

Ομάδα Ε: Άλλες Συναρτήσεις

18. Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση της απόλυτης τιμής

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Στη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιείται η συνάρτηση της απόλυτης τιμής για την εισαγωγή των μαθητών στους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων (οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση, οριζόντια και κατακόρυφη αυξομείωση, συμμετρία). Οι μετασχηματισμοί μπορεί αρχικά να δημιουργούν σύγχυση, όταν όμως οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εργαστούν με ένα πίνακα τιμών και εργαλεία που 'οπτικοποιούν' τους μετασχηματισμούς αυτούς, ενισχύονται οι διαισθητικές τους αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και των μετασχηματισμών της.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να ενταχθεί στην αντίστοιχη ενότητα της Α' Λυκείου, όπου οι μαθητές διδάσκονται τη συνάρτηση της απόλυτης τιμής.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών στον τύπο και στο γράφημα της συνάρτησης $y = \text{abs}(x)$.
- > Να μπορούν να προβλέπουν την αλλαγή του τύπου της συνάρτησης μετά από κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό του γραφήματος της $y = \text{abs}(x)$.
- > Να μπορούν να προβλέπουν τη θέση του γραφήματος μετά από κάποια αλλαγή στον τύπο της συνάρτησης $y = \text{abs}(x)$.

Παρατηρήσεις

1. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καθοδηγούνται στη διερεύνηση των μετασχηματισμών και των επιπτώσεών τους στο γράφημα και στον τύπο της $y = \text{abs}(x)$ βήμα προς βήμα. Είναι χωρισμένη σε 5 μέρη, όπου το κάθε μέρος αποτελεί και μια διαφορετική ενότητα. Το πρώτο μέρος αφορά σε διαπιστώσεις που θα γίνουν στον πίνακα τιμών και στη γραφική παράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης $y = \text{abs}(x)$. Το δεύτερο μέρος αφορά σε οριζόντιες και κατακόρυφες μετακινήσεις (μετατοπίσεις) των προηγούμενων σημείων, ενώ το τρίτο μέρος αφορά σε αυξομειώσεις τους (άνοιγμα και κλείσιμο). Το τέταρτο μέρος αφορά στην πρόβλεψη των γραφημάτων από τους τύπους της συνάρτησης και τέλος το πέμπτο μέρος αφορά στην περιγραφή των μετασχηματισμών από τις γραφικές παραστάσεις τους. Προτείνεται κάθε ομάδα, στο τέλος κάθε μέρους της δραστηριότητας, να γράφει στο τετράδιο τα συμπεράσματά της, τα οποία να συζητούνται με όλη την τάξη.
2. Προτείνεται η ερώτηση 2 του τέταρτου μέρους να αποτελέσει αντικείμενο διεξοδικής συζήτησης σε όλη την τάξη, έτσι ώστε να διατυπωθούν οι αντίστοιχοι κανόνες για το ρόλο των Α, Β, Γ και Δ.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος: Γραφική αναπαράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης 'Απόλυτη τιμή'

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' του Function Probe κατασκεύασε μια στήλη με τιμές του 'x' από -12 έως 12. Να κατασκευάσεις μια δεύτερη στήλη εισάγοντας $y=abs(x)$. Περιγράψε τις συσχετίσεις που βλέπεις σε αυτή τη στήλη. Χρησιμοποίησε τις εντολές 'Διαφορά' και 'Λόγος', για να ανακαλύψεις και άλλες σχέσεις.
2. Επίλεξε την εντολή 'Σημεία σε Γράφημα' από το μενού 'Αποστολή' και άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα', για να δεις τη σχέση ανάμεσα στα x και y. (Έχε το παράθυρο ανοιχτό σε πλήρες μέγεθος για αυτή την άσκηση). Κάνε μια περιγραφή του διαγράμματος, συμπεριλαμβάνοντας τη θέση του κατώτατου σημείου και τη γωνία που σχηματίζει γραφική παράσταση με τον άξονα των x. Πώς φαίνονται στο διάγραμμα οι σχέσεις που βρήκες στον πίνακα;

