### Δραστηριότητα: Ο ΠΡΟΒΟΛΕΑΣ

**Διάρκεια της δραστηριότητας:** 1-2 διδακτικές ώρες

**Τάξη:** Β΄ Λυκείου

**Γνωστικό αντικείμενο:**

* Η τριγωνομετρική εφαπτομένη και η γραφική της παράσταση
* Περιοδική συνάρτηση και ιδιότητες της γραφικής παράστασης της τριγωνομετρικής εφαπτομένης

**Η κατάσταση προβλήματος**

Η βασική ιδέα της δραστηριότητας θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής:

**y**

**x**

**α**

Αν διαθέτουμε ένα μικρό φακό σε σταθερή απόσταση α από ένα απομακρυσμένο αντικείμενο, τότε μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος y του αντικειμένου, όταν είναι γνωστή η γωνία x του φακού ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

Τα μεγέθη που εμπλέκονται σε μια τέτοια μέτρηση, δηλαδή τα α, x και y, συνδέονται με τη σχέση y=α⋅εφx.

Γενικός στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να συνδέσουν την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης με προβλήματα που σχετίζονται με τη μέτρηση του ύψους ενός απομακρυσμένου αντικειμένου.

Η δραστηριότητα του περιστρεφόμενου προβολέα έχει σχεδιαστεί με την προοπτική να αποτελέσει συμπληρωματική δραστηριότητα αυτού του σταθερού προβολέα. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές θα συνδέσουν την έννοια της ομοιότητας των ορθογώνιων τριγώνων με την τριγωνομετρική εφαπτομένη. Η δραστηριότητα μπορεί να διεξαχθεί σε δύο διδακτικές ώρες.

**Φύλλο εργασίας**

Στο παρακάτω σχήμα ο προβολέας L φωτίζει το σημείο Α πάνω σε έναν τοίχο. Για να φωτίσει σε ένα σημείο που βρίσκεται σε διπλάσιο ύψος, θα πρέπει:

# L

**4m**

•A

**4m**

Α) Να διπλασιαστεί η γωνία.

Β) Να πλησιάσει ο προβολέας προς τον τοίχο.

Γ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 18ο.

Δ) Να αυξηθεί η γωνία κατά 40ο.

Επιχειρώντας να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα διαπιστώσουμε ότι δεν είναι και το ευκολότερο, αν δεν διαθέτουμε κάποια ιδιαίτερα εργαλεία, έστω και έναν υπολογιστή τσέπης. Στην παρακάτω δραστηριότητα θα διερευνήσουμε σε βάθος την κατάσταση προβλήματος που σχετίζεται με τον προβολέα, με τη βοήθεια μιας προσομοίωσής του.

Ανοίξτε το αρχείο proboleas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



α) Μία προσομοίωση του προβολέα ΣΠ, ο οποίος εστιάζει σε ένα ύψος OE=h. Ο προβολέας μπορεί και μετακινείται μπρος πίσω από το σημείο Σ και να περιστρέφεται γύρω από το σημείο Π.

β) Οι μετρήσεις του ύψους h (χωρίς μονάδες μέτρησης) και της γωνίας φ του προβολέα με τον οριζόντιο άξονα.

γ) Το κουμπί «Δυναμικό σημείο Δ», με το οποίο εμφανίζεται ένα σημείο Δ που οι συντεταγμένες του μεταβάλλονται, καθώς περιστρέφεται ο προβολέας.

δ) Τα κουμπιά βοήθειας τα οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε, καθώς προσπαθείτε να απαντήσετε στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

**Φύλλο εργασίας 1**

1. Ελέγξτε με τη βοήθεια της προσομοίωσης και των μετρήσεων αν τα ποσά «γωνία φ» και «ύψος h» είναι ανάλογα ή όχι.
2. Διερευνήστε ποια από τις απαντήσεις του αρχικού ερωτήματος είναι η σωστή.
3. Υπολογίστε στο τετράδιό σας το ύψος h με βάση τη γωνία φ και την απόσταση ΟΣ του προβολέα.
4. Με βάση την προηγούμενη άσκηση, πώς μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός κτηρίου, χρησιμοποιώντας έναν προβολέα όπως εκείνον που εμφανίζεται στην προσομοίωση;
5. Υποθέστε ότι ο προβολέας μπορεί να περιστρέφεται και προς τα κάτω, δηλαδή ότι το h είναι πλέον βάθος και όχι ύψος. Εστιάστε σε βάθος 4 μονάδων. Με ποιον τρόπο το λογισμικό συμβολίζει το βάθος και την προς τα κάτω περιστροφή του προβολέα;

**Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης**

Αρχικά ο διδάσκων θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές να διαπραγματευτούν την αρχική ερώτηση και κατόπιν να εκτελέσουν το πείραμα που περιγράφει το φύλλο εργασίας, εφόσον είναι δυνατόν, με ένα μικρό λέιζερ. Αυτό που αναμένεται να διαπιστώσουν οι μαθητές είναι ότι η σχέση γωνίας και ύψους δεν είναι γραμμική, οπότε δημιουργείται η αφόρμιση για διερεύνηση μέσω της προσομοίωσης.

* Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα περιστρέψουν τον προβολέα από το σημείο Π. Καλό θα είναι η μελέτη των μετρήσεων του ύψους και της γωνίας να μην γίνει με τυχαίες τιμές, αλλά, όσον αφορά στις τιμές της γωνίας, να έχουν συγκεκριμένη σχέση μεταξύ τους. Για παράδειγμα, μπορεί να επιλέξουν ως γωνία τις 10ο, να μετρήσουν το ύψος και στη συνέχεια να περιστρέψουν τον προβολέα στις 20ο, για να μελετήσουν τη μεταβολή του ύψους.
* Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα μετρήσουν την απόσταση ΟΣ και θα σύρουν το σημείο σε απόσταση 4 μονάδων από το Ο. Στη συνέχεια θα περιστρέψουν τον προβολέα, έως ότου το h πάρει την τιμή 4, οπότε και θα καταγράψουν την τιμή της γωνίας. Ακολούθως θα περιστρέψουν τον προβολέα, ώστε το h να γίνει 8, και θα καταγράψουν την τιμή της γωνίας. Συγκρίνοντας τις δύο τιμές της γωνίας, θα εντοπίσουν τη σωστή απάντηση.
* Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές, με τη βοήθεια του διδάσκοντα, θα χρησιμοποιήσουν την τριγωνομετρική εφαπτομένη, προκειμένου να υπολογίσουν το ύψος από τον τύπο .
* Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα διαπραγματευτούν μια διαδικασία, μέσω της οποίας θα αξιοποιήσουν τον εικονικό προβολέα. Η διαδικασία αυτή καλό θα είναι να καταγραφεί βήμα προς βήμα. Για παράδειγμα:

α) Μέτρηση της απόστασης από τον τοίχο

β) Περιστροφή έως ότου η ακτίνα φωτός φτάσει στην κορυφή του κτηρίου

γ) Μέτρηση της γωνίας και εφαρμογή του τύπου .

* Στόχος της πέμπτης άσκησης είναι να προετοιμάσει τους μαθητές για τις αρνητικές τιμές τόσο της γωνίας όσο και του ύψους, ώστε στη συνέχεια να αποδώσουν νόημα στην αρνητική περιοχή της γραφικής παράστασης που θα προκύψει.

**Φύλλο εργασίας 2**

Τώρα πλέον είναι ευκαιρία να δούμε ποια είναι η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τη γωνία φ με το ύψος h.

1. Εμφανίστε το σημείο Δ και μετρήστε τις συντεταγμένες του. Περιστρέψτε τον προβολέα και συγκρίνετε τις συντεταγμένες του Δ με τις μετρήσεις που προβάλλονται στην οθόνη. Τι παρατηρείτε;
2. Εμφανίστε το ίχνος του σημείου Δ και περιστρέψτε τον προβολέα. Ποια είναι η μορφή της καμπύλης που δημιουργείται; Ποια είναι η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι η καμπύλη που εμφανίστηκε;
3. Σύρετε το σημείο Σ, έως ότου η απόστασή του από το Ο γίνει 1. Επαναλάβετε την κατασκευή της γραφικής παράστασης. Ποια σχέση παριστάνεται τώρα με τη συγκεκριμένη καμπύλη;
4. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που αντιστοιχεί στη σχέση που βρήκατε με τη βοήθεια του λογισμικού. Τι σχέση έχει η καμπύλη που κατασκεύασε το ίχνος του Δ με τη γραφική παράσταση που κατασκεύασε το λογισμικό;
5. Είναι η συνάρτηση περιοδική; Ποια είναι η περίοδος; Είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση;
6. Μεταφέρετε το σημείο Σ σε απόσταση 2 μονάδων από το Ο και κατασκευάστε την καμπύλη του ίχνους του Δ. Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση εμφανίζεται στην οθόνη;

**Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης**

Πριν από την υλοποίηση της γραφικής παράστασης μέσω του λογισμικού, ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές τη μορφή που θα έχει η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει το ύψος με τη γωνίας. Οι μαθητές θα ισχυριστούν ότι η γραφική παράσταση πρέπει να είναι μία καμπύλη, αφού η σχέση δεν είναι γραμμική.

* Στην πρώτη άσκηση οι μαθητές θα εμφανίσουν το δυναμικό σημείο Δ με το αντίστοιχο κουμπί. Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε, αν το κρίνει εφικτό, να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι το δυναμικό σημείο. Στη συνέχει θα διαβάσουν την οδηγία για τις συντεταγμένες του σημείου και θα εμφανίσουν τις μετρήσεις των συντεταγμένων του Δ. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι συντεταγμένες του σημείου είναι η γωνία (σε ακτίνια) και το ύψος. Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα πρέπει να συζητήσει με τους μαθητές του το γεγονός ότι καθώς θα μεταβάλλεται η γωνία, το Δ θα διαγράψει τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τη γωνία με το ύψος.
* Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν την καμπύλη της σχέσης  και με τη βοήθεια του διδάσκοντα θα τη μετασχηματίσουν σε f(x)=(ΟΣ)⋅εφχ.
* Στόχος της τρίτης άσκησης είναι οι μαθητές να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = εφχ, αφού το μήκος του τμήματος ΟΣ είναι 1.
* Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  και θα διαπιστώσουν ότι συμπίπτει με την καμπύλη που έχει διαγράψει το σημείο Δ, όταν ΟΣ έχει μία τυχαία τιμή.
* Στην πέμπτη άσκηση ο διδάσκων θα διαπραγματευτεί με τους μαθητές το γεγονός ότι η γραφική παράσταση εμφανίζεται σε τμήματα, με στόχο να διατυπώσουν την άποψη ότι η συνάρτηση είναι περιοδική. Η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων θα οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση είναι περιττή. Ο διδάσκων θα ζητήσει από τους μαθητές να αποδείξουν με καθαρά αλγεβρικό τρόπο ότι η συνάρτηση είναι περιττή.
* Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές θα δημιουργήσουν την καμπύλη της συνάρτησης f(x) = 2εφχ με το ίχνος του σημείου Δ. Αυτό που θα μπορούσε να επισημανθεί είναι το γεγονός ότι σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση διαθέτει κατακόρυφη ασύμπτωτη, η οποία αποκτά και φυσικό νόημα, όταν ο προβολέας περιστραφεί κατά γωνία που πλησιάζει τις 90ο.