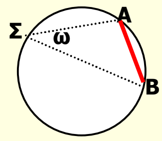
Η μέτρηση στην πισίνα

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Η μέτρηση στην πισίνα είναι μία δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα ανακαλύψουν το νόμο των ημιτόνων. Αυτό θα γίνει καθώς θα προσπαθούν να εξηγήσουν για ποιο λόγο, αν γνωρίζουμε την ακτίνα ενός κύκλου και τη γωνία ω με την οποία φαίνεται μία χορδή ΑΒ από κάποιο σημείο Σ του κύκλου, μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της χορδής.

Οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό μοντέλο του προβλήματος με τη βοήθεια του Sketchpad και θα πάρουν μετρήσεις της γωνίας και της χορδής.



Οι μετρήσεις, στη συνέχεια, θα περαστούν στον πίνακα τιμών του Function Probe και από εκεί στο γράφημα. Τα σημεία στους άξονες δημιουργούν τη διαίσθηση ότι η σχέση είναι ημιτονοειδής και ότι το μέγιστο των τιμών της σχετίζεται με τη διάμετρο του κύκλου.

Η επαλήθευση της σχέσης θα γίνει μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = ημx$, η οποία, με τα κατάλληλα εργαλεία του λογισμικού, θα προσαρμοστεί πάνω στα σημεία που είχαν προκύψει από τις μετρήσεις.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Τριγωνομετρία. Επίλυση τριγώνου (νόμος ημιτόνων).
- Διδακτική ενότητα: Παρ. 1.7.

Εργαλεία λογισμικού:

Sketchpad.

Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

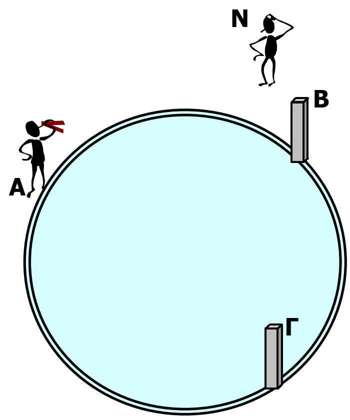
2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Να αναγνωρίζουν την ύπαρξη κάποιας ημιτονοειδούς σχέσης τόσο στις μετρήσεις όσο και στα σημεία τα οποία προκύπτουν από τις μετρήσεις αυτές.
2. Να διατυπώνουν σε αυστηρά μαθηματική γλώσσα τον κανόνα τον οποίο έχουν ανακαλύψει.
3. Να διαπιστώσουν ότι ο νόμος των ημιτόνων μάς επιτρέπει να υπολογίζουμε αποστάσεις σημείων στα οποία δεν μπορούμε να έχουμε άμεση πρόσβαση.

Ο Νίκος και ο Αντρέας είναι δύο φίλοι οι οποίοι θέλουν να μετρήσουν την απόσταση μεταξύ των δύο μικρών πασσάλων Β και Γ. Το πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει πρόσβαση ώστε να μετρήσουν απευθείας την απόσταση, αφού οι πάσσαλοι βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια μιας γεμάτης νερό κυκλικής πισίνας ακτίνας 5 μέτρων (εικόνα 1).

Ο Αντρέας διαθέτει ένα γωνιόμετρο, ένα όργανο δηλαδή με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε τη γωνία ΒΑΓ. Στους δύο φίλους, ο μαθηματικός του σχολείου έχει πει ότι με το γωνιόμετρο έχουν τη δυνατότητα να υπολογίσουν την απόσταση δύο αντικειμένων, που βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου, αρκεί να είναι γνωστή η ακτίνα του κύκλου.



Εικόνα 1.

Ο στόχος μας είναι να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την απόσταση αυτή με τη βοήθεια του γωνιομέτρου, γνωρίζοντας την ακτίνα του κύκλου. Θα εργαστούμε στην αρχή με το Sketchpad.

