

4. Το ταξίδι

Σύντομη Περιγραφή

Για την πραγματοποίηση ενός ταξιδιού διάρκειας το πολύ μιας εβδομάδας προτείνονται δύο διαφορετικές προσφορές χρηματοδότησης. Το πρόβλημα αφορά στη διερεύνηση και εύρεση της οικονομικά πιο συμφέρουσας προσφοράς ανάλογα με την τελική διάρκεια του ταξιδιού.

Τα συνολικά κόστη του ταξιδιού και στις δύο προσφορές είναι ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού. Έτσι η διερεύνηση της συμφέρουσας λύσης έγκειται στη μελέτη δύο διαφορετικών τύπων γραμμικών συναρτήσεων της μορφής $y=ax$ και $y=ax+\beta$.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Μπορεί να διδαχθεί στη Γ' Γυμνασίου καθώς και στην Α' Λυκείου στο κεφάλαιο των γραμμικών συναρτήσεων $y=ax+\beta$. Το πρόβλημα στοχεύει στο να παραστήσουν τη μεταβολή δύο ποσοτήτων σε ένα πρόβλημα της καθημερινής ζωής (διάρκεια ταξιδιού και κόστος) με τη γραμμική συνάρτηση.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3-4 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

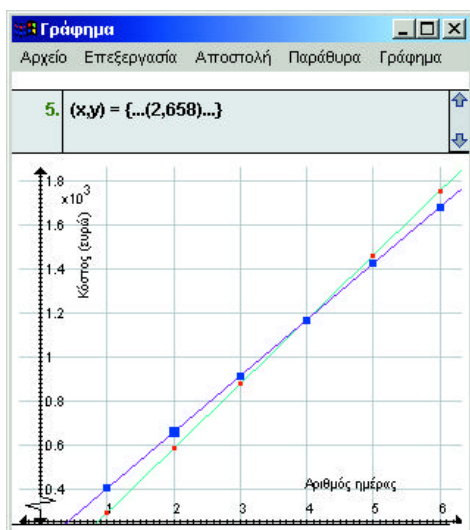
Οι μαθητές:

- > Να εκφράζουν τη μεταβολή δύο ποσοτήτων σε αλγεβρικό τύπο της μορφής $y=ax+\beta$.
- > Να λύνουν γραφικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων α' βαθμού.
- > Να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται τις επιπτώσεις της αλλαγής της κλίμακας στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

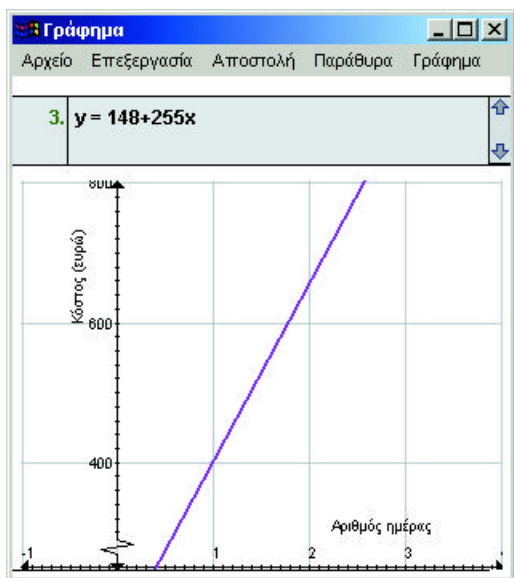
Παρατηρήσεις

1. Στο ερώτημα 1 προτείνεται οι μαθητές να εκτελούν τις πράξεις τους στην 'Αριθμομηχανή'.
2. Στο ερώτημα 2 προτείνεται οι μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη τούς υπολογισμούς τους στην 'Αριθμομηχανή', να κατασκευάσουν ένα κουμπί που θα παριστάνει το κόστος σε συνάρτηση με τον αριθμό των ημερών.
3. Στο ερώτημα 3 οι μαθητές πρέπει να λάβουν υπόψη τους το κουμπί που δημιούργησαν στην 'Αριθμομηχανή' και να το χρησιμοποιήσουν, για να δημιουργήσουν μια εξαρτημένη στήλη στο παράθυρο 'Πίνακας' με βάση το κουμπί αυτό. Έτσι, στη μια στήλη θα εισαγάγουν τον αριθμό των ημερών από το 1-7 και στην εξαρτημένη θα χρησιμοποιήσουν τον τύπο που δημιούργησαν για τον υπολογισμό του κέρδους, ώστε να γεμίσει αυτόματα.
4. Το γράφημα κατασκευάζεται με αποστολή σημείων από τον 'Πίνακα' στο 'Γράφημα'. Στο ερώτημα 4 ζ) να γίνει συζήτηση στην τάξη για το ότι η αλλαγή κλίμακας έχει επιπτώσεις στο πώς 'φαίνεται' η γραφική παράσταση. Εκεί στηρίζεται πολλές φορές η ψεύτικη εντύπωση που δημιουργείται από τα διαγράμματα, τα οποία παριστάνουν τα κέρδη μιας εταιρείας. Επιλέγεται τέτοια κλίμακα που να δείχνει πάντα ότι η εταιρεία έχει κέρδη (το διάγραμμα των κερδών δηλαδή είναι αύξουσα συνάρτηση). (Βλέπε εικόνα 2 και εικόνα 3.)

