

12. Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση $y=ax^2+Bx+\gamma$

Σύντομη Περιγραφή

Στη δραστηριότητα αυτή καλούνται οι μαθητές να διερευνήσουν μια σειρά ερωτημάτων σχετικά με τη μεταβολή του τύπου της $y=ax^2+bx+\gamma$ εκτελώντας όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς (μετατοπίσεις και ως προς τους δύο άξονες, συμμετρίες, ανοίγματα κτλ.) στη γραφική της παράσταση. Η διερεύνηση στηρίζεται στη δυνατότητα που δίνει το πρόγραμμα για:

- > Αυξομείωση μιας γραφικής παράστασης.
- > Σχεδιασμό του συμμετρικού μιας γραφικής παράστασης ως προς τους δύο άξονες.
- > Μετακίνηση μιας γραφικής παράστασης κατά τον άξονα των x και των y .

Έτσι, σε κάθε ερώτημα οι μαθητές καλούνται να κάνουν μια εικασία σχετικά με το τι θα συμβεί αν μετασχηματίσουν με κάποιο από τους παραπάνω τρόπους τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ και μετά να επαληθεύσουν την εικασία τους εκτελώντας το μετασχηματισμό στο πρόγραμμα.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται σαν εισαγωγικό μάθημα στην Α' Λυκείου, στο κεφάλαιο της μελέτης τριωνύμου.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να συνδέουν την αλλαγή (μετατόπιση και στους δύο άξονες-αυξομείωση) στη γραφική παράσταση ενός τριωνύμου με τον αλγεβρικό τύπο του.
- > Να κατανοήσουν, παρατηρώντας το γραφικά, ότι κάθε τριώνυμο μετασχηματίζεται στη μορφή $\delta(x+\epsilon)^2+\zeta$.
- > Να βρίσκουν τη συμμετρική γραφική παράσταση ενός τριωνύμου ως προς τους δύο άξονες.
- > Να είναι σε θέση να διακρίνουν τι είδους μετασχηματισμούς πρέπει να κάνουν στη συνάρτηση $y=ax^2$ για να παραστήσουν γραφικά την $y=ax^2+bx+\gamma$.

Παρατηρήσεις

1. Στο ερώτημα 1 να γίνει χρήση της εντολής 'Γέμισμα' του παραθύρου 'Πίνακας'.
2. Στο ερώτημα 2 να συζητηθεί γιατί τα σημεία δεν μπορούν να ενωθούν με ευθύγραμμο τμήματα αλλά με βάση τον τύπο $y=x^2$.
3. Στο ερώτημα 3 προτείνεται να δοθεί έμφαση στη συμμετρία των τιμών της δευτεροβάθμιας συνάρτησης. Αυτό γίνεται φανερό από τον πίνακα τιμών αλλά και από τη γραφική παράσταση παίρνοντας το συμμετρικό της $y=x^2$ ως προς τον άξονα των y .
4. Στα ερωτήματα 4, 5 οι μαθητές καλούνται να εικάσουν την απάντηση και μετά να την επαληθεύσουν γραφικά εκτελώντας το μετασχηματισμό και βλέποντας την αλλαγή στον τύπο της αρχικής συνάρτησης.
5. Στο ερώτημα 7 ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο της συμμετρίας ως προς τον άξονα των x .

