

6. Η αύξηση του πληθυσμού

Σύντομη Περιγραφή

Οι μαθητές καλούνται, με βάση τα δεδομένα που τους δίνονται για τον παγκόσμιο πληθυσμό και τον πληθυσμό της Ασίας, να μελετήσουν το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Γης και της Ασίας αντίστοιχα, και να προβλέψουν την αύξηση του πληθυσμού τα επόμενα χρόνια.

Οι μαθητές σε αυτό το πρόβλημα δουλεύουν μόνο στο παράθυρο 'Πίνακας', στον οποίο δημιουργούν διάφορες εξαρτημένες στήλες τις οποίες συγκρίνουν μεταξύ τους, για να οδηγηθούν στις ιδιότητες του εκθετικού νόμου.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το πρόβλημα αυτό προτείνεται να διδαχθεί σαν εισαγωγή στη διδασκαλία του νόμου της εκθετικής μεταβολής. Είναι έτσι σχεδιασμένο, ώστε να εστιάζει στην κατανόηση του νόμου της εκθετικής μεταβολής, που είναι ο εξής: ένα ποσό μεταβάλλεται εκθετικά, όταν αυξάνεται ή ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό. Η όλη διερεύνηση του προβλήματος στοχεύει στο να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαφορά της εκθετικής μεταβολής από άλλες μεταβολές, όπως αύξηση ή μείωση κατά σταθερή ποσότητα.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να κατανοήσουν τι σημαίνει ότι ένα μέγεθος αυξάνεται εκθετικά.
- > Να διακρίνουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο μιας εκθετικής συνάρτησης, όταν αλλάζει μόνο η τιμή του αρχικού πληθυσμού.
- > Να κατασκευάζουν τον τύπο που εκφράζει την εκθετική μεταβολή ενός μεγέθους (πληθυσμός).
- > Να κατανοήσουν τη διαφορά μεταξύ του ρυθμού αύξησης ενός μεγέθους και του ποσού της αύξησης.
- > Να παρατηρήσουν ότι αν δυο μεταβλητές μεταβάλλονται εκθετικά με τον ίδιο ρυθμό, τότε και οι λόγοι των τιμών τους θα είναι ίδιοι.

Παρατηρήσεις

1. Να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη διαφορά ανάμεσα στο ρυθμό αύξησης του πληθυσμού και στο ποσό της αύξησής τους, που γίνεται φανερό με τις στήλες 'Λόγος' και 'Διαφορά' του παραθύρου 'Πίνακας' (βλέπε εικόνα 1). Έτσι, ενώ ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι σταθερός (και ίσος με 1.02), το ποσό αύξησης δεν είναι.
2. Στο ερώτημα 3 να δοθεί έμφαση στην αναδρομικότητα του τύπου της εκθετικής μεταβολής. Η επόμενη τιμή βρίσκεται από την προηγούμενη πολλαπλασιασμένη κατά μια σταθερή ποσότητα. Προτείνεται να γίνει χρήση της δυνατότητας να υπολογίζεται η τιμή ενός κελιού με βάση την τιμή του προηγούμενου κελιού.

3. Στο ερώτημα 6 ουσιαστικά οι μαθητές καλούνται να βρουν τον τύπο που συνδέει τον πληθυσμό της Γης με το χρόνο. Θεωρείται το 1984 σαν έτος 0 το 1985 σαν 1 κτλ., για να βοηθηθούν οι μαθητές στην κατασκευή του τύπου (ο τύπος είναι: $K=4766000000(1.02)^x$).
4. Στο ερώτημα 7 ζητείται το ανάλογο για τον πληθυσμό της Ασίας.
5. Στο ερώτημα 8 ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν τους δύο πληθυσμούς και να διαπιστώσουν ότι οι λόγοι τους είναι ίσοι (βλέπε εικόνα 2). Η σύγκριση θα γίνει με τη δημιουργία μιας νέας στήλης που θα υπολογίζει το λόγο της στήλης του παγκόσμιου πληθυσμού προς τη στήλη του πληθυσμού της Ασίας. Προτείνεται το αποτέλεσμα να αποδειχθεί και αλγεβρικά με βάση τους τύπους των δυο πληθυσμών.

a	b/a	Δα	c	b/c
Πληθυσμός Γης	Λόγος	Διαφορά	Πληθυσμός Ασίας	Λόγος
4.766e+9	> 1.02	> 95320000	2.785e+9	> 1.02
4.86132e+9	> 1.02	> 97226400	2.8407e+9	> 1.02
4.9585464e+9	> 1.02	> 99170920	2.89751e+9	> 1.02
5.05771732e+9	> 1.02	> 101154350	2.95546428e+9	> 1.02
5.15887167e+9	> 1.02	> 103177440	3.01457357e+9	> 1.02
5.26204911e+9	> 1.02	> 105240980	3.07486504e+9	> 1.02
5.36729009e+9	> 1.02	> 105240980	3.13633234e+9	> 1.02