1 Να κατασκευάσετε ένα γεωμετρικό σχήμα το οποίο θα αναπαριστά τα διάφορα γεωμετρικά στοιχεία του προβλήματος (γωνίες, σημεία, ευθύγραμμα τμήματα) ως εξής: Να κατασκευάσετε σημείο στην οθόνη και από το μενού “Μετασχηματισμός” μέσω της εντολής “Μεταφορά” να μεταφέρετε οριζόντια το σημείο κατά 5 εκατοστά. Τώρα υπάρχουν δύο σημεία, να επιλέξετε και τα δύο, και από το μενού “Κατασκευή” να επιλέξετε την κατασκευή κύκλου. Πάνω στον κύκλο να κατασκευάσετε τρία σημεία Α, Β, Γ και να τα ενώσετε.

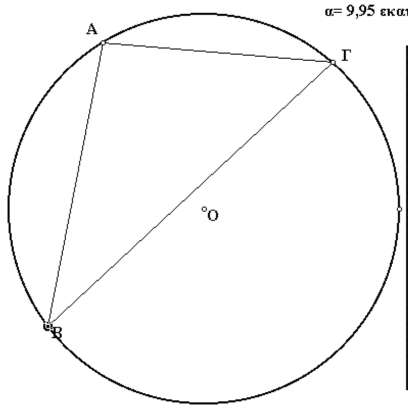
2 Τώρα θα πρέπει να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται μια πλευρά όταν μεταβάλουμε την απέναντι γωνία. Πριν αρχίσουμε τις μετρήσεις, καλό θα είναι από το μενού “Προβολή” και μέσω της εντολής “Προτιμήσεις” να επιλέξουμε μονάδα μέτρησης των γωνιών τα ακτίνια.

Επιλέγουμε τα σημεία Β, Α, Γ ένα προς ένα (κρατώντας πατημένο το shift) και από το μενού “Μέτρηση” επιλέγουμε “Γωνία”. Στη συνέχεια επιλέγουμε τα σημεία Β, Γ και από το ίδιο μενού επιλέγουμε “Μήκος”. Τώρα υπάρχουν οι μετρήσεις μιας γωνίας και της απέναντι πλευράς της στην οθόνη.

Το λογισμικό έχει τη δυνατότητα να καταγράφει τα ζεύγη των μετρήσεων και να τα εμφανίζει στην οθόνη από το μενού “Μέτρηση” και μέσω της εντολής “Πινακοποίηση” αρκεί μετά από κάθε μετακίνηση του Β να κάνουμε διπλό «κλικ» στην τελευταία εγγραφή του πίνακα (εικόνα 2).

A= 1,67 ακτίνια

α= 9,95 εκατοστά



A	α
0,04	0,38
0,14	1,36
0,28	2,74
0,42	4,09
0,57	5,36
0,65	6,04
0,77	6,94
0,91	7,91
1,09	8,88
1,20	9,31
1,31	9,67
1,41	9,87
1,50	9,97
1,57	10,00
1,67	9,95
1,77	9,80
1,88	9,52
2,03	8,98
2,14	8,40
2,28	7,58
2,47	6,20

Εικόνα 2.

Να πάρετε αρκετές μετρήσεις, π.χ. 20.

3 Τα ζεύγη τιμών θα πρέπει να περαστούν στον πίνακα τιμών του Function Probe και στη συνέχεια στους άξονες του πίνακα “Γράφημα”.

Να επιλέξετε κατάλληλη κλίμακα, με βάση τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή κάθε μεταβλητής, από το μενού “Πίνακας”. Να μεταφέρετε τα ζεύγη τιμών στους άξονες. Υπάρχει κάποια μαθηματική σχέση μεταξύ γωνίας και απέναντι πλευράς του τριγώνου ΑΒΓ;

4 Να παρατηρήσετε το σημείο στο οποίο παρουσιάζεται μέγιστο. Ποια είναι η μέγιστη τιμή; Ποια γωνία (σε μοίρες) αντιστοιχεί στο σημείο αυτό; Ποια συνάρτηση παρουσιάζει στο ίδιο σημείο μέγιστη τιμή;

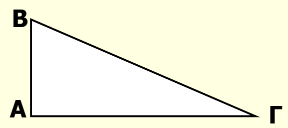
5 Στο προηγούμενο ερώτημα, έχετε κάνει μια εικασία για το ποια σχέση συνδέει τη γωνία με την απέναντι πλευρά. Να επιβεβαιώσετε την εικασία σας με τη βοήθεια του λογισμικού.