6. Στα ερωτήματα 8, 9, 10, 11 οι μαθητές καλούνται να μετατοπίσουν τη γραφική παράσταση της x^2 κατά τους δύο άξονες και να παρατηρήσουν τη μεταβολή που παρουσιάζεται κάθε φορά στον τύπο της. Προτείνεται να διατυπώσουν κανόνες σχετικά με τα αποτελέσματα που βρήκαν. Για παράδειγμα, αν μετακινήσω τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης κατά τον άξονα των x , αλλάζει η μεταβλητή x στον τύπο (κατά $+$ ή $-$ μονάδες).
7. Στο Β' μέρος δίνεται πρώτα ο τύπος της συνάρτησης και μετά ζητείται από τους μαθητές να βρουν τι είδους μετασχηματισμούς πρέπει να κάνουν σε μια αρχική συνάρτηση, για να προκύψει η δοθείσα.
8. Στο ερώτημα 3 του Β' μέρους να γίνει πρώτα αλγεβρικά η ανάλυση του τριωνύμου στη μορφή $\delta(x+\epsilon)^2+\zeta$ και μετά να επαληθευτεί το αποτέλεσμα γραφικά.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' κατασκεύασε έναν πίνακα με δύο στήλες. Την πρώτη θα την ονομάσεις x και θα παίρνει τις τιμές $-2,5, -2, -1,5, -1, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5$ και τη δεύτερη θα την ονομάσεις y και θα γεμίζει αυτόματα με βάση τον τύπο $y=x^2$. Τι παρατηρείς σχετικά με τις τιμές της συνάρτησης $y=x^2$;
2. Στείλε τις τιμές των σπηλών αυτών στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν θέλουμε να ενώσουμε τα σημεία που φαίνονται, με ποιο τρόπο θα το έκανες; Επαλήθευσέ το γραφικά.
3. Με ποιο μετασχηματισμό της γραφικής παράστασης μπορείς να δείξεις ότι οι τιμές της συνάρτησης για $x=-2,5, -2, -1,5, -1$ είναι ίσες με τις τιμές της συνάρτησης για $x=2,5, 2, 1,5, 1$;
4. Αν ανοίγαμε με οριζόντια αυξομείωση (εργαλείο αυξομείωσης) τη γραφική παράσταση κατά 2 μονάδες, τι φαντάζεσαι ότι θα άλλαζε στον τύπο της; Επαλήθευσε την εικασία σου γραφικά.
5. Αν κλείναμε με οριζόντια αυξομείωση τη γραφική παράσταση κατά μισή μονάδα, τι αλλαγές θα παρατηρούσες στον τύπο της; Επαλήθευσε και πάλι την εικασία σου γραφικά.
6. Αν αλλάζαμε τον τύπο της συνάρτησης σε $y=-x^2$, τι αλλαγή θα παρατηρούσες στη γραφική της παράσταση; Επαλήθευσε και πάλι την εικασία σου γραφικά.
7. Σκέψου με ποιο μετασχηματισμό (μετατόπιση, συμμετρικό ή αυξομείωση) θα μπορούσες να ταυτίσεις τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ με την $y=-x^2$; Απόδειξε την εικασία σου και αλγεβρικά.
8. Μετακίνησε την αρχική σου γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα δεξιά. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;
9. Μετακίνησε την αρχική σου γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα αριστερά. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;
10. Μετακίνησε τη γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;
11. Μετακίνησε τη γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;

Β' Μέρος

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' να κάνεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2x^2$. Έπειτα να κάνεις τη γραφική παράσταση της $y=2(x-3)^2+1$. Μετασχημάτισε κατάλληλα την πρώτη γραφική παράσταση, ώστε να ταυτιστεί με τη δεύτερη. Τι μετασχηματισμούς έκανες και κατά πόσες μονάδες;
2. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' (με τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία') και κάνε τη γραφική παράσταση του τύπου $y=-5(x+1)^2-4$. Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση θα επέλεγες να μετασχηματίσεις κατάλληλα, ώστε να ταυτιστεί με αυτή τη γραφική παράσταση; Επαλήθευσε την απάντησή σου γραφικά.
3. Κάποιος υποστηρίζει ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $y=ax^2+bx+\gamma$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\delta(x+\epsilon)^2+\zeta$, οπότε η γραφική παράσταση κάθε τριωνύμου βρίσκεται με κατάλληλη μετατόπιση της συνάρτησης ax^2 . Επαλήθευσέ το για τη συνάρτηση $y=x^2-6x+8$, φέρνοντάς την πρώτα στη μορφή $y=\delta(x+\epsilon)^2+\zeta$.