

### §3. Πρόσθεση ακεραίων

#### ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ

Αυτή η παράγραφος είναι μέρος μιας συλλογής δραστηριοτήτων και ασκήσεων με θέμα τους ακέραιους αριθμούς και τις πράξεις τους. Μπορείτε να βρείτε το σύνολο των παραγράφων αυτών στις διευθύνσεις:

- Πράξεις ακεραίων-1-Οι ακέραιοι αριθμοί – Η ευθεία των ακεραίων
- Πράξεις ακεραίων-2-Διάταξη και σύγκριση ακεραίων – Αντίθετοι αριθμοί - Η απόλυτη τιμή
- Πράξεις ακεραίων-3-Πρόσθεση ακεραίων
- Πράξεις ακεραίων-4-Αφαίρεση ακεραίων – Απαλοιφή παρενθέσεων
- Πράξεις ακεραίων-5-Πολλαπλασιασμός ακεραίων
- Πράξεις ακεραίων-6-Διαίρεση ακεραίων

#### Οδηγίες για την ενότητα «§3. Πρόσθεση ακεραίων»

Οι διδακτικοί στόχοι αυτής της παραγράφου είναι να προσθέτουν οι μαθητές ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας αρχικά μοντέλα – μεταφορές και στη συνέχεια να «κατασκευάσουν» τους ορισμούς της πρόσθεσης και να μπορούν να τους εφαρμόζουν. Τα εισαγωγικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται είναι οι θετικοί - αρνητικοί μετρητές (εδώ κάρτες) και η κίνηση στην αριθμογραμμή (από τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά).

Συνήθως οι αρνητικοί αριθμοί δεν έχουν την δική τους οντότητα αφού είναι οι αντίθετοι των θετικών αριθμών, ενώ η αφαίρεση είναι δευτερεύουσα πράξη αφού είναι η πρόσθεση του αντιθέτου. Στις θετικές – αρνητικές κάρτες, θετικοί και αρνητικοί αριθμοί έχουν ξεχωριστή υπόσταση ενώ πρόσθεση και αφαίρεση έχουν την ίδια αξία που μπορούμε να μεταβούμε ισοδύναμα από τη μια στην άλλη.

Η κίνηση σε αριθμογραμμή, είναι ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών και των πράξεων στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο Hans Freudenthal ονόμαζε αυτό το μοντέλο «εργαλείο ανώτερο κάθε επαίνου» και τη θεωρούσε ως το καταλληλότερο μέσο για τη διδασκαλία των αρνητικών αριθμών.

Αναλυτικότερα με τις δραστηριότητες:

**3.3** Οι μαθητές διαισθητικά απαντούν ότι μία κάρτα «+» και μία «-» αλληλοαναιρούνται και (γενικότερα: ίδιος αριθμός θετικών και αρνητικών καρτών) δίνουν άθροισμα 0. Μετά από αυτό εύκολα βρίσκουν το άθροισμα είτε ομόσημων είτε ετερόσημων καρτών. Για παράδειγμα αν μια ομάδα έχει 5 αρνητικές κάρτες και πάρει άλλες 4 αρνητικές τότε θα έχει -9 πόντους, ενώ αν έχει 4 θετικές και πάρει 7 αρνητικές θα έχει -3 πόντους.

**3.4-3.5** Εδώ οι μαθητές εισάγονται στην πρόσθεση ομόσημων αριθμών, πρώτα με τις κάρτες και μετά με την κίνηση στην αριθμογραμμή. Αναμένεται ότι θα βρουν εύκολα ότι το άθροισμα ομόσημων αριθμών διατηρεί το ίδιο πρόσημο. Στη συνέχεια, ίσως εκφράσουν απόψεις όπως «προσθέτουμε τους αριθμούς χωρίς το πρόσημο» που εύκολα μπορούν να οδηγηθούν με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού στον αντίστοιχο ορισμό. Η χρήση των μικροπειραμάτων θεωρούμε ότι μπορεί να υποστηρίξει σημαντικά στην εννοιολογική κατανόηση.