6 Τελικά, ποια σχέση συνδέει μια γωνία, την απέναντι πλευρά και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου; Να διατυπώσετε έναν κανόνα σε αυστηρά μαθηματική διατύπωση. Τελικά, πώς θα γίνει η μέτρηση της απόστασης ΒΓ με τη βοήθεια του γωνιομέτρου;

✔ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις, ιδιαίτερα τη συνάρτηση f(x) = ημx. Ακόμη, θα πρέπει να γνωρίζουν ότι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες.

I. Στην αρχή της δραστηριότητας, ο διδάσκων συζητά με τους μαθητές για το πώς μπορούμε να μετρήσουμε αποστάσεις, ιδιαίτερα το ύψος ενός απομακρυσμένου αντικειμένου, με τη βοήθεια του γωνιομέτρου. Συγκεκριμένα, τους εξηγεί ότι, αν ένας παρατηρητής βρίσκεται στο σημείο Γ και γνωρίζει την απόσταση ΑΓ, τότε μπορεί να μετρήσει με το γωνιόμετρο τη γωνία Γ και, κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής εφαπτομένης, να υπολογίσει το ύψος ΑΒ (εικόνα 3).



Εικόνα 3.

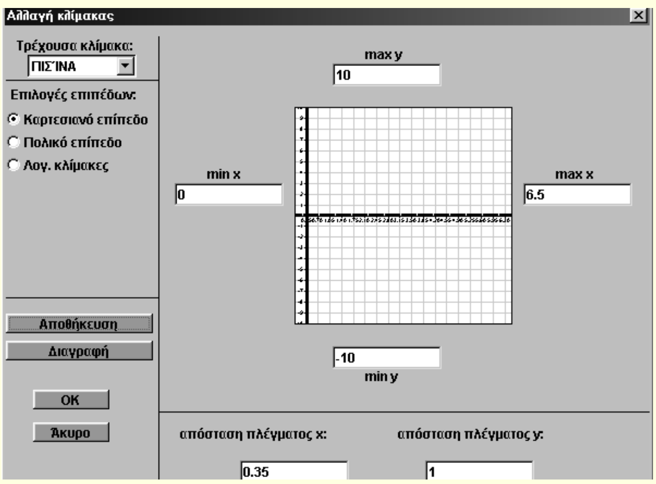
Μέσω της συζήτησης αυτής, οι μαθητές θα ανακαλέσουν τις γνώσεις τους για τη χρήση της τριγωνομετρίας στη μέτρηση πλευρών τριγώνων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουν το σχήμα με το οποίο θα γίνει η διερεύνηση στο Sketchpad.

II. Στις ερωτήσεις 2 και 3, δίνεται η πληροφορία στους μαθητές ότι στο Function Probe η γωνία θα πρέπει να έχει μετρηθεί σε ακτίνια και στη συνέχεια οι μαθητές περνούν τις μετρήσεις στον πίνακα τιμών του Function Probe. Εδώ καλό θα είναι ο διδάσκων να παρακινήσει τους μαθητές να πάρουν μετρήσεις και για παραπληρωματικές γωνίες π.χ. 1,046 (60˚) και 2,09 (120˚), ώστε να εμφανιστούν τα σημεία αυτά συμμετρικά στη γραφική παράσταση και να αποτελούν μια πρόσθετη ένδειξη για το ποια μορφή έχει η ζητούμενη σχέση.

Πριν μεταφέρουν οι μαθητές τις τιμές από τον πίνακα στο γράφημα, κατασκευάζουν κατάλληλη κλίμακα. Η κλίμακα επιλέγεται μέσω της εντολής “Αλλαγή κλίμακας” από το μενού “Γράφημα” (εικόνα 4). Η κλίμακα, στη συνέχεια, καλό θα είναι να αποθηκευτεί με κάποιο όνομα.

Η επιλογή κατάλληλης κλίμακας είναι μια διαδικασία την οποία εφαρμόζουν συνήθως μηχανικά οι μαθητές, όταν για παράδειγμα θέλουν να συσχετίσουν χρόνο με χρήματα και τα χρηματικά ποσά ανέρχονται σε εκατομμύρια. Το λογισμικό δίνει τη δυνατότητα συνειδητά πλέον ο μαθητής να επιλέγει την κατάλληλη κλίμακα ώστε να μπορεί να μεταφέρει τις μετρήσεις του σε ένα χώρο τον οποίο μπορεί να ελέγχει καλύτερα.

