμιο. Στους μαθητές θα δοθούν οι εικόνες δύο τετραγώνων των οποίων μεταβάλλεται συνεχώς η επιφάνεια. Στο ένα τετράγωνο αυξάνεται η πλευρά κατά 1 εκατοστό και στο άλλο αυξάνεται η επιφάνεια με ποσοστό 20% (εκθετική μεταβολή). Τα δύο τετράγωνα στην αρχή έχουν το ίδιο εμβαδόν και στη συνέχεια δίνουν την εντύπωση ότι το τετράγωνο στο οποίο η αύξηση γίνεται με ποσοστό 20% υπολείπεται όλο και περισσότερο από το άλλο τετράγωνο.

Ο στόχος είναι να αποκαλυφθεί ότι η εντύπωση αυτή δεν είναι σωστή και ότι η εκθετική μεταβολή, από κάποιο σημείο και μετά, δίνει μεγαλύτερες τιμές από τη δευτεροβάθμια.

Οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν τη «δύναμη» της εκθετικής μεταβολής τόσο από τον πίνακα τιμών (συγκρίνουν τις τιμές δύο στηλών) όσο και μέσω των γραφικών παραστάσεων.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Εκθετική συνάρτηση.
- Διδακτική ενότητα: Κεφ. 4, παρ. 4.1: Εκθετική συνάρτηση, ο νόμος της εκθετικής μεταβολής.

Εργαλεία λογισμικού:

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

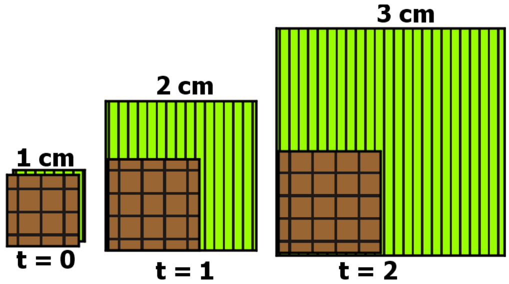
2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Οι μαθητές θα μάθουν να κατασκευάζουν απλά μαθηματικά μοντέλα, τα οποία περιγράφουν τόσο δευτεροβάθμιες όσο και εκθετικές μεταβολές.
2. Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι η εκθετική μεταβολή είναι ισχυρότερη από τη δευτεροβάθμια.
3. Οι μαθητές θα μάθουν να λύνουν μια εξίσωση εντοπίζοντας σημεία τομής γραφικών παραστάσεων, ειδικά όταν δεν είναι δυνατόν να λυθεί η εξίσωση με αλγεβρικό τρόπο.

Στην εικόνα φαίνονται δύο τετράγωνα, ένα ριγέ και ένα καρό.

Τη χρονική στιγμή t = 0, τα δύο τετράγωνα έχουν ίσα εμβαδά, αφού οι πλευρές τους είναι ίσες (ένα εκατοστό η καθεμία).



Το εμβαδόν των τετραγώνων αυξάνεται με διαφορετικό τρόπο. Στο ριγέ η πλευρά αυξάνεται 1 εκατοστό κάθε λεπτό, ενώ στο καρό αυξάνεται κατά 20% η επιφάνεια.

1 Να κατασκευάσετε έναν τύπο ο οποίος να μας δίνει το εμβαδόν του ριγέ τετραγώνου t λεπτά μετά την έναρξη της αύξησης της πλευράς του. Να κάνετε το ίδιο για το καρό τετράγωνο.

2 Για τα εμβαδά των δύο τετραγώνων, υπάρχουν οι παρακάτω απόψεις:

α) Το ριγέ τετράγωνο θα έχει πάντα μεγαλύτερο εμβαδόν από το καρό και μάλιστα η διαφορά τους συνεχώς θα αυξάνεται.

β) Το καρό τετράγωνο θα έχει πάντα μικρότερο εμβαδόν από το ριγέ, αλλά η διαφορά των εμβαδών τους συνεχώς θα ελαττώνεται.

γ) Μετά από τρία τέταρτα της ώρας, το καρό τετράγωνο θα ξεπεράσει σε εμβαδόν το ριγέ και συνεχώς η διαφορά των εμβαδών θα αυξάνεται.

