

### §3. Πρόσθεση ακεραίων

ΠΜΑ Δ' Δημοτικού

Αρ29. Διερευνούν διαισθητικά απλές προσθέσεις με θετικούς και αρνητικούς ακεραίους αριθμούς.

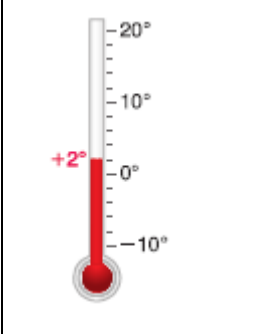
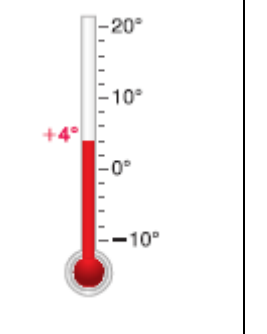
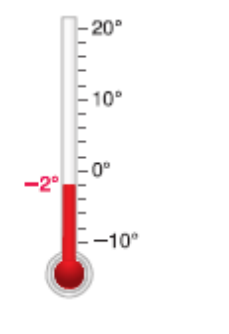
ΠΜΑ Α' Γυμνασίου:

Αρ12. Προσθέτουν ακεραίους αριθμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό της πρόσθεσης ακεραίων.

Αρ13. Κατανοούν την έννοια των αντίθετων ως τους αριθμούς με άθροισμα 0.

#### 3.1 Τα θερμόμετρα (Δραστηριότητα του ΠΣ ΑρΔ6 – ΣΤ' Δημοτικού)

Μελετούμε τα τρία θερμόμετρα. Υπολογίζουμε την θερμοκρασία που θα δείχνει κάθε θερμόμετρο, όταν:

α) η θερμοκρασία πέσει κατά 4° C	β) η θερμοκρασία πέσει κατά 7° C	α) η θερμοκρασία ανέβει κατά 6° C
		

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη μεταβολή ενός θερμομέτρου που η θερμοκρασία του είναι -4 και πέφτει κατά 3 βαθμούς ως εξής:  $(-4) + (-3)$ . Αν η θερμοκρασία ανεβαίνει, τότε θεωρούμε ότι ο αριθμός που προστίθεται είναι θετικός, ενώ αν πέφτει, είναι αρνητικός.

Εκφράζουμε με πράξεις τις τρεις προηγούμενες μεταβολές:

α)

β)

γ)

Όταν προσθέτουμε δύο ακεραίους αριθμούς τους βάζουμε μέσα σε παρένθεση, π.χ.  $(+2)+(+3)=+5$ . Επειδή τους θετικούς μπορούμε να τους γράψουμε και χωρίς το πρόσημο, η προηγούμενη πράξη μπορεί να γραφεί και  $2+3=5$

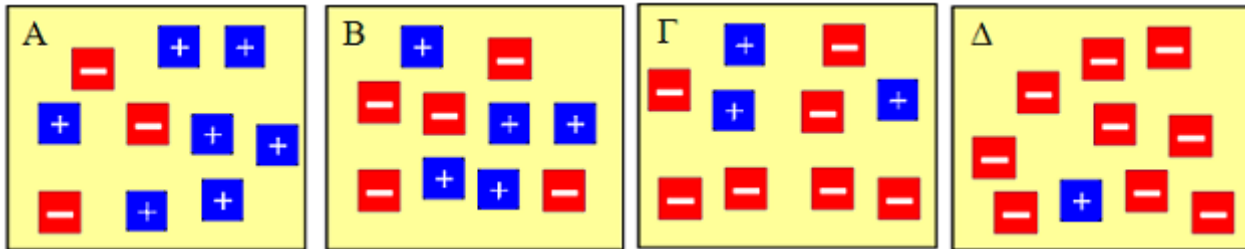
#### 3.2 Τι νόημα έχει το «+»;

Συζητάμε στην ολομέλεια της τάξης το ρόλο του κάθε συμβόλου «+», στην παράσταση  $(+7)+(+6)$ .

### 3.3 Το σκορ της ομάδας

Σε μία τάξη οι μαθητές έχουν χωριστεί σε ομάδες και παίζουν ένα παιχνίδι ερωτήσεων. Για κάθε σωστή απάντηση ο καθηγητής δίνει στην ομάδα μία κάρτα «+» και για κάθε λάθος απάντηση δίνει μία κάρτα «-».

Στο τέλος του παιχνιδιού οι ομάδες είχαν αυτές τις κάρτες.



