

§4. Αφαίρεση ακεραίων – Απαλοιφή παρενθέσεων

ΠΜΑ Α' Γυμνασίου

Αρ14. Αφαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας μοντέλα-μεταφορές και αναγνωρίζουν την αφαίρεση ακεραίων ως πρόσθεση του αντίθετου. Αφαιρούν ακέραιους μετατρέποντας την αφαίρεση σε πρόσθεση του αντίθετου.

Αρ15. Αναγνωρίζουν τις διαφορετικές ερμηνείες του συμβόλου « - » ως πρόσημου και ως σύμβολου πράξης.

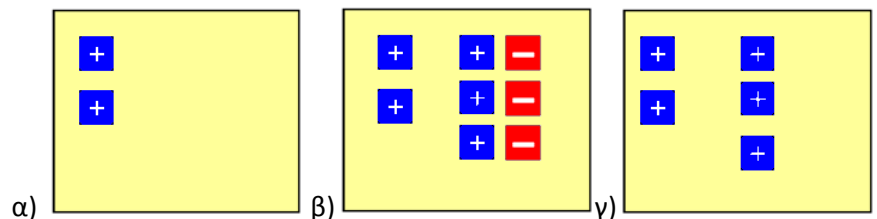
Αρ16. Συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακέραιους

4.1 «Πρόσθεση από το τίποτα»

Λέει ο καθηγητής σε μία τάξη της Α' Γυμνασίου: «Στο παιχνίδι με τις κάρτες είναι εύκολο να σκεφτούμε την πράξη $(+8)-(+2)$ αφού από τις 8 θετικές κάρτες αφαιρούμε τις 2. Έτσι το αποτέλεσμα είναι +6. Πως μπορούμε να σκεφτούμε όμως την πράξη $(+2)-(-3)$;».

Οι μαθητές της 1^{ης} ομάδας είπαν: «Δεν γίνεται αυτή η πράξη αφού η ομάδα που έχει σκορ $(+2)$ δεν έχει αρνητικές κάρτες, άρα πως μπορούμε να αφαιρέσουμε 3 αρνητικές κάρτες;»

Οι μαθητές της 4^{ης} ομάδας έδειξαν με κάρτες έναν συλλογισμό για το πώς μπορεί να γίνει αυτή η αφαίρεση. Παρατηρούμε με την ομάδα μας διαδοχικά τις εικόνες και περιγράφουμε τι ακριβώς σκέφτηκαν οι μαθητές. Αξιολογούμε αν αυτό είναι σωστό ή όχι και καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης αφού καταλήξουμε σε συμφωνία.



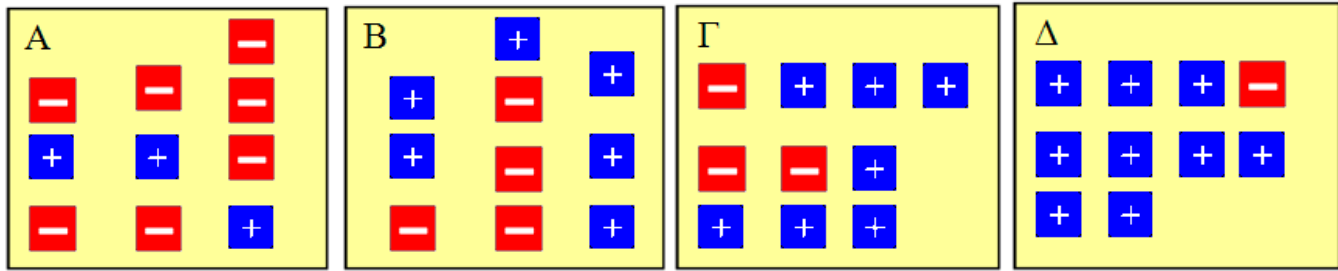
4.2 Η αφαίρεση με κάρτες

Σκεφτόμαστε με κάρτες και συμπληρώνουμε τον πίνακα.

ΣΚΟΡ		ΠΟΝΤΟΙ	ΤΕΛΙΚΟ ΣΚΟΡ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ
+8	Προσθέτουμε	+4		$(+8)+(+4)=$
+2	Προσθέτουμε	-5		
+5	Αφαιρούμε	+2		
-6	Αφαιρούμε	-2		
+4	Αφαιρούμε	+8		
0	Αφαιρούμε	+3		
+8	Αφαιρούμε	-2		
+3	Αφαιρούμε	-4		

4.3 Τελείωσαν οι κάρτες

Στο παιχνίδι με τις κάρτες, μετά από κάποιους γύρους οι ομάδες είχαν τις εξής κάρτες:



α) Πόσοι γύροι έγιναν και πόσους πόντους έχει η κάθε ομάδα;

Γύροι: A: B: Γ: Δ:

β) Οι κάρτες του καθηγητή με τα + τελείωσαν. Πως μπορεί ο καθηγητής να αφαιρέσει κάρτες από τις ομάδες χωρίς να αλλάξει το σύνολο των πόντων της ομάδας; Γράφουμε το είδος και τον μέγιστο αριθμό των καρτών που μπορεί να πάρει ο καθηγητής από κάθε ομάδα.