Ποια από τις τρεις εκδοχές θεωρείτε ότι είναι η πιθανότερη;

3 Τώρα θα πρέπει να ελέγξετε αν η υπόθεσή σας είναι σωστή. Το λογισμικό διαθέτει τόσο τον πίνακα τιμών όσο και τον πίνακα “Γράφημα”. Να συμπληρώσετε τρεις στήλες στον πίνακα τιμών. Συγκεκριμένα, να συμπληρώσετε την πρώτη στήλη (χρόνος) με 20 τιμές και τις άλλες δύο στήλες με τις τιμές των εμβαδών τόσο του ριγέ όσο και του καρό τετραγώνου.

Να παρατηρήσετε τις τιμές των εμβαδών. Υπάρχει κάποια ένδειξη για το ποια υπόθεση είναι σωστή; Να συμπληρώσετε δέκα επιπλέον τιμές. Τι παρατηρείτε;

4 Να κατασκευάσετε κατάλληλη κλίμακα και να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο σχέσεων. Τι παρατηρείτε;

Αν κάνετε «κλικ» με το ποντίκι στο επάνω άκρο του άξονα y΄y και στο δεξί άκρο του x΄x, τότε παρουσιάζονται απομακρυσμένα μέρη των γραφικών παραστάσεων. Να μελετήσετε πώς συμπεριφέρονται οι γραφικές παραστάσεις για αρκετά μεγάλες τιμές του χρόνου. Τι παρατηρείτε;

5 Με τη βοήθεια του λογισμικού, να εντοπίσετε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι δύο γραφικές παραστάσεις. Τι θα συμβεί από το σημείο τομής και μετά; Πώς επιβεβαιώνεται αυτό από τη γραφική παράσταση;

6 Θέλουμε να υπολογίσουμε μετά από πόσα λεπτά το καρό τετράγωνο θα έχει διπλάσιο εμβαδόν από το ριγέ. Πώς μπορεί να γίνει αυτό με τη βοήθεια του λογισμικού;

✔ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τον τύπο του ανατοκισμού, καθώς και τις βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης. Καλό θα είναι να έχουν αντιληφθεί οι μαθητές ότι η εκθετική μεταβολή είναι στην ουσία ένας συνεχής ανατοκισμός. Επίσης είναι απαραίτητο να γνωρίζουν ότι η δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση έχει γραφική παράσταση μια παραβολή.

I. Ο διδάσκων θα πρέπει, στην αρχή, να συζητήσει με τους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι δύο επιφάνειες, ώστε να μην υπάρξουν παρανοήσεις εκ μέρους των μαθητών. Καλό θα ήταν να υπολογίσουν οι μαθητές τα εμβαδά των τετραγώνων τουλάχιστον κατά τις χρονικές στιγμές 0, 1, 2, 3, ώστε αυτό να αποτελέσει μια βάση για τον υπολογισμό των δύο τύπων.

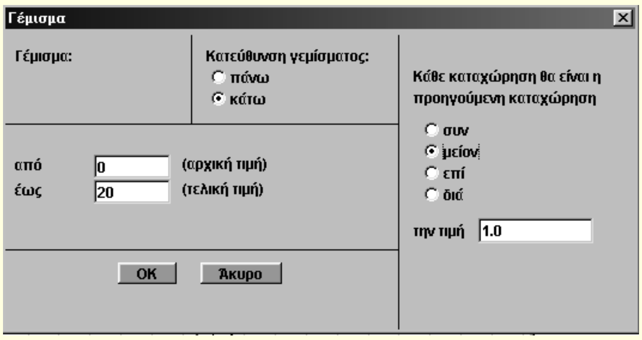
II. Στην ερώτηση 1, οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν τους τύπους που μας δίνουν τα δύο εμβαδά: $y = (t + 1)^2$ για το ριγέ και $y = (1,2)^t$ για το καρό. Ειδικά για το καρό θα πρέπει οι μαθητές να αναγνωρίσουν το μοντέλο του ανατοκισμού για να κατασκευάσουν τον κατάλληλο τύπο.