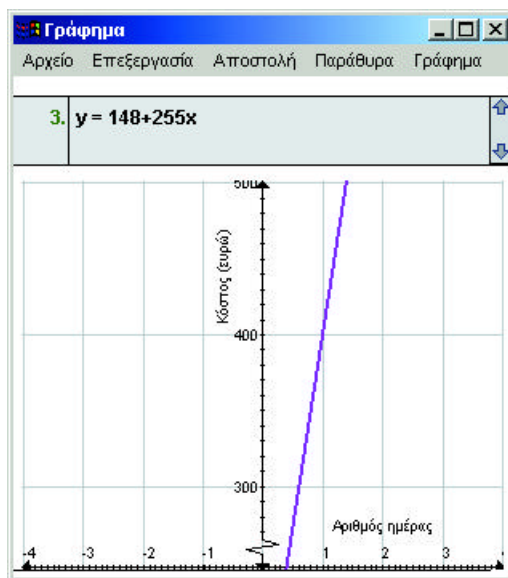
5. Η ίδια διερεύνηση γίνεται και στη Β' Πρόταση. Στο ερώτημα 4 της Β' Πρότασης ζητείται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν κατάλληλα τη γραφική παράσταση με βάση τα δεδομένα του προβλήματος (βλέπε εικόνα 1). Για να ενώσουν τα σημεία θα χρησιμοποιήσουν την εντολή 'Σύνδεση σημείων' του μενού 'Γράφημα'.
6. Στο ερώτημα 5 του Β' μέρους, αφού οι μαθητές ελέγξουν γραφικά την αλήθεια της εικασίας, να γίνει και η αλγεβρική της απόδειξη βρίσκοντας τη συναλήθευση των δύο τύπων.



εικόνα 1



εικόνα 2



εικόνα 3

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Τα οχτώ μέλη μιας αρχαιολογικής λέσχης σχεδιάζουν ένα ταξίδι μιας εβδομάδας στην Αρχαία Ολυμπία, προκειμένου να επισκεφτούν αρχαία μνημεία. Δεδομένου ότι η λέσχη έχει περιορισμένες δυνατότητες χρηματοδότησης, τα μέλη κάνουν έναν προϋπολογισμό με βάση δύο προσφορές.

Α' Προσφορά

Μπορούν να νοικιάσουν δύο μικρά αυτοκίνητα με ένα ειδικό πακέτο προσφοράς για μια εβδομάδα ή λιγότερο. Για να ισχύσει η ειδική προσφορά, θα πρέπει να δώσουν 148 ευρώ παραλαμβάνοντας το κάθε αυτοκίνητο. Η βενζίνη και τα λάδια θα κοστίζουν 15 ευρώ την ημέρα και για τα δύο μικρά αυτοκίνητα. Κατά τα άλλα, θα ξοδεύουν 30 ευρώ το άτομο την ημέρα για φαγητό σε εστιατόρια και για τις διανυκτερεύσεις τους.

1. Πόσα θα έχει ξοδέψει η λέσχη μετά από μια ημέρα (για διανυκτέρευση, φαγητό, βενζίνη, λάδια και ενοίκιο των αυτοκινήτων); Μετά από 5, 6, 7 ημέρες; Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα κάνοντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς στην 'Αριθμομηχανή':

Απάντηση: Την πρώτη ημέρα η λέσχη θα ξοδέψει 403 ευρώ.

Διάρκεια ταξιδιού (Ημέρες)	Έξοδα (ευρώ)
5η	1423
6η	1678
7η	1933

2. Κατασκεύασε στην 'Αριθμομηχανή' ένα κουμπί, το οποίο θα υπολογίζει το συνολικό κόστος της εκδρομής ανάλογα με τον αριθμό των ημερών του ταξιδιού.

Απάντηση: Ο τύπος του κουμπιού είναι $y=148+255x$.

