

### 13. Ο παραγωγός μήλων

#### Σύντομη Περιγραφή

Ένας παραγωγός μήλων αντιμετωπίζει το εξής δίλημμα: αν μαζέψει νωρίς τα μήλα του, θα τα πουλήσει μεν σε υψηλή τιμή αλλά θα έχει μικρή παραγωγή, ενώ αν τα μαζέψει αργότερα (μέσα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα), θα έχει μικρότερη παραγωγή αλλά θα τα πουλήσει ακριβότερα. Ζητείται από τους μαθητές να διερευνήσουν ποια χρονική στιγμή τον συμφέρει να πουλήσει τα μήλα του.

Η επίλυση και διερεύνηση του προβλήματος εμπλέκει τις έννοιες μέγιστη τιμή τριωνύμου και μελέτη της μεταβολής του τύπου μιας δευτεροβάθμιας συνάρτησης, όταν μετατοπίζεται η γραφική της παράσταση κατά τον άξονα των  $x$ .

Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις τρεις αναπαραστάσεις της δευτεροβάθμιας συνάρτησης (πίνακας, γραφική παράσταση, τύπος) συσχετίζοντάς τες κάθε φορά με τα δεδομένα του προβλήματος.

#### Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται να δοθεί στους μαθητές της Α' Λυκείου σαν εισαγωγή στις έννοιες μέγιστη τιμή τριωνύμου και μετασχηματισμοί τριωνύμου.

**Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας:** 3 διδακτικές ώρες

#### Διδακτικοί στόχοι

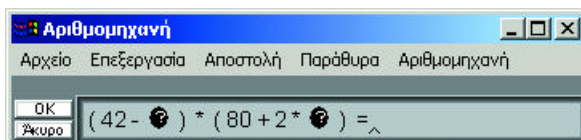
Γενικός στόχος είναι οι μαθητές να γνωρίσουν τις έννοιες αυτές μέσα από τη χρήση τους σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, όπου οι έννοιες αυτές έχουν ένα συγκεκριμένο νόημα. Για παράδειγμα, η μέγιστη τιμή του τριωνύμου που χρησιμοποιείται στο πρόβλημα, αφορά το μέγιστο κέρδος του παραγωγού, ενώ η μετατόπιση της γραφικής του παράστασης προς τα δεξιά κατά τον άξονα των  $x$ , αφορά την αντίστοιχη μετατόπιση της εβδομάδας που τον συμφέρει να πουλήσει την παραγωγή του. Ειδικότερα, στόχος είναι οι μαθητές:

- > Να κατανοήσουν την έννοια του μεγίστου μιας συνάρτησης.
- > Να διακρίνουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο ενός τριωνύμου, μετατοπίζοντας τη γραφική του παράσταση προς τα δεξιά κατά τον άξονα των  $x$ .
- > Να είναι σε θέση να αλλάζουν κατάλληλα την αρίθμηση των αξόνων στο παράθυρο 'Γράφημα', για να αναπαριστούν σωστά μια συνάρτηση.
- > Να κατασκευάσουν τον τύπο που συνδέει δύο εξαρτημένες μεταξύ τους μεταβλητές (κέρδος, αριθμός εβδομάδων).

#### Παρατηρήσεις

1. Προτείνεται στην αρχή της δραστηριότητας, προτού οι μαθητές εμπλακούν με τα ερωτήματα του προβλήματος, να γίνει συζήτηση στην τάξη σχετικά με την κατανόηση του προβλήματος. Να ερωτηθούν, για παράδειγμα, οι μαθητές γιατί ο παραγωγός βρίσκεται σε δίλημμα, από ποιες παραμέτρους εξαρτάται το κέρδος του κτλ.
2. Στα ερωτήματα 1, 2, 3 προτείνεται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις τους.