III. Στην ερώτηση 2, όσο περισσότερο αποκλίνουν οι γνώμες των μαθητών για τη σωστή απάντηση, τόσο το καλύτερο για την κινητοποίηση των μαθητών προς την κατεύθυνση της διερεύνησης του προβλήματος.

IV. Από την ερώτηση 3, αρχίζει η διερεύνηση του προβλήματος με τη χρήση του λογισμικού.

! Οι μαθητές από το μενού "Πίνακας" θα επιλέξουν την εντολή "Γέμισμα" ώστε να συμπληρώσουν την πρώτη στήλη (χρόνος) (εικόνα 1).

Είκοσι τιμές είναι αρκετές ώστε να μην αποκαλυφθεί από την αρχή η σωστή απάντηση, η οποία βρίσκεται μετά τη χρονική στιγμή 40.



Εικόνα 1.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των τύπων, συμπληρώνουν οι μαθητές και τις δύο επόμενες στήλες (εικόνα 2).

t	y=1.2^t	z=(t+1)^2
min	cm²	cm²
0	1	1
1	1.2	4
2	1.44	9
3	1.73	16
4	2.07	25
5	2.49	36
6	2.99	49
7	3.58	64
8	4.3	81
9	5.16	100
10	6.19	121
11	7.43	144
12	8.92	169
13	10.7	196
14	12.84	225
15	15.41	256
16	18.49	289
17	22.19	324
18	26.62	361
19	31.95	400
20	38.34	441

Εικόνα 2.

Προφανώς δεν είναι δυνατόν να δοθεί σαφής απάντηση, αφού οι μαθητές δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουν τι θα συμβεί για αρκετά μεγάλες τιμές του χρόνου t. Τώρα υπάρχουν δύο επιλογές: οι μαθητές θα εξετάσουν τις τιμές των δύο εμβαδών για μεγαλύτερες τιμές του χρόνου t ή θα καταφύγουν στις γραφικές παραστάσεις.

Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι, αν το ποσοστό αύξησης ήταν μικρό, π.χ. 1%, τότε θα χρειαζόταν ένας αρκετά μεγάλος αριθμός μετρήσεων ώστε να γίνει φανερή η σωστή απάντηση.

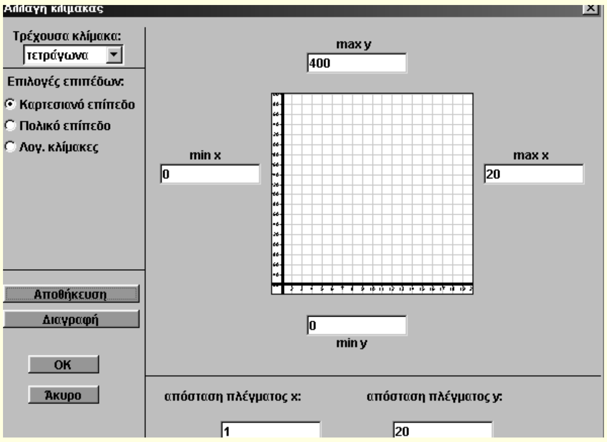
Αυτό καλό θα ήταν να συζητηθεί στο τέλος της δραστηριότητας.

V. Στην ερώτηση 4, οι μαθητές θα καταφύγουν στη γραφική παράσταση των δύο σχέσεων.

Καταρχήν, οι μαθητές θα επιλέξουν, μετά από διαπραγμάτευση, κατάλληλη κλίμακα.

Καλό θα είναι, κατά την επιλογή της κλίμακας, τα διαστήματα πάνω στους δύο άξονες να έχουν ίσα μήκη ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.

Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής "Αλλαγή κλίμακας" από το μενού "Γράφημα" (εικόνα 3).

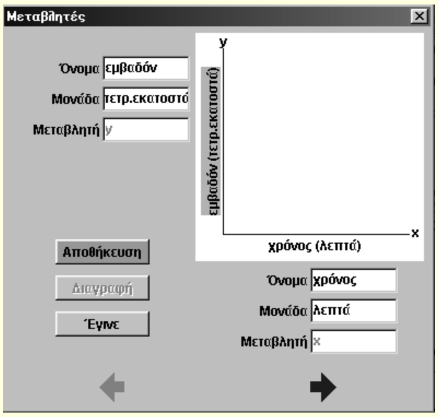


Εικόνα 3.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα. Τέλος, καλό θα είναι οι μαθητές να αποθηκεύσουν την κλίμακα με ένα όνομα, π.χ. τετράγωνα.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι, αν οι μαθητές επιλέξουν μεγαλύτερες τιμές για το x και το y, τότε η λύση θα είναι προφανής.