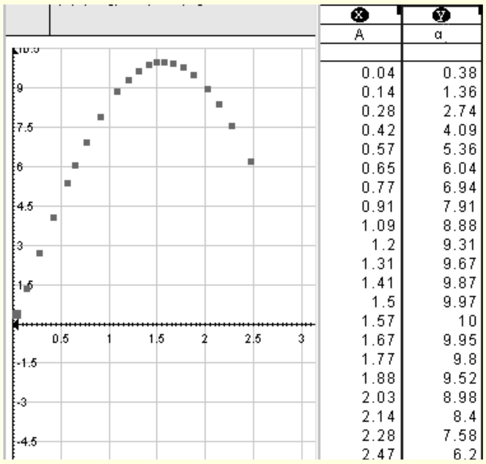
Καλό θα είναι οι άξονες να είναι χωρισμένοι σε ίσο αριθμό μονάδων ώστε το καρτεσιανό επίπεδο να είναι χωρισμένο σε τετράγωνα.



Εικόνα 4.

Τέλος, οι μαθητές αποστέλλουν τα ζεύγη τιμών από τον πίνακα τιμών στο γράφημα μέσω της εντολής “Σημεία σε γράφημα” από το μενού “Αποστολή” του πίνακα τιμών.

Ο τρόπος με τον οποίο έχουν παρουσιαστεί τα σημεία στους άξονες δείχνει ότι η σχέση δεν είναι τυχαία και προετοιμάζει για το επόμενο ερώτημα (εικόνα 5).



x A	y α
0.04	0.38
0.14	1.36
0.28	2.74
0.42	4.09
0.57	5.36
0.65	6.04
0.77	6.94
0.91	7.91
1.09	8.88
1.2	9.31
1.31	9.67
1.41	9.87
1.5	9.97
1.57	10
1.67	9.95
1.77	9.8
1.88	9.52
2.03	8.98
2.14	8.4
2.28	7.58
2.47	6.2

Εικόνα 5.

III. Στην ερώτηση 4, ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να εμπλέξει τους μαθητές σε μια πολύ σημαντική συζήτηση, η οποία αφορά στα χαρακτηριστικά του γραφήματος.

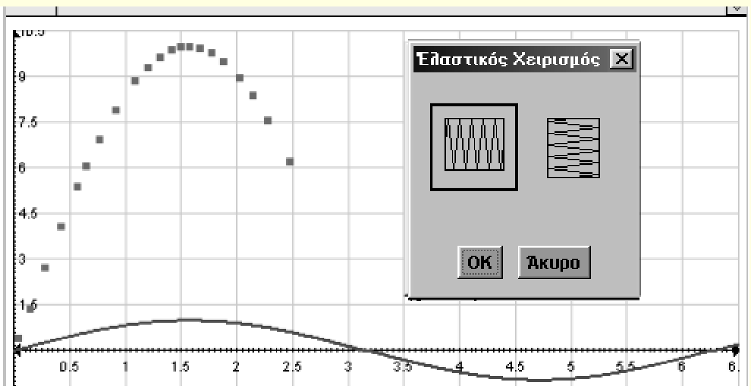
Ήδη, στην αρχή, έχει γίνει αναφορά για χρήση της τριγωνομετρίας σε προβλήματα μετρήσεων. Αν αυτό συνδυαστεί με το γεγονός ότι το μέγιστο παρουσιάζεται περίπου στις 90˚ και αν υπάρχουν μετρήσεις παραπληρωματικών γωνιών οι οποίες θα δίνουν ίδιο αποτέλεσμα, τότε οι μαθητές θα μπορέσουν να αντιληφθούν ότι ίσως τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ημιτονοειδή καμπύλη.

Οι μαθητές έχουν τώρα να ελέγξουν αν τα σημεία πράγματι βρίσκονται πάνω σε μια ημιτονοειδή καμπύλη και ποια είναι αυτή.