α) Πόσοι γύροι παιχνιδιού έγιναν; (γύρος παιχνιδιού ήταν όταν σε ένα παιχνίδι παίζουν όλες οι ομάδες από μία φορά)

β) Ποια είναι η βαθμολογία της κάθε ομάδας και ποια ομάδα νίκησε;

Ομάδες	A	B	Γ	Δ
Βαθμολογία				

γ) Αν το παιχνίδι συνεχιστεί για άλλο ένα γύρο ποια είναι τα πιθανά αποτελέσματα για τις τέσσερις ομάδες;

A:

B:

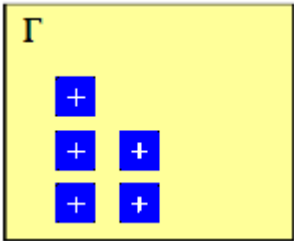
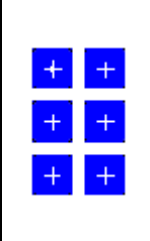
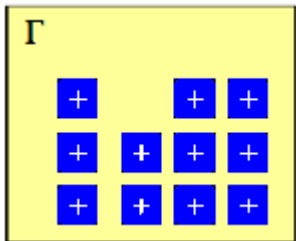
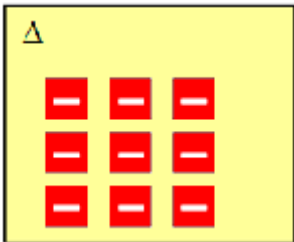
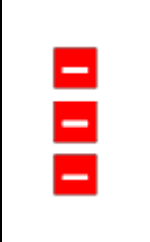

Γ:

Δ:

### 3.4 Άθροισμα ίδιου είδους καρτών

Σε κάθε ομάδα δόθηκε ένας αριθμός καρτών. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αρχικές κάρτες	Δόθηκαν	Τελικές κάρτες	Αντίστοιχη πράξη
			$(+7) + (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$
			$\underline{\hspace{2cm}}$

<p>Γ</p> 		<p>Γ</p> 	<hr/>
<p>Δ</p> 		<p>Δ</p> 	<hr/>

Συζητάμε πρώτα στην ομάδα και μετά καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης.

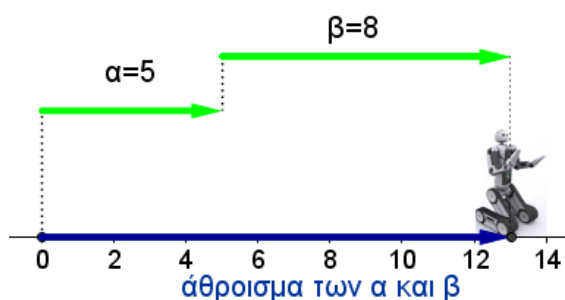
Αν σε μια ομάδα με θετική βαθμολογία προσθέσουμε θετικές κάρτες, η τελική βαθμολογία είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός;

Αν σε μια ομάδα με αρνητική βαθμολογία προσθέσουμε αρνητικές κάρτες, η τελική βαθμολογία είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός;

### 3.5 Κίνηση στην αριθμογραμμή -1

Στο μάθημα της τεχνολογίας μία ομάδα μαθητών κατασκεύασε ένα ρομπότ. Μπορούν να κινούν το ρομπότ μπροστά και πίσω δίνοντας τιμές σε δύο μεταβλητές  $\alpha$  και  $\beta$ . Αν ο αριθμός είναι θετικός το ρομπότ προχωρά μπροστά, ενώ αν είναι αρνητικός προχωρά προς τα πίσω.

**α)** Αν δώσουμε τις τιμές  $\alpha=5$  και  $\beta=8$  τότε το ρομπότ πάει στη θέση \_\_\_\_ . Αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί με την πράξη  $(+5) + (+8) = \underline{\hspace{2cm}}$



Τροποποιημένο μικροπείραμα στο GeogebraTube της ομάδας Τεχνολογίας του νέου προγράμματος Σπουδών:

<https://www.geogebra.org/book/title/id/cu4BMuDw#material/EfDCQUUp>

β) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Κίνηση στην αριθμογραμμή	Αντίστοιχη πράξη και αποτέλεσμα

