Ομάδα Δ: Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

14. Ο Τροχός του Λούνα Παρκ

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Ο Τροχός του Λούνα Παρκ είναι ένα πρόβλημα που η επίλυσή του στηρίζεται στη δυνατότητα προσδιορισμού της απόστασης του κινητού από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου κατά την ομαλή κυκλική κίνηση σε κάθε χρονική στιγμή με τη χρήση της συνάρτησης του ημιτόνου. Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν τη θέση του κινητού (επιβάτης του τροχού) από ένα δεδομένο άξονα αναφοράς (έδαφος, πλατφόρμα) κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης του τροχού και κάτω από διαφορετικές τιμές της ταχύτητας περιστροφής του.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα, στη διδασκαλία της συνάρτησης y=ημx, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί στη Φυσική την κυκλική κίνηση.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2-3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

> Να χρησιμοποιήσουν το ημίτονο γωνίας για να εκφράσουν τις μεταβολές του ύψους του κινητού κατά την κυκλική κίνηση.

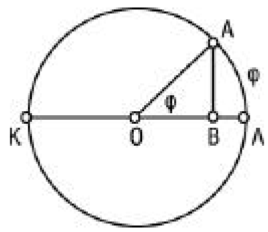
> Να μελετήσουν τη συνάρτηση y=ημx μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της (τύπος, πίνακας τιμών, γράφημα).

> Να μετασχηματίσουν γραφικά τη συνάρτηση y=ημx και να μελετήσουν τις συνέπειες των μετασχηματισμών στον τύπο της.

> Να κατανοήσουν την αναγκαιότητα περιορισμού του πεδίου ορισμού της συνάρτησης y=ημx με βάση τα δεδομένα του προβλήματος.

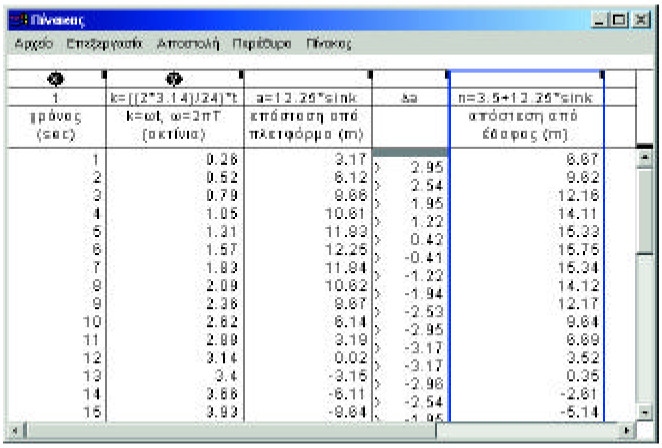
Παρατηρήσεις

1. Προτείνεται να γίνει αρχικά μία συζήτηση μέσα στην τάξη για τους νόμους που διέπουν την κυκλική κίνηση ή σε συνεννόηση με τον καθηγητή της Φυσικής αυτό να έχει γίνει στην ώρα της Φυσικής.
2. Στο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι τύποι της κυκλικής κίνησης:
   α) **φ=ωt**, όπου φ το τόξο που διαγράφει το κινητό (σε ακτίνια), ω η γωνιακή ταχύτητα και t ο χρόνος περιστροφής
   β) **ω=2π/Τ**, όπου Τ η περίοδος περιστροφής.
3. Προτείνεται, προτού οι μαθητές εμπλακούν με τα ερωτήματα του προβλήματος, να σχεδιάσουν στο τετράδιό τους ένα σχήμα (βλ. εικόνα 1) που αναπαριστά τις συνθήκες του προβλήματος και στο οποίο θα φαίνεται η απόσταση του σημείου Α (επιβάτης του τροχού) από την πλατφόρμα (ΚΛ).