IV. Στον ίδιο χώρο εργασίας, οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της y = ημx.

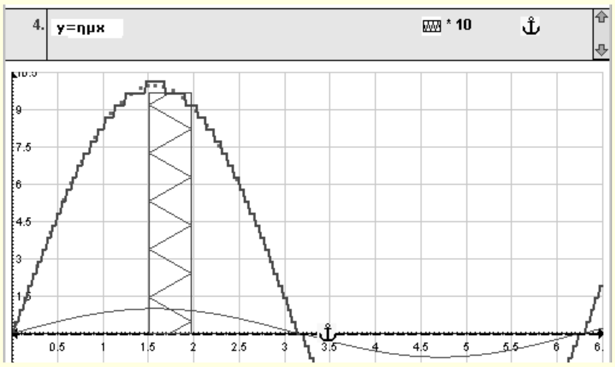
Προφανώς η γραφική παράσταση δεν περνά από τα σημεία και οι μαθητές θα πρέπει να προσαρμόσουν την καμπύλη ώστε να ελέγξουν αν είναι δυνατόν να περάσει.

Η προσαρμογή θα γίνει με τη βοήθεια του εργαλείου “ελαστικός χειρισμός”, το οποίο για να ενεργοποιηθεί θα πρέπει να είναι επιλεγμένη η γραφική παράσταση (εικόνα 6).



Εικόνα 6.

Αν ανυψώσουμε την κορυφή της γραφικής παράστασης, τότε, αφενός, η καμπύλη προσαρμόζεται πάνω στα σημεία και, αφετέρου, το λογισμικό μάς πληροφορεί ότι η νέα γραφική παράσταση αντιστοιχεί στη σχέση y = 10ημx (εικόνα 7).



Εικόνα 7.

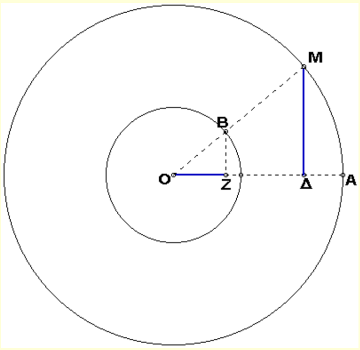
Η προσαρμογή μιας γνωστής καμπύλης πάνω σε ένα σύνολο σημείων αποτελεί μια σημαντική δραστηριότητα και ο διδάσκων έχει εδώ την ευκαιρία να επισημάνει στους μαθητές ότι οι επιστήμονες χρησιμοποιούν συχνά παρόμοιες μεθόδους όταν θέλουν να μελετήσουν την εξέλιξη ενός φαινομένου.

V. Οι μαθητές έχουν πλέον τη δυνατότητα να μετατρέψουν τη συναρτησιακή σχέση:

y = 10ημx σε ΒΓ = 2ρημΑ και να διατυπώσουν το νόμο των ημιτόνων.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η προσέγγιση του νόμου των ημιτόνων ήταν εμπειρική, αφού ουσιαστικά πραγματοποιήθηκε μέσω μετρήσεων. Η γενική απόδειξη είναι αυτή που θα καταστήσει έγκυρο το νόμο των ημιτόνων.

Ο καθηγητής των μαθηματικών σε ένα Λύκειο έδωσε στους μαθητές της Β΄ Λυκείου το παρακάτω πρόβλημα.



Δυο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $\sqrt{3}$ και 1 αντίστοιχα. Το σημείο Α είναι σταθερό πάνω στο μεγάλο κύκλο ενώ το Μ κινείται. Η ΟΜ τέμνει το μικρό κύκλο στο Β. Από τα σημεία Μ, Β φέρνουμε κάθετες πάνω στην ΟΑ, οπότε ορίζονται τα τμήματα ΟΖ και ΜΔ. Πόση πρέπει να είναι η γωνία ΜΟΑ ώστε η διαφορά ΜΔ – ΟΖ να είναι ίση με 1/2;

Ερώτηση 1η (2 μονάδες)

Να δείξετε ότι ΜΔ – ΟΖ= $\sqrt{3}$ημx – συνx, όπου x η γωνία ΜΟΑ.