A: B: Γ: Δ:

γ) Πως μπορούμε να προσθέσουμε κάρτες σε μια ομάδα χωρίς να αλλάξουμε τους πόντους της ομάδας;

δ) Αν δεν έχει «+» κάρτες ο καθηγητής μπορεί να συνεχίσει το παιχνίδι, χωρίς όμως να πάρει «+» κάρτες από τις ομάδες;

ε) Συζητάμε στην τάξη και καταθέτουμε τις απόψεις μας.

Με τι ισοδυναμεί η αφαίρεση μίας θετικής κάρτας;

Η αφαίρεση μίας αρνητικής κάρτας;

Η αφαίρεση 3 θετικών καρτών;

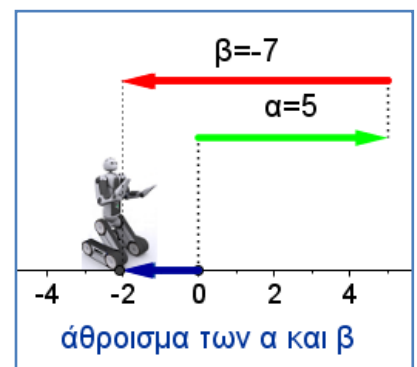
Η αφαίρεση 3 αρνητικών καρτών;

Η αφαίρεση β θετικών καρτών;

Η αφαίρεση β αρνητικών καρτών;

4.4 Η αφαίρεση στην αριθμογραμμή

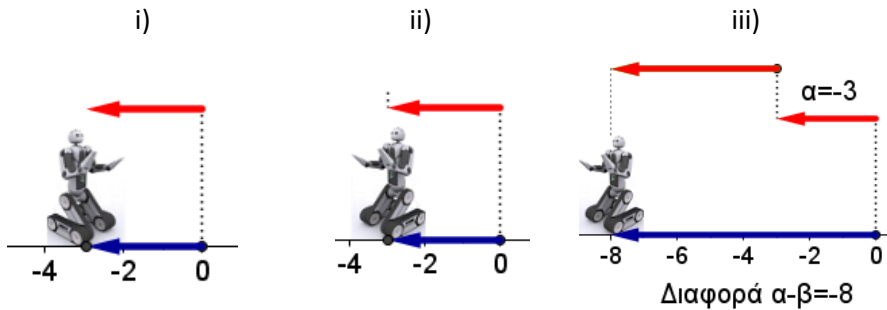
Οι μαθητές που έφτιαξαν το ρομπότ στο μάθημα της τεχνολογίας, το προγραμματίσαν ώστε να φτάνει στο σημείο που έχει τετμημένη το αποτέλεσμα της πράξης $(+5) + (-7)$ κάνοντας τις εξής κινήσεις: να κινείται 5 βήματα μπροστά (ξεκινάει από το 0 κοιτάζοντας προς τους θετικούς αριθμούς) και στη συνέχεια να κινείται 7 βήματα πίσω. Έτσι καταλήγει στο σημείο με τετμημένη -2.



Μικροπείραμα από
εμπλουτισμένα σχολικά
βιβλία:

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1917>

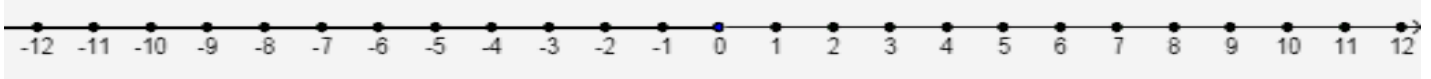
α) Στη συνέχεια προβληματίστηκαν σχετικά με το πώς θα μπορούσαν να κινήσουν το ρομπότ ώστε να προσομοιώσουν την πράξη $(-3)-(+5)$. Μία ομάδα μαθητών σκέφτηκε μία λύση. Παρατηρούμε τις διαδοχικές κινήσεις του ρομπότ και περιγράφουμε πως ακριβώς προτείνουν οι μαθητές τη διαδικασία της αφαίρεσης.



