

## Ομάδα Β: Εκθετική / Λογαριθμική Συνάρτηση

### 5. Ο πολλαπλασιασμός των Βακτηριδίων

#### Σύντομη Περιγραφή

Οι μαθητές καλούνται να παίξουν το ρόλο ενός βιολόγου που ενδιαφέρεται να υπολογίσει τον πληθυσμό ενός νέου είδους βακτηριδίων, τα οποία υπάρχουν σε μια καλλιέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο, έχοντας παρατηρήσει ότι ο ρυθμός αύξησής τους είναι σταθερός.

Ο πληθυσμός των βακτηριδίων ακολουθεί το νόμο της εκθετικής μεταβολής, εφόσον ο ρυθμός αύξησης των βακτηριδίων είναι σταθερός. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τον τύπο αυτό, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουν, για να υπολογίσουν τον πληθυσμό των βακτηριδίων.

#### Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί μια κλασική εφαρμογή του νόμου της εκθετικής μεταβολής που διδάσκεται στη Β΄ Λυκείου. Μπορεί να δοθεί στους μαθητές σαν εφαρμογή και περαιτέρω διερεύνηση του εκθετικού νόμου για διαφορετικές τιμές του ρυθμού αύξησης ενός πληθυσμού.

**Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας:** 3 διδακτικές ώρες

#### Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να εφαρμόζουν το νόμο της εκθετικής μεταβολής σε πραγματικές καταστάσεις.
- > Να συνδέσουν τον πληθυσμό των βακτηριδίων με το ρυθμό αύξησής τους.
- > Να δουν τι επιπτώσεις έχουν στη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης οι αλλαγές του ρυθμού αύξησης ενός πληθυσμού.
- > Να προσεγγίζουν τη λύση ενός προβλήματος από τη γραφική παράσταση και να επαληθεύουν τη λύση αυτή από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.
- > Να διαπιστώσουν την αναδρομικότητα του εκθετικού νόμου.

#### Παρατηρήσεις

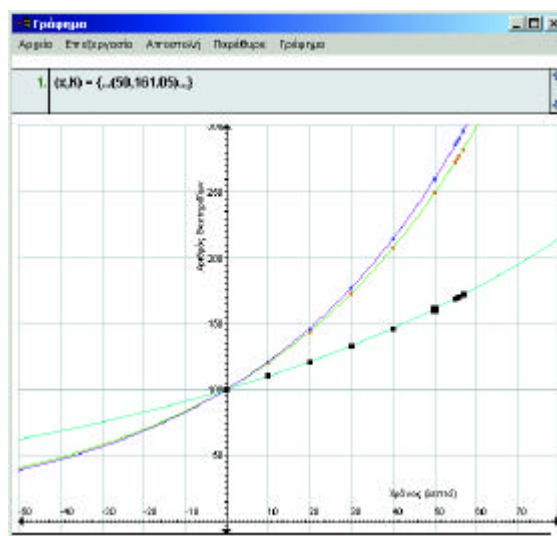
1. Στο ερώτημα 1 οι μαθητές θα απαντήσουν στο τετράδιό τους βοηθούμενοι στις πράξεις τους από την 'Αριθμομηχανή'.
2. Στο ερώτημα 2 προτείνεται να γράφουν οι μαθητές στη δεύτερη στήλη του πίνακα και τη διαδικασία των αριθμητικών πράξεων που τους οδηγεί στο αποτέλεσμα, έτσι ώστε να παρατηρήσουν την αναδρομικότητα του εκθετικού νόμου.
3. Στο ερώτημα 3 προτείνεται στους μαθητές να δημιουργήσουν τον πίνακα του ερωτήματος 2 (βλέπε εικόνα 1) στο παράθυρο 'Πίνακας' του λογισμικού Function Probe, έτσι ώστε να σταλούν τα σημεία στο παράθυρο 'Γράφημα'.
4. Στο ερώτημα 4, για να είναι ορατά τα σημεία στη γραφική παράσταση να χρησιμοποιηθεί η εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' στο μενού 'Γράφημα'.
5. Στο ερώτημα 5 πρέπει να δοθεί προσοχή στο γεγονός ότι σαν μονάδα χρόνου παίρνουμε τα 10

λεπτά και όχι το ένα λεπτό. Άρα ο τύπος που συνδέει τον αριθμό βακτηριδίων στη μονάδα του χρόνου γίνεται  $K=100(1+10/100)^{x/10}$ .

6. Στο ερώτημα 6, για να φαίνονται όλα τα σημεία, πρέπει να γίνει κατάλληλα η αρίθμηση των αξόνων. Προτείνεται οι μαθητές να εξηγήσουν γιατί η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία που προϋπήρχαν (βλέπε εικόνα 2).
7. Στο ερώτημα 7 καλούνται οι μαθητές να βρουν την απάντηση στο ερώτημα από τη γραφική παράσταση και μετά να την επαληθεύσουν από τον πίνακα. Επιλέγουν το εικονίδιο δείκτη σημείου για να δουν τις συντεταγμένες του σημείου. Με τον τρόπο αυτό συνδέουν τις δυο αναπαραστάσεις μεταξύ τους και κατανοούν ότι η γραφική επίλυση είναι προσεγγιστική, ενώ η αλγεβρική ακριβής.
8. Στο ερώτημα 8 πρέπει οι μαθητές να καταλάβουν τι αλλάζει στον τύπο που υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων. Αλλάζει η μονάδα του χρόνου, που αντί για 10 λεπτά γίνεται 5 (ο τύπος γίνεται  $M=100(1+10/100)^{x/5}$ ). Η γραφική παράσταση του νέου τύπου έχει πιο απότομη κλίση, διότι ο εκθέτης έχει αυξηθεί.
9. Στο ερώτημα 10 οι μαθητές καλούνται να τροποποιήσουν τον αρχικό τύπο  $K=100(1+10/100)^{x/10}$  σύμφωνα με το νέο ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού. Ένα στιγμιότυπο από τις τελικές οθόνες των παραθύρων 'Πίνακας' και 'Γράφημα' δίνεται στα παρακάτω σχήματα:

x	Αριθμός Βακτηριδίων	$K=100(1+10/100)^{x/10}$ Υπολογισμός Βακτηριδίων	$M=100(1+10/100)^{x/5}$ Υπολογισμός Βακτηριδίων	$N=100(1+20/100)^{x/10}$ Υπολογισμός Βακτηριδίων
0	100	100	100	100
10	110	110	121	120
20	121	121	146.41	144
30	133	133.1	177.16	172.8
40	146	146.41	214.36	207.36
50	161	161.05	259.37	248.83
55		168.91	285.31	272.68
55.5		169.72	288.04	275.08
56		170.53	290.8	277.6
57		172.16	296.4	282.7

εικόνα 1



εικόνα 2

### Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Ένας βιολόγος ενδιαφέρεται να μελετήσει ένα νέο είδος βακτηριδίων. Όταν παρατηρεί για πρώτη φορά με το μικροσκόπιό του την καλλιέργεια των βακτηριδίων, μετράει 100 βακτηρίδια. Με προσεχτική και στενή παρακολούθηση της καλλιέργειας παρατηρεί ότι ο αριθμός των βακτηριδίων αυξάνει κατά 10% κάθε 10 λεπτά.

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο ‘Αριθμομηχανή’ για τις πράξεις σου.

1. Ποιος είναι ο αριθμός των βακτηριδίων τα πρώτα 10 λεπτά;  
*Απάντηση: Ο αριθμός των βακτηριδίων είναι  $100 + 0,1 * 100 = 110$*
2. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Σαν χρόνο 0 θεώρησε τη χρονική στιγμή που ο βιολόγος παρατήρησε για πρώτη φορά τα βακτηρίδια.

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός βακτηρίων
0	100
10	110
20	121
30	133
40	146
50	161

3. Δημιούργησε έναν πίνακα στο παράθυρο ‘Πίνακας’, που να περιέχει δυο στήλες. Στην πρώτη, που θα την ονομάσεις ‘Χρόνος’, να εισαγάγεις τον αριθμό των λεπτών, ξεκινώντας από το 0 μέχρι το 50 με βήμα 10 και στη δεύτερη στήλη, που θα την ονομάσεις ‘Αριθμός Βακτηριδίων’, να εισαγάγεις τον αριθμό των βακτηριδίων στον αντίστοιχο χρόνο με βάση τον πίνακα που συμπλήρωσες στο προηγούμενο ερώτημα.
4. Στείλε τις δύο αυτές στήλες στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Αν τα σημεία δεν φαίνονται, διόρθωσε το πρόβλημα, ώστε να είναι ορατά. Τι παρατηρείς; Τι είδους μεταβολή ακολουθούν οι δύο μεταβλητές (γραμμική, εκθετική, λογαριθμική κτλ);
5. Προσπάθησε να δημιουργήσεις μια τρίτη στήλη στο παράθυρο ‘Πίνακας’ που να τη ονομάσεις ‘Υπολογισμός Βακτηριδίων’ και η οποία να γεμίζει με βάση τον τύπο που νομίζεις ότι συνδέει το χρόνο (ανά 10 λεπτά) και τον αριθμό των βακτηριδίων.  
*Απάντηση:  $K = 100(1 + 10/100)^{(x/10)}$*
6. Πληκτρολόγησε τον τύπο αυτό στο παράθυρο ‘Γράφημα’.
7. Με βάση τη γραφική παράσταση, μετά από πόση ώρα υπήρχαν στην καλλιέργεια λιγότερα από 200 βακτηρίδια; Επίλεξε το κατάλληλο εργαλείο (Εργαλείο δείκτη σημείου) για να δεις τις συντεταγμένες του σημείου. Επαλήθευσέ το και στο παράθυρο ‘Πίνακας’.
8. Αργότερα, ο βιολόγος ανακάλυψε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 5 λεπτά και όχι κάθε 10. Εντούτοις, τα βακτηρίδια εξακολουθούν να αυξάνονται κατά 10% κάθε 10 λεπτά. Να δημιουργήσεις στο παράθυρο ‘Πίνακας’ μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;  
*Απάντηση:  $K = 100(1 + 10/100)^{(x/5)}$*

9. Στο παράθυρο 'Γράφημα' κάνε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείς σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;
10. Αν, αντίθετα με τα προηγούμενα, ο βιολόγος ανακάλυπτε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 10 λεπτά, αλλά παράγονται 20% βακτηρίδια κάθε 10 λεπτά, να δημιουργήσεις στο παράθυρο 'Πίνακας' μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;  
*Απάντηση:  $K=100(1+20/100)^{x/10}$*
11. Στο παράθυρο 'Γράφημα' κάνε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείς σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;