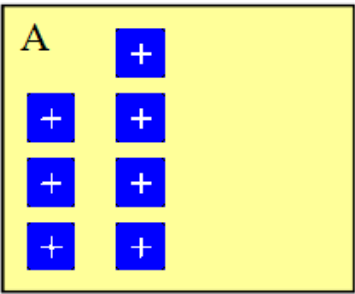

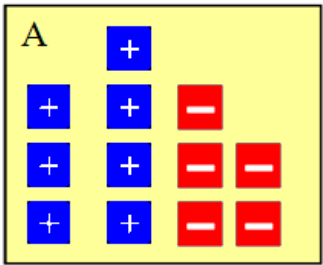
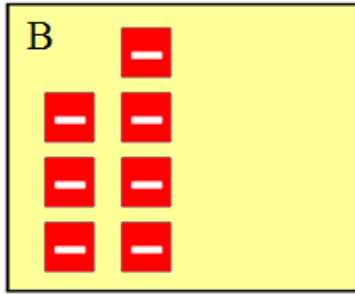

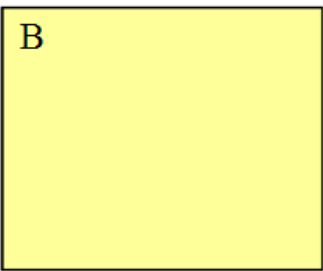
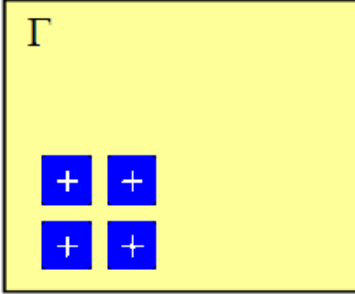

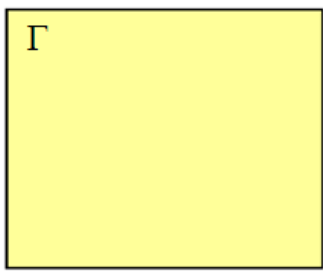
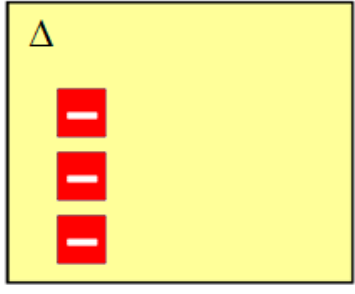
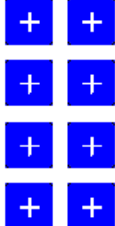
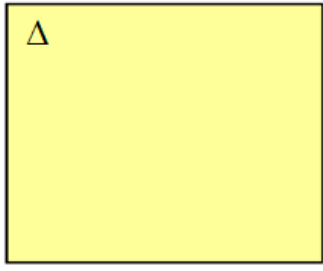
Από την εμπειρία μας στην πρόσθεση ομόσημων ακεραίων αριθμών συζητάμε στην ομάδα μας και διατυπώνουμε έναν κανόνα για το πώς μπορούμε να προσθέτουμε ομόσημους αριθμούς (Σκεφτόμαστε (α) τι πρόσημο βάζουμε (β) τι πράξη κάνουμε και ανάμεσα σε ποιους αριθμούς;) :

### 3.6 Άθροισμα διαφορετικού είδους καρτών

Στο παιχνίδι με τις κάρτες, σε κάθε ομάδα δίνεται ένας αριθμός καρτών.

**α)** Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα. Στη στήλη των τελικών καρτών θα πρέπει να συμπληρώσουμε τις κάρτες (με + ή -). Επειδή ίσως κάποιες κάρτες αλληλοαναιρεθούν, **μπορούμε να γράψουμε μόνο αυτές που επηρεάζουν το αποτέλεσμα.**

Μικροπείραμα από εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:  
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1935>

Αρχικές κάρτες	Δόθηκαν	Τελικές κάρτες	Αντίστοιχη πράξη
			$(+7)+(-5) = \underline{\quad}$
			$\underline{\quad}$
			$\underline{\quad}$
			$\underline{\quad}$

**β)** Συζητάμε στην ομάδα μας και στη συνέχεια καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης: α) αν σε μια ομάδα με θετική βαθμολογία προσθέσουμε αρνητικές κάρτες, η τελική βαθμολογία θα είναι θετικός αριθμός, αρνητικός ή άλλοτε θετικός κι άλλοτε αρνητικός; β) Αν σε μια ομάδα με αρνητική βαθμολογία προσθέσουμε θετικές κάρτες η τελική βαθμολογία θα είναι θετικός αριθμός, αρνητικός ή άλλοτε θετικός κι άλλοτε αρνητικός;