Β' Μέρος: Μετατοπίσεις

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' μετάφερε τα σημεία στη γραφική παράσταση της $y=abs(x)$ κατά έξι μονάδες, κατακόρυφα. Για να το πετύχεις αυτό, κάνε κλικ στο εικονίδιο μετατόπισης και από το παράθυρο διαλόγου επίλεξε το βέλος της κατακόρυφης μετατόπισης. Στη συνέχεια, σύρε τα σημεία της $y=abs(x)$, κατά έξι μονάδες κατακόρυφα. Περιγράψε το νέο διάγραμμα: Τι έχει αλλάξει; Τι έμεινε ίδιο;
2. Να προβλέψεις τι επίδραση έχει η μετατόπιση στον πίνακα με τις τιμές (που έχεις κατασκευάσει) και στη συνέχεια να στείλεις τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας', επιλέγοντας την εντολή 'Σημεία σε Πίνακα' από το μενού 'Αποστολή'. (Θα εμφανιστούν δύο μηνύματα τα οποία θα σε προειδοποιούν ότι οι αρχικές στήλες για τα x και y θα απενεργοποιηθούν. Κάθε φορά θα κάνεις κλικ στο κουμπί 'OK' για να συνεχίσεις.) Δύο νέες στήλες θα εμφανιστούν στην οθόνη και θα αντιπροσωπεύουν τα μετατοπισμένα σημεία. Επαληθεύουν τα νέα σημεία τις προβλέψεις σου; Τι επίδραση έχει μια κατακόρυφη μετατόπιση στο παράθυρο 'Πίνακας';
3. Να προβλέψεις την επίδραση που έχει η μετατόπιση στον τύπο της $y=abs(x)$. Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, γράψε τον τύπο σου στο παράθυρο 'Γράφημα', ως συνάρτηση προς σχεδίαση. Διέρχεται από τα νέα σημεία; Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου στο παράθυρο 'Πίνακας', μπορείς να στείλεις τον τύπο σου από το παράθυρο 'Γράφημα', επιλέγοντας την εντολή 'Ορισμός αντικειμένου' στο παράθυρο 'Γράφημα' και γράφοντας 'z=g1(x)' στο παράθυρο 'Πίνακας'. Τα σημεία από τη $g1(x)$ ταυτίζονται με τα μετατοπισμένα σημεία; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης μετατόπισης στον τύπο;
4. Τι επίδραση θα είχε μια κατακόρυφη μετατόπιση 11 μονάδων προς τα κάτω, στον πίνακα, στο διάγραμμα και στον τύπο;
5. Πραγματοποίησε τώρα αντίστοιχες οριζόντιες μετατοπίσεις στην αρχική συνάρτηση $y=abs(x)$:
 - α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στις τιμές του πίνακα; β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στον τύπο; γ) Ποια θα ήταν η επίδραση, αν η μετατόπιση γινόταν προς τα αριστερά;

Γ' Μέρος: Αυξομειώσεις

1. Καθάρισε τον πίνακα από όλες τις στήλες, εκτός της αρχικής x ($-12 < x < 12$) και της $y = \text{abs}(x)$. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' από όλα τα διαγράμματα, εκτός από τα σημεία της $y = \text{abs}(x)$. Άνοιξε τη γραφική παράσταση κατακόρυφα με συντελεστή 2, χρησιμοποιώντας το εργαλείο αυξομείωσης. (Κάνε κλικ στο εικονίδιο αυξομείωσης και επίλεξε την κατακόρυφη αυξομείωση). Πάτησε το πλήκτρο 'Enter', για να τοποθετήσεις τη Γραμμή Άγκυρας στο $y=0$. Σύρε το διάγραμμα κατακόρυφα, μέχρι να διαβάζεις στο συντελεστή για το άνοιγμα το '2'. Να συγκρίνεις τα παλιά με τα νέα σημεία. Τι έχει αλλάξει; Τι έχει παραμείνει το ίδιο;
2. α) Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον πίνακα τιμών: Πώς θα αλλάξει κάθε σημείο; Στη συνέχεια στείλε τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας'. β) Ήταν σωστή η πρόβλεψη σου; γ) Ποια είναι η επίδραση ενός ανοίγματος με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
3. Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον τύπο της $y = \text{abs}(x)$. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου χρησιμοποιώντας είτε το παράθυρο 'Γράφημα' είτε το παράθυρο Πίνακας. Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
4. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία για μια κατακόρυφη αυξομείωση με συντελεστή το $\frac{1}{2}$ (γνωστό και ως συρρίκνωση). Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το $\frac{1}{2}$ στις τιμές του πίνακα; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στον τύπο της συνάρτησης;
5. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία τώρα για μια οριζόντια αυξομείωση.
 - α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
 - β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στις τιμές του πίνακα;
 - γ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
 - δ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στον τύπο της συνάρτησης;