- Όταν οι μαθητές ολοκληρώσουν το ερώτημα 3, στο επόμενο ερώτημα καλούνται να δημιουργήσουν στον 'Πίνακα' του Function Probe τον πίνακα του ερωτήματος 3, βάζοντας όμως στη στήλη του κέρδους τον τύπο που συνδέει το κέρδος του παραγωγού με τον αριθμό των εβδομάδων. Έτσι, καλούνται να δημιουργήσουν μια ανεξάρτητη στήλη (αριθμός εβδομάδων) και μια εξαρτημένη (κέρδος). Προτείνεται, για την κατασκευή του τύπου που θα εισαγάγουν στην εξαρτημένη στήλη, να δουλέψουν στην 'Αριθμομηχανή'. Να κατασκευάσουν εκεί ένα κουμπί που να υπολογίζει το κέρδος συναρτήσει της εβδομάδας (βλέπε εικόνα 1).



εικόνα 1

- Στο ερώτημα 5 πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' από το μενού 'Πίνακας'. Να δοθεί έμφαση στην αιτιολόγηση της μη εμφάνισης των σημείων στο παράθυρο 'Γράφημα', πράγμα που έχει να κάνει με την αρίθμηση των αξόνων και τα μεγέθη που παριστάνονται σε αυτούς.
- Στο ερώτημα 6 οι μαθητές καλούνται να βρουν το κέρδος στα μισά της δεύτερης εβδομάδας ενώνοντας τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Η λύση είναι προσεγγιστική και αυτό γίνεται φανερό, αν υπολογίσουν το ακριβές αυτό κέρδος στο παράθυρο 'Πίνακας', εισάγοντας κατάλληλα ανάμεσα στο 2 και στο 3 την τιμή 2.5 (βλέπε εικόνα 2).  
Να δοθεί επίσης έμφαση στη διαφορά ανάμεσα στο 'ενώνω τα σημεία που ανήκουν σε μια γραφική παράσταση με τυχαίο τρόπο' ή 'με μια συγκεκριμένη καμπύλη'. Συχνά οι μαθητές αγνοούν ότι τα διακριτά σημεία μιας γραφικής παράστασης αποτελούν σημεία του γραφήματος μιας συνάρτησης.

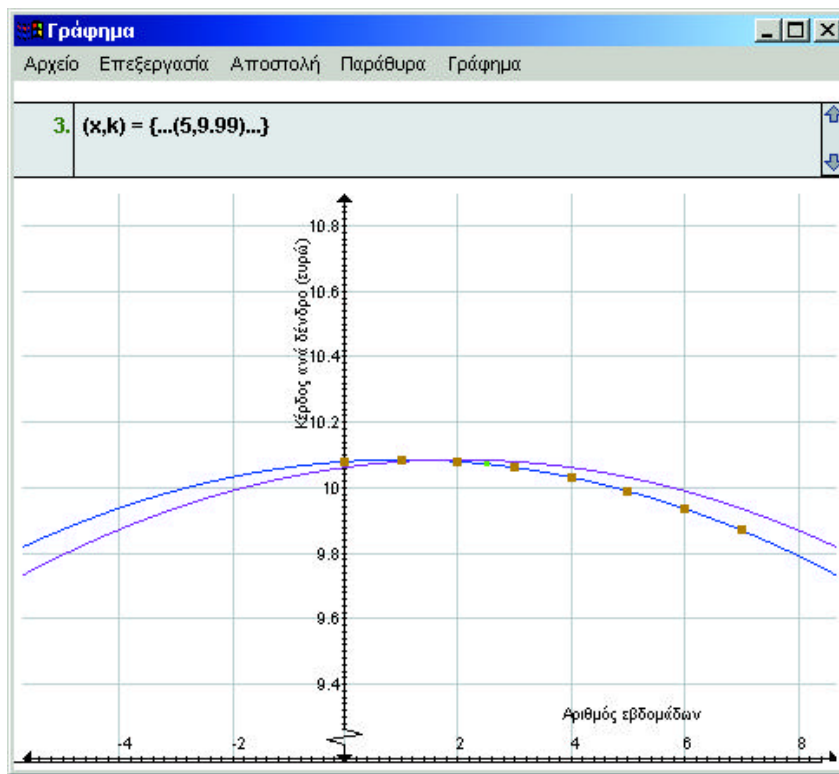
Αριθμός εβδομάδων	Κέρδος ανά δένδρο (ευρώ)
0	10.08
1	10.09
1.5	10.08
2	10.08
2.5	10.07
3	10.06
3.5	10.05
4	10.03
5	9.99
6	9.94
7	9.87