Τροποποιημένο μικροπείραμα στο GeogebraTube της ομάδας Τεχνολογίας του νέου προγράμματος Σπουδών:  
<https://www.geogebra.org/book/title/id/cu4B/MuDw#material/dyZtRT3B>

## 3.7 Κίνηση στην αριθμογραμμή -2

Στο μάθημα της τεχνολογίας μία ομάδα μαθητών κατασκεύασε ένα ρομπότ. Μπορούν να κινούν το ρομπότ μπροστά και πίσω δίνοντας τιμές σε δύο μεταβλητές  $\alpha$  και  $\beta$ . Αν ο αριθμός είναι θετικός το ρομπότ προχωρά μπροστά, ενώ αν είναι αρνητικός προχωρά προς τα πίσω. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Κίνηση στην αριθμογραμμή	Αντίστοιχη πράξη και αποτέλεσμα

Μικροπείραμα από εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1931>

Μικροσενάριο από το Φωτόδεντρο

<http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/6192>

με οδηγίες προς τον εκπαιδευτικό

[http://photodentro.edu.gr/photodentro/Agym\\_Kefa7\\_3\\_athroisma\\_akeraion\\_pidx0027609/Agym\\_Kefa7\\_3\\_athroisma\\_akeraion.pdf](http://photodentro.edu.gr/photodentro/Agym_Kefa7_3_athroisma_akeraion_pidx0027609/Agym_Kefa7_3_athroisma_akeraion.pdf)

Από την εμπειρία σας στην πρόσθεση ετερόσημων ακεραίων αριθμών διατυπώστε έναν κανόνα για το πώς μπορούμε να προσθέτουμε ετερόσημους αριθμούς (Σκεφτόμαστε ( $\alpha$ ) τι πρόσημο βάζουμε, ( $\beta$ ) τι πράξη κάνουμε και ανάμεσα σε ποιους αριθμούς;):

Μικροπείραμα στο GeogebraTube από την ομάδα τεχνολογίας του Οδηγού του Εκπαιδευτικού από το νέο ΠΣ:

<https://www.geogebra.org/book/title/id/cu4BMuDW#material/bVgQstWN>

### 3.8 Διατυπώνοντας και εφαρμόζοντας τον κανόνα της πρόσθεσης ακεραίων αριθμών

Είναι το ίδιο εύκολο να γίνουν οι πράξεις:  $(-123498)+(+32456)$  ή  $(-23981)+(-321934)$ ; Για να μπορούμε να εκτελούμε πιο εύκολα τις προσθέσεις μεταξύ ακεραίων αριθμών θα βρούμε έναν κανόνα ώστε να μη χρειάζεται να σκεφτόμαστε με κάρτες ή με την αριθμογραμμή.

Συμπληρώνουμε τις πράξεις στην 3<sup>η</sup> στήλη, παρατηρούμε τις ομοιότητες και γράφουμε τους κανόνες που διατυπώσαμε για την πρόσθεση των ακεραίων αριθμών.

		Πράξεις	Κανόνας
Ομόσημοι αριθμοί	α) Δύο θετικοί	$(+5)+(+3)=$ $(+7)+(+2)=$ $(+3)+(+8)=$	
	β) Δύο αρνητικοί	$(-5)+(-3)=$ $(-7)+(-2)=$ $(-3)+(-8)=$	
Ετερόσημοι αριθμοί	γ) Μεγαλύτερος κατ' απόλυτη τιμή ο θετικός	$(+5)+(-3)=$ $(+7)+(-2)=$ $(-3)+(+8)=$	
	δ) Μεγαλύτερος κατ' απόλυτη τιμή ο αρνητικός	$(-5)+(+3)=$ $(-7)+(+2)=$ $(+3)+(-8)=$	

**Εφαρμογή :** Εφαρμόζουμε τον κανόνα που διατυπώσαμε στις παρακάτω πράξεις:

$$(+345)+(+223)=$$

$$(-4329)+(-3320)=$$

$$(+965)+(-673)=$$

$$(-564)+(+223)=$$

$$(+4567)+(-2232)=$$

$$(-3256)+(-542)=$$

Μικροπειράματα από εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία:

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2229>

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2047>

**3.9 Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα;**

Βρίσκουμε τα αθροίσματα  $5+(-2)$  και  $(-2)+5$ .

Συζητάμε στην ομάδα μας αν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τους ακέραιους αριθμούς.