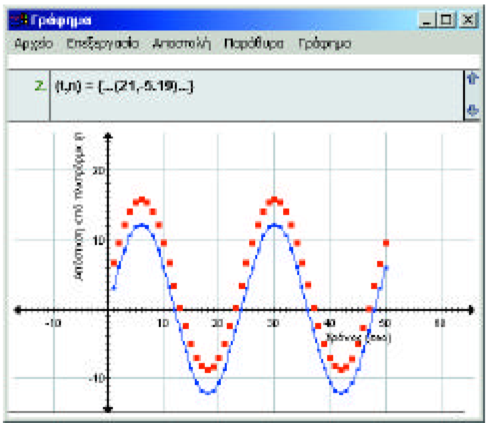
εικόνα 1

4. Τα ερωτήματα 1, 2 μπορούν να απαντηθούν δουλεύοντας οι μαθητές στο τετράδιό τους και χρησιμοποιώντας την ‘Αριθμομηχανή’, για να κάνουν πράξεις. Στην ερώτηση 2 όμως μπορούμε να επανέλθουμε, αφού οι μαθητές έχουν κατασκευάσει τον πίνακα του ερωτήματος 4, με την παρότρυνση να δημιουργήσουν μια στήλη με τη χρήση της εντολής ‘Διαφορά’ από το μενού ‘Πίνακας’ όπως φαίνεται στην εικόνα 2.
5. Στο ερώτημα 2 προτείνεται να αιτιολογηθούν τα αρνητικά πρόσημα.
6. Στο ερώτημα 3 να αξιοποιηθεί η δυνατότητα χρήσης τύπων για τη δημιουργία εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο ‘Πίνακας’. Σαν ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιούμε το χρόνο και εκφράζουμε τη γωνιακή ταχύτητα και την απόσταση από την πλατφόρμα συναρτήσει του χρόνου. Προτεινόμενη κλίμακα φαίνεται στην εικόνα 2 (άξονας x’x : -20 έως 20 και βήμα 10, άξονας y’y: -20 έως 20 και βήμα 10).
7. Στο ερώτημα 5, προκειμένου να φανούν τα σημεία στη γραφική παράσταση, πρέπει να γίνει ‘Αλλαγή κλίμακας’ από το μενού ‘Γράφημα’.
8. Για το ερώτημα 6 οι μαθητές θα πρέπει να προσεγγίσουν τα σημεία που έστειλαν στο ‘Γράφημα’ μετασχηματίζοντας την καμπύλη y=ημx με αυξομειώσεις, έτσι ώστε να περνάει από τα σημεία, και να περιγράψουν πώς το έκαναν.
9. Στο ερώτημα 7 έχουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους την απόσταση από το έδαφος, τη διαφορετική γωνιακή ταχύτητα και τη διαφορετική διάμετρο του τροχού.
10. Στο ερώτημα 8 θα πρέπει να διαπιστώσουν ότι, παρότι αλλάζει το πεδίο ορισμού (από 0-300), το σύνολο των τιμών παραμένει το ίδιο λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης του ημιτόνου.



1	k=((2*3.14)/24)*t	a=12.25*sink	Δa	n=3.5+12.25*sink
χρόνος (sec)	k=ωt, ω=2πT (ακτίνια)	απόσταση από πλατφόρμα (m)		απόσταση από έδαφος (m)
1	0.26	3.17	2.95	6.67
2	0.52	6.12	2.54	9.62
3	0.79	8.66	1.95	12.16
4	1.05	10.61	1.22	14.11
5	1.31	11.83	0.42	15.33
6	1.57	12.25	-0.41	15.75
7	1.83	11.84	-1.22	15.34
8	2.09	10.62	-1.94	14.12
9	2.36	8.67	-2.53	12.17
10	2.62	6.14	-2.95	9.64
11	2.88	3.19	-3.17	6.69
12	3.14	0.02	-3.17	3.52
13	3.4	-3.15	-2.98	0.35
14	3.66	-6.11	-2.54	-2.61
15	3.93	-8.64	-1.95	-5.14