Δ' Μέρος: Πρόβλεψη γραφημάτων από τους τύπους των συναρτήσεων

1. Να προβλέψεις τη μορφή της γραφικής παράστασης του $y = \text{abs}(2x+8)$. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, δημιουργώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποιες είναι οι μεταφορές και/ή οι αυξομειώσεις που σχετίζονται με αυτή την συνάρτηση; Να σχεδιάσεις την $y = 2\text{abs}(x+4)$. Ποια είναι η σχέση της με τη γραφική παράσταση της $y = \text{abs}(2x+8)$;
2. Τι μπορείς να πεις για τη θέση του κατώτερου σημείου και την κλίση των κλάδων στη γραφική παράσταση της $y = A\text{abs}(Bx+\Gamma) + \Delta$;
3. Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε χαρτί και έλεγξε τα σχέδιά σου δημιουργώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα με το Function Probe. Να αναφέρεις τους μετασχηματισμούς (κατακόρυφη ή οριζόντια μετατόπιση, κατακόρυφη ή οριζόντια αυξομείωση, συμμετρική) που μπορούν να πραγματοποιηθούν στην $y = \text{abs}(x)$, για να προκύψουν τα νέα διαγράμματα. Έλεγξέ το στο Function Probe.

$$y = \text{abs}(x)-5$$

$$y = -2\text{abs}(x)-5$$

$$y = \text{abs}(x+8)$$

$$y = \text{abs}(2x+8)$$

$$y = -\text{abs}(2x + 8)$$

$$y = -2\text{abs}(2x + 8)-5$$

Ε' Μέρος: Περιγραφή μετασχηματισμών από τις γραφικές αναπαραστάσεις τους.

Για κάθε διάγραμμα της επόμενης σελίδας;

- i. Να αναφέρεις με ποιον τρόπο η γραφική παράσταση της $y=\text{abs}(x)$ μετασχηματίστηκε στο δοθέν διάγραμμα.
- ii. Να γράψεις τον τύπο της συνάρτησης, στην οποία αντιστοιχεί το διάγραμμα χρησιμοποιώντας το Function Probe, για να ελέγξεις την απάντησή σου.

Ενδεικτικές απαντήσεις:

Διάγραμμα 1 Απάντηση: $y=\text{abs}x+4$

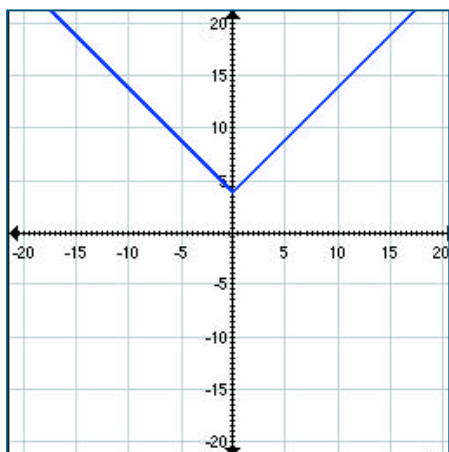
Διάγραμμα 2 Απάντηση: $y=\text{abs}(x+5)$