**3.10 Προσθέτοντας αντίθετους αριθμούς**

Συμπληρώνουμε τα κενά:

$4 + \underline{\quad} = 0$

$(-8) + \underline{\quad} = 0$

$126 + \underline{\quad} = 0$

$(-1300) + \underline{\quad} = 0$

Οι ακέραιοι που το άθροισμά τους είναι 0 λέγονται αντίθετοι αριθμοί. Δηλαδή  $a+(-a)=0$ . Κάθε ακέραιος έχει έναν αντίθετο αριθμό.

**3.11 Περισσότεροι προσθετέοι**

Υπολογίζουμε τα αθροίσματα:

$\alpha) (+4)+(+5)+(-7)+(-2)+(-3)=$

Ένας γρήγορος τρόπος για να υπολογίζουμε παραστάσεις με πολλούς προσθετέους είναι να προσθέτουμε πρώτα τους ομόσημους.

$\beta) 12+(-6)+(-24)+45+(-12)+(-32)=$

$\gamma) |-12|+(-13)+ |-20|+(-19)+15=$

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΣΥΝΔΕΞΕΙΣ – ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ****3.12 Αριθμητικά μοτίβα**

Αφού κατανοήσουμε τον κανόνα του κάθε μοτίβου, συμπληρώνουμε τους όρους τους.

$\alpha) 10, 7, 4, 1, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$

$\beta) -18, -13, -8, -3, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$

**3.13 Απόλυτη τιμή αθροίσματος**

Συζητάμε στην ομάδα μας και καταλήγουμε σε συμφωνία. Στη συνέχεια καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης.

Ισχύει η σχέση  $|a + b| = |a| + |b|$ ; Ελέγχουμε τις υποθέσεις μας δίνοντας διάφορους συνδυασμούς ακεραίων τιμών στους αριθμούς  $a$  και  $b$ .

**Συζητάμε: (α)** αν για μία πρόταση στα μαθηματικά, βρούμε ένα παράδειγμα που δεν την ικανοποιεί (ονομάζεται αντιπαράδειγμα) μπορούμε να πούμε ότι η πρόταση είναι ψευδής;

**(β)** αν για μία πρόταση βρούμε συγκεκριμένες τιμές (πιθανόν πάρα πολλές αλλά όχι όλες τις δυνατές τιμές) που επαληθεύουν την πρόταση, μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η πρόταση είναι αληθής;

**(γ)** αν για μία πρόταση, βρούμε ότι όλες οι δυνατές περιπτώσεις επαληθεύουν την πρόταση, μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι η πρόταση είναι αληθής;



### 3.14 Πόσοι έμειναν;

Στην αφετηρία ενός λεωφορείου επιβιβάστηκαν 15 επιβάτες. Στην 1<sup>η</sup> στάση κατέβηκαν 5 και ανέβηκαν 12. Στη 2<sup>η</sup> στάση κατέβηκαν 8 και ανέβηκαν 4. Στη 3<sup>η</sup> στάση κατέβηκαν 12 και ανέβηκαν 10. Στη 4<sup>η</sup> στάση κατέβηκαν 12 και ανέβηκαν 2. Γράφουμε ως άθροισμα ακεραίων τις αλλαγές που έγιναν στους επιβάτες του λεωφορείου και βρίσκουμε τον αριθμό των επιβατών στην 4<sup>η</sup> στάση.

### 3.16 Το μαγικό τετράγωνο

Αν προσθέσουμε τις γραμμές, τις στήλες και τις διαγωνίου του τετραγώνου το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

Συμπληρώνουμε τα κενά του πίνακα

		-3
	-2	
-1	-6	

### 3.17 Μεταφέροντας σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία  $A(-4,-2)$ ,  $B(1,0)$  και  $\Gamma(2,3)$  και το τρίγωνο που ορίζουν τα τρία σημεία  $AB\Gamma$ .

**α)** Κάθε σημείο  $M$  του τριγώνου μεταφέρεται στο σημείο  $M'$  που είναι 2 μονάδες δεξιά (δηλαδή  $\chi_{M'} = \chi_M + (+2)$ ) και 3 μονάδες προς τα κάτω ( $\psi_{M'} = \psi_M + (-3)$ ). Να σχεδιάσουμε το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ .

**β)** Συμπληρώνουμε τις σχέσεις μεταφοράς αν το σημείο  $A(-4,-2)$  μεταφερόταν στο σημείο  $A'(-5,-4)$ .

$$\chi_{M'} = \chi_M + (\underline{\quad})$$

$$\psi_{M'} = \psi_M + (\underline{\quad})$$