εικόνα 2



εικόνα 3

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Φαντάσου πως είσαι ανεβασμένος στον τροχό του Λούνα Παρκ ο οποίος περιστρέφεται. Θεωρούμε αυτού του είδους την κίνηση κυκλική, αφού το σώμα μας ακολουθεί την κυκλική κίνηση του τροχού.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο τροχός έχει διάμετρο 24,5 m και εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 δευτερόλεπτα, ενώ στρέφεται με φορά αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο τροχός είναι κατασκευασμένος με τέτοιον τρόπο, ώστε η χαμηλότερη θέση του να απέχει από το έδαφος 3,5 m. Η πλατφόρμα από την οποία ανεβαίνεις βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το κέντρο του τροχού. Ξεκινώντας λοιπόν το γύρο με τον τροχό, η θέση σου βρίσκεται στο ύψος του κέντρου του.

Πριν ξεκινήσεις, σχεδίασε ένα σχήμα για να βοηθηθείς.

1. Πόσο απέχεις από την πλατφόρμα μετά από 3 sec; (Να στρογγυλοποιήσεις την απάντησή σου στο πλησιέστερο εκατοστό). Σε πόση ώρα θα βρεθείς στο υψηλότερο σημείο του γύρου;
   Απάντηση: Απόσταση=8,66m. Σε 6 sec.
2. Πόσο απέχεις από την πλατφόρμα μετά από 9 sec; Μετά από 12, 15, 36 sec;
   Απάντηση: 8,67m, 0,02m, -8,64m, 0m
3. Να κατασκευάσεις έναν πίνακα στο Function Probe, για να εκφράσεις τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο και το ύψος πάνω ή κάτω από την πλατφόρμα, για δύο τουλάχιστον πλήρεις περιστροφές του τροχού (με βήμα 1). Να εξηγήσεις πώς προέκυψαν οι τιμές του πίνακα.
4. Ανεβαίνεις περισσότερο τα πρώτα 3 sec ή τα 3 επόμενα; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου. Για να διευκολυνθείς στην απάντησή σου μπορείς να δημιουργήσεις μία στήλη 'διαφορών' ως εξής: κάνεις κλικ με το αριστερό πλήκτρο στη στήλη που δείχνει την απόσταση από την πλατφόρμα για να την ενεργοποιήσεις, και επιλέγεις την εντολή 'Διαφορά' από το μενού 'Πίνακας'.
5. Να στείλεις τις τιμές των κατάλληλων στηλών από το παράθυρο 'Πίνακας' στο παράθυρο 'Γράφημα', για να δημιουργήσεις τη γραφική παράσταση του ύψους από την πλατφόρμα συναρτήσει του χρόνου. Στο παράθυρο 'Γράφημα' να πληκτρολογήσεις τον τύπο της συνάρτησης που μας δίνει την απόσταση από την πλατφόρμα. Τι παρατηρείς;
6. Να δημιουργήσεις το διάγραμμα της y=ημx. Να δείξεις με ποιον τρόπο μπορείς να χρησιμοποιήσεις μετασχηματισμούς στη γραφική παράσταση του y=ημx, για να παραγάγεις το διάγραμμα που αντιστοιχεί στον τροχό του Λούνα Παρκ.
   Απάντηση: Πρώτα γίνεται μία οριζόντια αυξομείωση κατά 12,25 και κατόπιν μία κάθετη αυξομείωση κατά 3 μέχρι να συμπέσει η καμπύλη με σημεία που έχουν σταλεί από τον πίνακα.
7. Πώς θα άλλαζε ο πίνακας, το γράφημα και ο τύπος σου αν:
   > Σε ενδιέφερε να μάθεις το ύψος από το έδαφος και όχι από την πλατφόρμα;
   > Ο τροχός περιστρεφόταν με τη διπλάσια ταχύτητα; Ή με τη μισή της αρχικής, ταχύτητα;
   > Η διάμετρος του τροχού ήταν 23 m;
   > Η πλατφόρμα ήταν τοποθετημένη στο κάτω μέρος του τροχού;
8. Αν η βόλτα με τον τροχό του Λούνα Πάρκ διαρκεί πέντε λεπτά, ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το πεδίο τιμών της συνάρτησης που αντιστοιχεί σε αυτά τα δεδομένα;