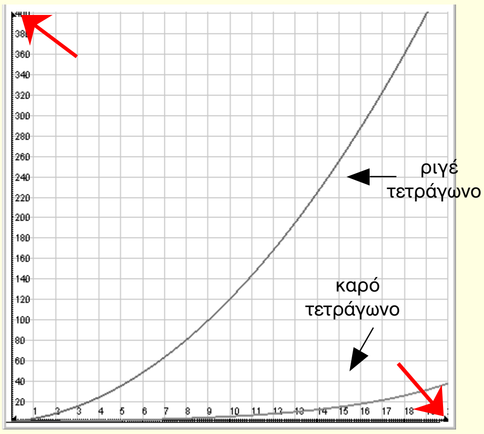
Στη συνέχεια, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ορίσουν τα μεγέθη τα οποία θα αντιστοιχούν σε κάθε άξονα μέσω της εντολής "Μεταβλητές" από το μενού "Γράφημα" (εικόνα 4).



Εικόνα 4.

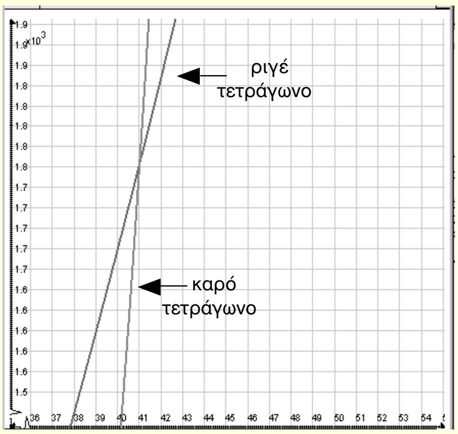
Οι δύο γραφικές παραστάσεις δίνουν την εντύπωση ότι το εμβαδόν του ριγέ αυξάνεται ταχύτερα από ό,τι το εμβαδόν του καρό τετραγώνου.

Αν θελήσουν να διαπιστώσουν τη συμπεριφορά των γραφικών παραστάσεων για μεγαλύτερες τιμές του χρόνου, δεν έχουν παρά να κάνουν «κλικ» στα άκρα των αξόνων (κόκκινα βελάκια) για να μελετήσουν απομακρυσμένα μέρη του γραφήματος χωρίς να αλλάξει η κλίμακα (εικόνα 5).



Εικόνα 5.

Όταν μεταφερθούν σε τιμές για το χρόνο μεταξύ 39 και 41, θα διαπιστώσουν ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται, άρα το καρό τετράγωνο θα φτάσει σε εμβαδόν το ριγέ.



Εικόνα 6.

Εδώ έχει απαντηθεί και η ερώτηση 5, αφού είναι φανερό ότι 41 λεπτά μετά την έναρξη των μεταβολών το καρό τετράγωνο έχει υπερβεί σε εμβαδόν το ριγέ (εικόνα 6).

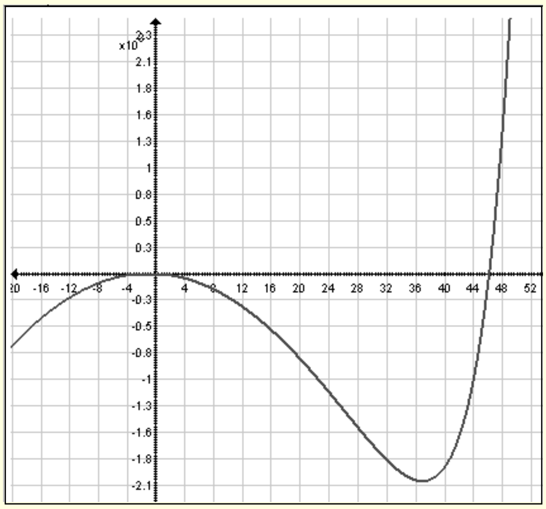
Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της εκθετικής έχει μεγαλύτερη κλίση από της δευτεροβάθμιας, πράγμα που σημαίνει ότι η διαφορά των εμβαδών συνεχώς θα αυξάνεται υπέρ του καρό τετραγώνου.