Διάγραμμα 3 Απάντηση: $y= 1,5(\text{abs}(x)+5)$

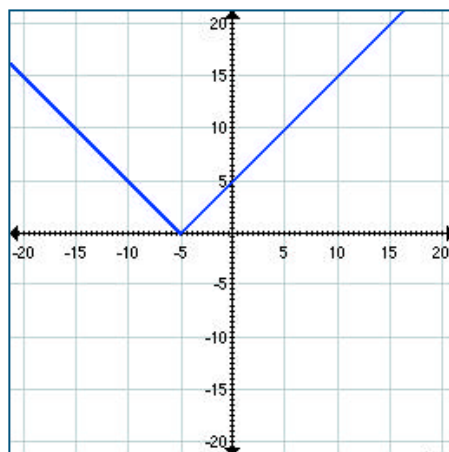
Διάγραμμα 4 Απάντηση: $y= 2\text{abs}(x-7)$

Διάγραμμα 5 Απάντηση: $y= -\text{abs}(x)+10$

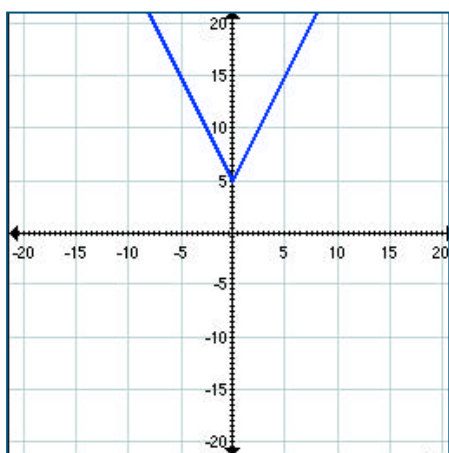
Διάγραμμα 6 Απάντηση: $y=\text{abs}(x+5,23)-10,58$



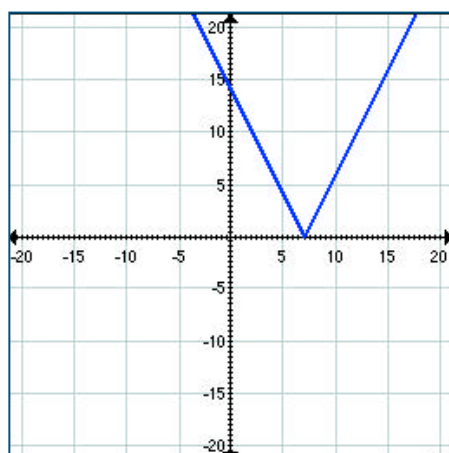
διάγραμμα 1



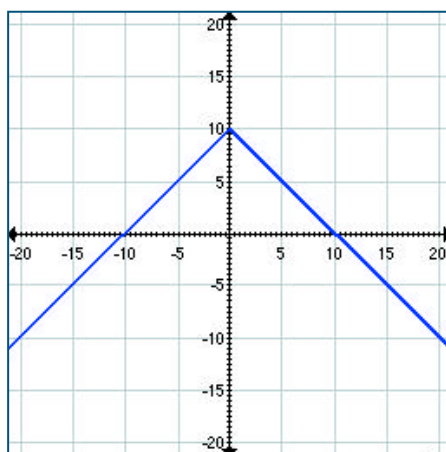
διάγραμμα 2



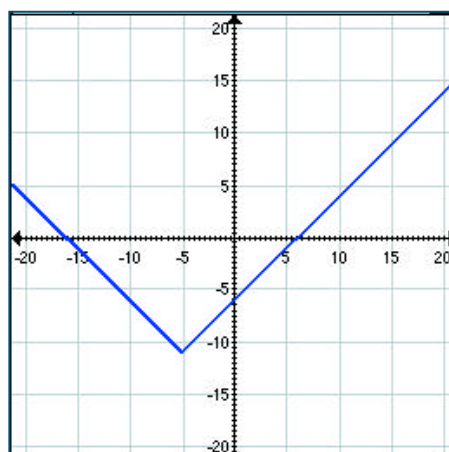
διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5



διάγραμμα 6