**3.6-3.7** Εδώ οι μαθητές εισάγονται στην πρόσθεση ετερόσημων αριθμών, όμοια με προηγούμενως. Θα συναντήσουν πιθανόν μεγαλύτερες δυσκολίες στη διατύπωση του κανόνα, αλλά προτείνεται να δώσει ο εκπαιδευτικός τον απαραίτητο χρόνο ώστε να γίνει διαπραγματεύση μέσα στην τάξη και να εξαχθεί ο ορισμός από τους μαθητές, με την κατάλληλη φυσικά καθοδήγηση του εκπαιδευτικού.

**3.13** Είναι μια καλή ευκαιρία για τον εκπαιδευτικό να μιλήσει για τη χρήση του αντιπαραδείγματος στα μαθηματικά και τον επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.

**3.17** Αυτή η δραστηριότητα είναι ο μετασχηματισμός της μεταφοράς στο σύστημα συντεταγμένων. Ο εκπαιδευτικός θα κρίνει αν πρέπει να τη διαπραγματευτούν οι μαθητές.

### **Γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο για τους ακέραιους αριθμούς και τις πράξεις τους**

Η ιστορία των Μαθηματικών έχει δείξει ότι η εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας σε ένα ήδη διαμορφωμένο εννοιολογικό πλαίσιο συνοδεύεται συχνά από σημαντικές δυσκολίες και αντιπαραθέσεις. Δεδομένου ότι συχνά οι ίδιες δυσκολίες που αντιμετώπισαν ιστορικά οι μαθηματικοί στην υποδοχή μιας νέας έννοιας συναντώνται και σήμερα στις τάξεις των Μαθηματικών, οι ερευνητές έχουν προτείνει διάφορους τρόπους για την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών και τις πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών. Οι σύγχρονες έρευνες, ακολουθώντας την ιστορική εξέλιξη των αρνητικών, προτείνουν διαπραγματεύση αυτής της έννοιας μέσα σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο. Η χρήση της αλγεβρικής προσέγγισης των αρνητικών αριθμών θεωρείται από πολλούς σχεδιαστές προγραμμάτων σπουδών ως το κατώφλι για την εισαγωγή των μαθητών στην Άλγεβρα, και γενικά οι αρνητικοί αριθμοί ως ο συνδετικός κρίκος μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας.

Πολλές φορές για την εισαγωγή αυτών των εννοιών, τα πραγματικά προβλήματα που χρησιμοποιούνται ως εισαγωγικές δραστηριότητες ή ως ασκήσεις εφαρμογής δεν αποτελούν φαινομενολογικές πηγές (των συγκεκριμένων πράξεων), και έχουν τις περισσότερες φορές αμφίσημη ερμηνεία. Άλλες φορές η προσέγγιση που υιοθετείται είναι καθαρά μαθηματική, με εστίαση στην απομνημόνευση κανόνων και διαδικασιών.

Τα βασικότερα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές είναι η κατανόηση των διαφορετικών δομικών εκφάνσεων των συμβόλων «+» και «-», αλλά και των διαφορετικών λειτουργικών εκφάνσεων. Για παράδειγμα, το «-» εκτός από τις τρεις δομικές εκφάνσεις (πράξη της αφαίρεσης, πρόσημο, σύμβολο του αντίθετου) χρησιμοποιείται λειτουργικά σε πλαίσια που προσπαθούν να εισάγουν τους μαθητές τις έννοιες των πράξεων, ως απόσταση, ως χρονική διαφορά, ως μείωση θερμοκρασίας κλπ.

Επιλέξαμε στις συγκεκριμένες δραστηριότητες δύο αλγεβρικά μοντέλα, το μοντέλο των θετικών- αρνητικών καρτών και την κίνηση σε αριθμογραμμή. Και τα δύο μοντέλα μπορούν να υποστηρίξουν και τις τέσσερις πράξεις μεταξύ ακεραίων αριθμών. Προτείνονται επίσης από το νέο Πρόγραμμα Σπουδών και τον εξορθολογισμό της σχολικής ύλης 2016-2017.