Εδώ ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να επισημάνει στους μαθητές τη χαρακτηριστική ιδιότητα που διαθέτει η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης, η οποία από κάποιο σημείο και μετά φαίνεται να είναι κατακόρυφη.

VI. Στην ερώτηση 6, οι μαθητές, αφού έχουν ανακαλύψει ότι μετά από 41 λεπτά το εμβαδόν του καρό τετραγώνου θα γίνεται όλο και μεγαλύτερο από αυτό του ριγέ, θα υπολογίσουν το χρόνο που απαιτείται ώστε το εμβαδόν του καρό τετραγώνου να γίνει διπλάσιο από το εμβαδόν του ριγέ. Στην ουσία, θα πρέπει να λύσουν την εξίσωση $(1{,}2)^t = 2(t + 1)^2$.

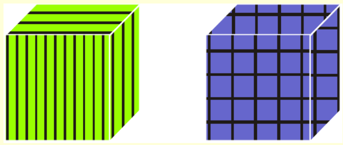
Μία από τις δυνατότητες που έχουν οι μαθητές είναι να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (1{,}2)^t - 2(t + 1)^2$ και να υπολογίσουν το σημείο τομής της με τον άξονα x΄x.

Από την εικόνα είναι φανερό ότι ο χρόνος που απαιτείται είναι περίπου 46 λεπτά, αλλά το σημαντικό είναι ότι οι μαθητές από τη γραφική παράσταση έχουν τη δυνατότητα να αντλήσουν σημαντικές πληροφορίες, όπως για παράδειγμα ότι μέχρι τα 39 λεπτά η διαφορά του εμβαδού του καρό τετραγώνου από το διπλάσιο του ριγέ συνεχώς μεγάλωνε και στη συνέχεια άρχισε να ελαττώνεται.



Εικόνα 7.

Οι ακμές των δύο κύβων είναι ίσες, με 1 μέτρο η καθεμία. Η ακμή του ριγέ κύβου μειώνεται 1 εκατοστό κάθε ώρα. Ο όγκος του καρό κύβου ελαττώνεται 4% κάθε ώρα.



Ερώτηση 1η (7 μονάδες)

Να κατασκευάσετε έναν τύπο ο οποίος θα μας δίνει τον όγκο του ριγέ κύβου t λεπτά μετά την έναρξη της ελάττωσης της πλευράς του. Να κάνετε το ίδιο για τον καρό κύβο.

Ερώτηση 2η (7 μονάδες)

Να κατασκευάσετε κατάλληλη κλίμακα για το πρώτο εικοσιτετράωρο των μεταβολών και να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο σχέσεων. Τι παρατηρείτε;

Ερώτηση 3η (6 μονάδες)

Με τη βοήθεια του λογισμικού, να εντοπίσετε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι δύο γραφικές παραστάσεις. Τι θα συμβεί από το σημείο τομής και μετά; Πώς επιβεβαιώνεται αυτό από τη γραφική παράσταση;

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

Ε$_1$) Ο όγκος του ριγέ κύβου δίνεται από τον τύπο $(100 – t)^3$ και ο όγκος του καρό κύβου από τον $1.000.000(0,96)^t$.

Ε$_2$) Για το x μπορούν να επιλέξουν από 0 μέχρι 24 (ανά 1,2). Για το y μπορούν να επιλέξουν, π.χ., από 0 μέχρι 1.000.000 ανά 50.000.

Σε όλη τη διάρκεια του πρώτου εικοσιτετραώρου, ο καρό κύβος έχει μικρότερο όγκο από τον ριγέ.

Ε$_3$) Κάνοντας «κλικ» στα άκρα των αξόνων, διαπιστώνουμε ότι στο τέλος του δευτέρου εικοσιτετραώρου οι δύο κύβοι θα έχουν περίπου τον ίδιο όγκο. Από το σημείο αυτό και μετά, ο ριγέ κύβος θα έχει μικρότερο όγκο από τον καρό.