εικόνα 1

x	$K=4766000000*((1.02)^x)$	$M=2785000000*((1.02)^x)$	$L=K/M$
Αριθμός ετών μετά το 1984	Υπολογισμός του πληθυσμού της Γης ως το 2000	Υπολογισμός του πληθυσμού της Ασίας ως το 2000	Σύγκριση των δύο πληθυσμών
0	4.766e+9	2.785e+9	1.71
1	4.86132e+9	2.8407e+9	1.71
2	4.9585464e+9	2.897514e+9	1.71
3	5.05771733e+9	2.95546428e+9	1.71
4	5.15887167e+9	3.01457357e+9	1.71
5	5.26204911e+9	3.07486504e+9	1.71
6	5.36729009e+9	3.13636234e+9	1.71
7	5.47463589e+9	3.19908958e+9	1.71
8	5.58412861e+9	3.26307138e+9	1.71
9	5.69581118e+9	3.3283328e+9	1.71
10	5.80972741e+9	3.39489946e+9	1.71
11	5.92592195e+9	3.46279745e+9	1.71
12	6.04444039e+9	3.5320534e+9	1.71
13	6.1653292e+9	3.60269447e+9	1.71
14	6.28863578e+9	3.67474836e+9	1.71
15	6.4144085e+9	3.74824332e+9	1.71
16	6.54269667e+9	3.82320819e+9	1.71

εικόνα 2

Το πρόβλημα επιδέχεται επεκτάσεις χρησιμοποιώντας και το παράθυρο 'Γράφημα' αλλά δεν προτείνεται, διότι χρησιμοποιούνται πολύ μεγάλα νούμερα και οι γραφικές παραστάσεις των πληθυσμών γης και Ασίας δεν παριστάνονται ικανοποιητικά. Η δραστηριότητα 20 καλύπτει αυτήν ακριβώς την έλλειψη, προτρέποντας τους μαθητές να εργαστούν στο παράθυρο 'Γράφημα' μετασχηματίζοντας κατάλληλα διάφορες γραφικές παραστάσεις της εκθετικής μεταβολής.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Στην έκδοση ενός αμερικάνικου περιοδικού για το 1991 παρουσιάζονται τα ακόλουθα δεδομένα για τον παγκόσμιο πληθυσμό (σε δις) μέσα σε διάστημα 7 χρόνων (1984-1990):

Έτη	Παγκόσμιος πληθυσμός
1984	4,766
1985	4,86132
1986	4,9585464
1987	5,05771733
1988	5,15887167
1989	5,26204911
1990	5,36729009

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σου.

1. Άνοιξε το παράθυρο 'Πίνακας'. Σε μια στήλη βάλε τους πληθυσμούς που δίνονται πιο πάνω ανοίγοντάς την τόσο όσο να φαίνονται ολόκληροι οι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας την εντολή 'Διαφορά' στο μενού 'Πίνακας' βρες πόσο μεταβλήθηκε ο παγκόσμιος πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Συγκρίνοντας τις μεταβολές σε ποιο συμπέρασμα οδηγείσαι;
Απάντηση: Οι διαφορές αυξάνουν, αλλά όχι με σταθερό ρυθμό.
2. Χρησιμοποιώντας την εντολή 'Λόγος' στο μενού 'Πίνακας' βρες με ποιο ρυθμό αυξήθηκε ο πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Τι παρατηρείς;
Απάντηση: Ο λόγος είναι σταθερός και ίσος με 1,02.
3. Ποιος προβλέπεις να είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός το 1991; Να εξηγήσεις με ποιον τρόπο υπολόγισες την απάντησή σου και να τον αιτιολογήσεις.
*Απάντηση: Πληθυσμός = $5,36729009 * 1,02 = 5,4746358918$ δις.*

Το ίδιο περιοδικό εκδίδει ακόμα τα ακόλουθα στοιχεία για τον πληθυσμό της Ασίας την ίδια χρονική περίοδο:

Έτη	Πληθυσμός Ασίας
1984	2,785
1985	2,8407
1986	2,897514
1987	2,95546428
1988	3,01457357
1989	3,07486504
1990	3,13636234

4. Να χρησιμοποιήσεις την εντολή 'Λόγος' στο μενού 'Πίνακας', για να υπολογίσεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας, όπως έκανες για τον πληθυσμό της Ευρώπης. Να συγκρίνεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας με τον παγκόσμιο για τα χρόνια 1984-1990.

Απάντηση: Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Ασίας είναι ίδιος με αυτόν του παγκόσμιου πληθυσμού, δηλαδή 1,02.

5. Ποιος προβλέπεις να είναι ο πληθυσμός της Ασίας το 1991; Να εξηγήσεις με ποιο τρόπο χρησιμοποίησες το Function Probe, για να δώσεις την απάντησή σου.

*Απάντηση: Ο πληθυσμός θα είναι $3,13636234 * 1,02 = 3,19908958$ δισ.*

6. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Γης παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα δέκα χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακα σου δημιουργώντας άλλες δύο εξαρτημένες στήλες, όπου στην πρώτη στήλη θα εισαγάγεις τον αριθμό των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000, και στη δεύτερη στήλη θα εισαγάγεις έναν τύπο που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως 2000 συναρτήσει της πρώτης στήλης.

7. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Ασίας παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα δέκα χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακά σου δημιουργώντας άλλη μια εξαρτημένη στήλη που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως 2000 συναρτήσει του αριθμού των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000.

8. Με τα δεδομένα του έτους 1984, πόσες φορές μεγαλύτερος ήταν ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Με τις τιμές που υπολόγισες για το έτος 2000, πόσες φορές μεγαλύτερος θα είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Εξήγησε το αποτέλεσμα.

Απάντηση: Και για τα δύο έτη, ο λόγος των δύο πληθυσμών είναι σταθερός και ίσος με 1,71.