εικόνα 2

- Στο ερώτημα 8, εισάγοντας οι μαθητές τον τύπο αυτό στο παράθυρο 'Γράφημα', παρατηρούν ότι η καμπύλη έχει μέγιστη τιμή. Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τι παριστάνει στο πρόβλημα η μέγιστη αυτή τιμή (το μέγιστο κέρδος). Να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση της γραφικής παράστασης για την απάντηση μιας ερώτησης. Προτείνεται οι μαθητές να

ενθαρρύνονται να δίνουν προσεγγιστικές απαντήσεις σε μια ερώτηση μέσα από τη γραφική παράσταση και μετά να επαληθεύουν την απάντησή τους μέσα από τον πίνακα τιμών.

7. Στο ερώτημα 9 ζητείται από τους μαθητές να μετακινήσουν (χρησιμοποιώντας το κατάλληλο εργαλείο) τη γραφική παράσταση στο 'Γράφημα' οριζόντια και δεξιά κατά 1 μονάδα και να αποφανθούν τι αλλάζει (εβδομάδα) και τι μένει σταθερό (κέρδος). Παρατηρούν δηλαδή ότι το κέρδος μένει σταθερό, ενώ η εβδομάδα που έχει το μέγιστο κέρδος είναι αυτή τη φορά η δεύτερη αντί της πρώτης (βλέπε εικόνα 3).
8. Στο ερώτημα 10 ζητείται να παρατηρήσουν τι πρέπει να αλλάξουν στον τρόπο που αριθμήσαν τις εβδομάδες, για να βρίσκουν το κέρδος του παραγωγού με βάση τη νέα γραφική παράσταση. Η αριθμηση τώρα δεν θα αρχίζει από το 0 αλλά από το 1. Ο κανόνας που τους ζητείται να βρουν (αν μετακινήσουν δεξιά κατά μια μονάδα τη γραφική παράσταση, τότε στο νέο τύπο της το  $x$  γίνεται  $x-1$ ), προτείνεται να βρεθεί παρατηρώντας το νέο τύπο στο 'Πλαίσιο Τύπων' και να ερμηνευτεί μέσα από το μετασχηματισμό που έκαναν.



εικόνα 3

### Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Ένας παραγωγός μήλων διαπίστωσε ότι τα μήλα στο κτήμα του ωρίμασαν και πρέπει να τα μαζέψει το αργότερο μέσα σε έξι εβδομάδες. Αντιμετωπίζει όμως το εξής πρόβλημα: Αν τα μαζέψει σήμερα, κάθε δέντρο θα του αποδώσει 42 κιλά κατά μέσο όρο. Για κάθε εβδομάδα που περνάει, εκτιμά ότι η απόδοση κάθε δέντρου θα μειώνεται κατά 1 κιλό (από πέσιμο μήλων στο έδαφος, κτλ.), ενώ η τιμή πώλησης θα αυξάνεται κατά 0,6 λεπτά το κιλό. Η σημερινή τιμή πώλησης είναι 24 λεπτά το κιλό. Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε την 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σου.