3. Κατασκεύασε έναν πίνακα που να δείχνει το αθροιστικό συνολικό κόστος ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού (δηλαδή τον αριθμό των ημερών του ταξιδιού). Σκέψου πώς θα τον δημιουργήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο που κατασκεύασες και τη δυνατότητα που σου δίνει το πρόγραμμα για κατασκευή εξαρτημένων στηλών.
4. Η ταμίας της λέσχης ζητάει να της δοθεί ένα διάγραμμα στο Function Probe, από το οποίο θα μπορεί να διαβάζει το συνολικό κόστος ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού. Βρες έναν τρόπο να κάνεις αυτό το διάγραμμα αξιοποιώντας τις στήλες του 'Πίνακα' που έχεις κατασκευάσει. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη δυνατότητα της 'Αριθμομηχανής' για αποστολή δεδομένων στα άλλα παράθυρα του λογισμικού. Καθώς το κατασκευάζεις, να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:
 - α) Τι αντιπροσωπεύει κάθε άξονας;
 - β) Τι κλίμακα χρησιμοποιείς σε κάθε άξονα;
 - γ) Είναι το διάγραμμά σου μια συνεχής γραμμή; Διακριτά σημεία; Κάτι άλλο; Γιατί;
 - δ) Πώς εισαγάγεις τα δεδομένα σου στο διάγραμμα (με τύπο, με κουμπί της 'Αριθμομηχανής', με το μενού 'Αποστολή' του παραθύρου 'Πίνακας');
 - ε) Να γράψεις τον κατάλληλο τύπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία αυτά.
 - ζ) Αν άλλαζες την κλίμακα του x (διπλασίαζες τη μονάδα μέτρησης), τι θα παρατηρούσες στη γραφική παράσταση;

Β' Προσφορά

Ενώσω η ταμίας καταστρώνει τον αρχικό αυτό προϋπολογισμό, κάποιο άλλο μέλος κάνει μια νέα προσφορά, η οποία φαίνεται πιο διασκεδαστική και ενδεχομένως φθηνότερη: Μπορούν να νοικιάσουν στην τιμή των 80 ευρώ την ημέρα ένα πουλμανάκι και για τους οχτώ, το οποίο έχει ένα αρκετά μεγάλο ψυγείο. Το κόστος για το πουλμαν θα αφαιρείται αυτόματα στο τέλος κάθε ημέρας, από τον τραπεζικό λογαριασμό της λέσχης. Η βενζίνη και τα λάδια θα κοστίζουν 20 ευρώ την ημέρα. Όμως, επειδή θα μπορούν να ετοιμάζουν φαγητό και να το κρατάνε στο ψυγείο του πουλμαν, τα έξοδα της ημέρας για φαγητό και για διανυκτέρευση θα είναι μόνο 24 ευρώ το άτομο.

1. Αν νοικιάσουν το πουλμαν, πόσο θα κοστίζει στη λέσχη για μια ημέρα (για διανυκτερεύσεις, φαγητό, βενζίνη, λάδια και ενοίκιο του πουλμαν); Πόσα θα έχουν πληρώσει μετά από πέντε ημέρες; Χρησιμοποίησε την 'Αριθμομηχανή' για τους υπολογισμούς σου.
Απάντηση: Η λέσχη θα ξοδέψει 292 ευρώ την πρώτη ημέρα για το πουλμαν. Την πέμπτη ημέρα θα έχει ξοδέψει 1460 ευρώ.
2. Κατάστρωσε έναν πίνακα που να παρουσιάζει το αθροιστικό συνολικό κόστος για κάθε μέρα του ταξιδιού ανάλογα με τη διάρκειά του, αν νοικιάσουν το πουλμαν. Δούλεψε σε αυτό το σημείο, όπως και στην Α' Προσφορά.
3. Η ταμίας σου επιστρέφει το αρχικό σου διάγραμμα και σου ζητάει να προσθέσεις σε αυτό τα στοιχεία για το αθροιστικό κόστος της ενοικίασης του πουλμαν σύμφωνα με την Β' Προσφορά. Να γράψεις τον κατάλληλο τύπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία αυτά.
Απάντηση: Ο τύπος είναι $y = 192x$.
4. Ποιο είναι το οικονομικότερο σχέδιο για το ταξίδι της μιας εβδομάδας; Πώς μπορεί η ταμίας να το καταλάβει, κοιτώντας το διάγραμμα; Εσύ τι θα νοίκιαζες, τα δύο μικρά αυτοκίνητα ή το πουλμαν; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.
Απάντηση: Για το ταξίδι μιας εβδομάδας συμφέρει η Α' Προσφορά.
5. Κάποιος θέτει την ιδέα ότι σε κάποια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του ταξιδιού τα αθροιστικά έξοδα που αντιστοιχούν στις δύο προσφορές ενοικιάσεων, μπορεί να είναι ίδια. Πιστεύεις ότι αυτό αληθεύει; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου, χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Γράφημα' του Function Probe και να το αποδείξεις αλγεβρικά στο τετράδιό σου.
Απάντηση: Η εικασία αυτή αληθεύει σε περίπτωση που το ταξίδι διαρκεί 4 ημέρες.