### Γενικές Οδηγίες χρήσης των δραστηριοτήτων

- Αρχικά προτείνεται να εισαχθεί η κάθε πράξη μόνο με ακεραίους και στη συνέχεια με ρητούς αριθμούς. Δεν έχουν συμπεριληφθεί δραστηριότητες ή ασκήσεις με ρητούς, αφού μπορούν να αξιοποιηθούν οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου.
- Στην αρχή της κάθε παραγράφου περιγράφονται οι στόχοι του νέου προγράμματος σπουδών που περιλαμβάνονται σ' αυτήν την ενότητα.
- Σε κάθε παράγραφο υπάρχει η ενότητα ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ –ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ όπου υπάρχουν και συνδέσεις με άλλες μαθηματικές περιοχές που κάποιες μάλιστα δεν έχουν διδαχθεί ακόμα οι μαθητές. Προφανώς, ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος που θα κρίνει ποιες από αυτές θα διαπραγματευτούν οι μαθητές, ανάλογα με το διδακτικό χρόνο που μπορεί να διατεθεί, με το επίπεδο του τμήματος κ.ο.κ.
- Υπάρχουν πολλές συνδέσεις σε ψηφιακά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε με διαδραστικό πίνακα στην ολομέλεια της τάξης, είτε στο εργαστήριο πληροφορικής (προτείνεται), είτε στο σπίτι από τους μαθητές. Τα μικροπειράματα είναι προσεκτικά επιλεγμένα ώστε να υπάρχει συνάφεια μεταξύ τους (ιδίως όταν εισάγουν έννοιες) και να έχει προστιθέμενη αξία η χρήση τους. Προέρχονται από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, το Φωτόδεντρο και από το GeogebraTube όπου έχουν αναρτηθεί μικροπειράματα (αυτούσια ή τροποποιημένα) που έχουν κατασκευαστεί από την Ομάδα Τεχνολογίας του νέου Προγράμματος Σπουδών και του Οδηγού του Εκπαιδευτικού. Επειδή σε κάποιες ενότητες υπάρχει πλήθος ψηφιακών εργαλείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, προτείνεται να επιλέξει ο εκπαιδευτικός αυτές που θα χρησιμοποιήσει, ώστε να γίνουν την κατάλληλη χρονική στιγμή που οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν κάποια έννοια, να μην υπάρχει αλληλοεπικάλυψη και με τρόπο διερευνητικό.

### Βιβλιογραφία που αξιοποιήθηκε

Βανδουλάκης, Ι. κ.α. (2008). Μαθηματικά Α' Γυμνασίου. Έκδοση Β' -Ο.Ε.Δ.Β.

Γαβριήλ Άννα. *Το πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών και ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αντιμετώπισή του*. Διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ 2014 στο <https://goo.gl/E6PrKv> (ημ. πρ. 5/5/17)

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ μαθηματικών [http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps\\_math.pdf](http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps_math.pdf) (ημ. πρ. 5/5/17) από τη σελίδα <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>

Εξορθολογισμός της σχολικής ύλης 2016-2017.

Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2009). *Το πρόβλημα της επιλογής πλαισίου για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεση ρητών αριθμών στα νέα σχολικά εγχειρίδια*. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή και Γ. Φεσάκης (επιμ.) *Πρακτικά 3<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικής Εκπαίδευση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 373-382). <http://www.enedim.gr/index.php/el/2015-12-04-00-05-16/praktika-synedrion-2> (ημ. πρ. 10/12/17)

Ματθαίου Σοφία. *Διδασκαλία των θετικών και αρνητικών αριθμών βασισμένη στις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ 2005 στο [http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_mathaiou.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_mathaiou.pdf) (ημ. πρ. 5/5/17)

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών <https://goo.gl/c5HwNs> (ημ. πρ. 5/5/17) από τη σελίδα <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>

Πολυτίδης, Δ. (2004). *Ένα εμπειρικό μοντέλο διδασκαλίας για την εισαγωγή των πράξεων προσημασμένων αριθμών*. Πρακτικά 21<sup>ου</sup> συνεδρίου ΕΜΕ-Τρίκαλα.