1. Ποιο είναι το κέρδος του παραγωγού ανά δένδρο, αν πουλήσει σήμερα τα μήλα του;  
*Απάντηση: Ο παραγωγός θα εισπράξει 10,08 ευρώ ανά δένδρο.*
2. Στην αρχή της άλλης εβδομάδας πόσα κιλά θα είναι τα μήλα, πόσα ευρώ θα κοστίζουν το κιλό και ποιο θα είναι το κέρδος του παραγωγού;  
*Απάντηση: Κάθε δένδρο θα αποδίδει 41 κιλά μήλα, ένα κιλό μήλα θα κοστίζει 24,006 λεπτά και ο παραγωγός θα εισπράξει 10,09 ευρώ ανά δένδρο.*
3. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Σαν εβδομάδα 0 θεώρησε την τρέχουσα εβδομάδα.

Αριθμός εβδομάδων	Κέρδος ανά δένδρο (ευρώ)
0	10,08
1	10,09
2	10,08
3	10,06
4	10,03
5	9,99
6	9,94

4. Δημιούργησε τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας' αλλά για τη στήλη 'Εισπράξεις' φτιάξε έναν τύπο, ο οποίος θα παίρνει σαν είσοδο τις τιμές της στήλης 'Αριθμός εβδομάδων' και θα υπολογίζει το κέρδος κάθε εβδομάδας ανά δένδρο.  
*Απάντηση:  $k = (42-x)(0.24 + 0.006x)$*
5. Στείλε τα σημεία αυτά στο παράθυρο 'Γράφημα'. Μπορείς να διακρίνεις τα σημεία; Αν όχι, δικαιολόγησε γιατί και διόρθωσε το πρόβλημα.
6. Με την εντολή 'Σύνδεση σημείων' ένωσε τα σημεία αυτά. Μπορείς από τη γραφική παράσταση να υπολογίσεις το κέρδος του παραγωγού, αν πουλούσε τα μήλα του στα μισά της δεύτερης εβδομάδας, χρησιμοποιώντας το εργαλείο 'Δείκτη σημείου'; Επαλήθευσε την απάντησή σου χρησιμοποιώντας τον 'Πίνακα'. Εξήγησε τη διαφορά των αποτελεσμάτων. Χρησιμοποίησε το εικονίδιο μεγέθυνσης για να δεις καλύτερα τις γραφικές παραστάσεις.
7. Ποιον τύπο πρέπει να εισαγάγεις στην περιοχή εγγραφής τύπου, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία που φαίνονται;
8. Με το εργαλείο 'Δείκτη σημείου' να υπολογίσεις από τη γραφική παράσταση ποια είναι η κατάλληλη εβδομάδα, για να πουλήσει τα μήλα του. Επαλήθευσέ το στο παράθυρο 'Πίνακας'.  
*Απάντηση: Η πιο κατάλληλη εβδομάδα για να πουλήσει τα μήλα είναι η πρώτη.*
9. Μετατόπισε τη γραφική παράσταση οριζόντια προς τα δεξιά κατά τον άξονα των  $x$  κατά μία μονάδα. Τι έχει αλλάξει ως προς το μέγιστο κέρδος και ως προς την εβδομάδα που πρέπει να πουλήσει τα μήλα του;  
*Απάντηση: Το μέγιστο κέρδος είναι το ίδιο και η εβδομάδα στην οποία συμβαίνει είναι η 2η.*
10. Από πού θα άρχιζες την αρίθμηση των εβδομάδων, ώστε να μπορείς από το νέο τύπο της μετατοπισμένης γραφικής παράστασης να βρεις τα ίδια αποτελέσματα;  
*Απάντηση: Για  $x=1$ .*
11. Παρατήρησε τον τύπο της μετατοπισμένης γραφικής παράστασης και βρες τη διαφορά με τον τύπο της αρχικής. Διατύπωσε σε μορφή κανόνα πώς μεταβάλλεται ο τύπος μιας συνάρτησης, όταν η γραφική της παράσταση μετακινηθεί κατά τον άξονα των  $x$  προς τα δεξιά.