Ερώτηση 2η (5 μονάδες)

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών της $f(x) = \sqrt{3}$ημx – συνx για 50 τιμές (σε ακτίνια) της γωνίας x. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;

Ερώτηση 3η (4 μονάδες)

Να περάσετε τα σημεία στους άξονες. Τι παρατηρείτε από τη διάταξη των σημείων;

Ερώτηση 4η (7 μονάδες)

Να βρείτε μια συνάρτηση η οποία περνά από όλα τα σημεία.

Ερώτηση 5η (2 μονάδες)

Με βάση την απάντηση στην ερώτηση 4, να δώσετε μια λύση στο αρχικό πρόβλημα.

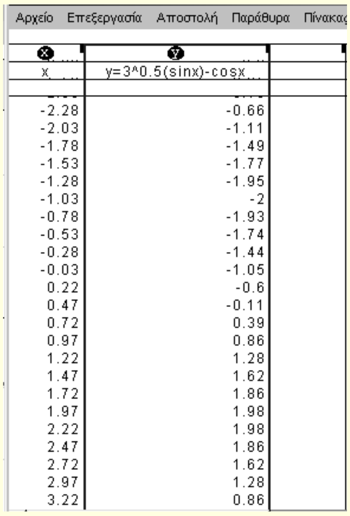
Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

Ε$_1$) Στο τρίγωνο ΜΟΔ ισχύει ΜΔ = ΟΜ · ημx = $\sqrt{3}$ημx. Στο τρίγωνο ΒΟΖ ισχύει ΟΖ = ΟΒ · συνx = 1 · συνx. Άρα ΜΔ – ΟΖ = $\sqrt{3}$ημx – συνx.

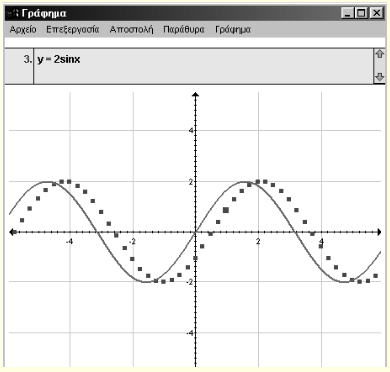
Ε$_2$) Η πρώτη στήλη θα συμπληρωθεί με την εντολή “Γέμισμα” από 0 μέχρι 6,28 (2π) και η δεύτερη με βάση τον τύπο της συνάρτησης. Ο αριθμός 2 φαίνεται να είναι το μέγιστο και ο αριθμός –2 είναι το ελάχιστο.

Ε$_3$) Η διάταξη των σημείων υποδεικνύει ημιτονοειδή συνάρτηση με μέγιστο το 2.

Ε$_4$) Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση y = 2ημx και τη μεταφέρουμε δεξιά κατά 0,52 ακτίνια (π/6), οπότε περνά από όλα τα σημεία. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι g(x) = 2ημ(x – $\frac{π}{6}$).


Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	y=3^0.5(sinx)-cosx
-2.28	-0.66
-2.03	-1.11
-1.78	-1.49
-1.53	-1.77
-1.28	-1.95
-1.03	-2
-0.78	-1.93
-0.53	-1.74
-0.28	-1.44
-0.03	-1.05
0.22	-0.6
0.47	-0.11
0.72	0.39
0.97	0.86
1.22	1.28
1.47	1.62
1.72	1.86
1.97	1.98
2.22	1.98
2.47	1.86
2.72	1.62
2.97	1.28
3.22	0.86



Ε$_5$) Η λύση στο αρχικό πρόβλημα προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης 2ημ(x – $\frac{π}{6}$) = 1/2 δηλαδή ημ(x – $\frac{π}{6}$) =1/4. Εδώ θα πρέπει η επίλυση να γίνει μέσω της γραφικής παράστασης αφού αλγεβρικά κάτι τέτοιο είναι αδύνατο.

Οι μαθητές κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της y = ημ(x – $\frac{π}{6}$) και, με τη χρήση του εργαλείου εντοπισμού των συντεταγμένων ενός σημείου της γραφικής παράστασης, βρίσκουν το ζεύγος με τεταγμένη 1/4 (x = 0.65 ακτίνια).

Σημείωση:

Είναι χρήσιμο ο διδάσκων να έχει ενημερώσει τους μαθητές για τη δυνατότητα του λογισμικού να εντοπίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου με το αντίστοιχο εργαλείο.