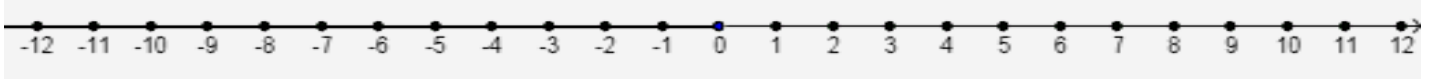
Μικροπείραμα στο
GeogebraTube από τα νέα
Προγράμματα Σπουδών:
<https://www.geogebra.org/m/cu4BMuDw#material/G4uFwVf5>

β) Ποια θα είναι η τελική θέση του ρομπότ σύμφωνα με την προηγούμενη διαδικασία που προτείνουν οι μαθητές, αν πληκτρολογήσουμε:

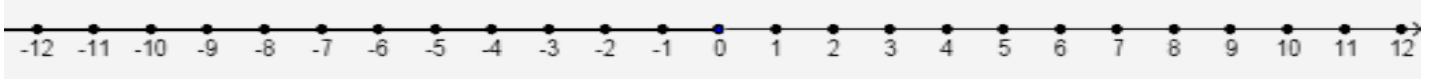
$$(-4)-(+5)=$$



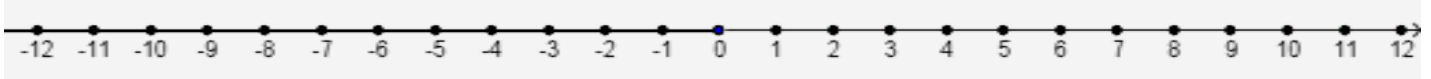
$$(-6)-(-4)=$$



$$(+10)-(+4)=$$



$$(-3)-(+2)-(-4)=$$



γ) Στο $(-4)-(+5)$ κάνει 4 βήματα πίσω, γυρίζει, κάνει 5 βήματα μπροστά και καταλήγει στο _____. Αντί να γυρίσει και να κάνει 5 βήματα μπροστά τι μπορεί να κάνει; Άρα η πράξη $(-4)-(+5)$ ισοδυναμεί με την πράξη _____

Στο $(-6)-(-4)$ κάνει 6 βήματα πίσω, γυρίζει, κάνει ____ βήματα _____ και καταλήγει στο _____. Αντί να γυρίσει και να κάνει ____ βήματα _____ τι μπορεί να κάνει; Άρα η πράξη $(-6)-(-4)$ ισοδυναμεί με την πράξη _____

Λαμβάνοντας υπόψη αυτά που είδαμε στην αφαίρεση με τις κάρτες ή με την κίνηση στην αριθμογραμμή συμπληρώνουμε την παρακάτω πρόταση: Η αφαίρεση του β από τον α, δηλαδή το $\alpha-\beta$ ισοδυναμεί με την _____ του α με τον _____ του β. Δηλαδή $\alpha-\beta =$ _____

Μετά την προηγούμενη διαπίστωση χρειάζεται να φτιάξουμε κανόνα και για την αφαίρεση όπως κάναμε στην πρόσθεση;

4.4 Αφαιρώντας ακεραίους

Ολοκληρώνουμε τις πράξεις

$$(-4)-(+5)=(-4)+(\underline{\quad})=$$

$$(-3)-(-5)=(-3)+(\underline{\quad})=$$

$$(+12)-(-8)=(+12)+(\underline{\quad})=$$

$$(-10)-(-18)=(-10)+(\underline{\quad})=$$

$$(-19)-(+15)=(-19)+(\underline{\quad})=$$

$$(-108)-(+670)=$$

$$(-3023)-(-2342)=$$

4.5 Περισσότεροι από δύο

Υπολογίζουμε την αριθμητική παράσταση

$$(+5)-(+4)+(-7)-(-2)-(-3)=$$

4.6 Το νόημα των συμβόλων

α) Στην παράσταση $-(-2)+(+4)-(-7)+(-2)-[-(-9)]$ περιγράφουμε το νόημα όλων των συμβόλων + και - που υπάρχουν στην παράσταση.

β) Υπολογίζουμε την παράσταση $-(-2)+(+4)-(-7)+(-2)-[-(-9)]=$

4.7 Απαλείφοντας τις παρενθέσεις

Για να κάνουμε πιο εύκολα τις πράξεις στις αριθμητικές παραστάσεις, συμφωνήθηκε να **απαλείψουμε τις παρενθέσεις** σε μια αριθμητική παράσταση ως εξής:

α) Όταν η παρένθεση έχει μπροστά το + (ή δεν έχει πρόσημο), την απαλείψουμε μαζί με το + και γράφουμε τους όρους που περιέχει μαζί με το πρόσημό τους. π.χ $(+4)+(-6)=4-6=-2$

β) Όταν η παρένθεση έχει μπροστά το - την απαλείψουμε μαζί με το - και γράφουμε τους όρους που περιέχει **με αντίθετα** πρόσημα. π.χ $(-5)-(-8)=-5+8=3$

γ) Αφού βγάλουμε τις παρενθέσεις, μπορούμε να αλλάζουμε τη θέση των αριθμών και **να προσθέτουμε πρώτα τους ομόσημους αριθμούς**, π .χ. $(-3)+(+8)-(+2)-(-7)+(-6)=-3+8-2+7-6=8+7-3-2-6=15-11=4$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα, υπολογίζουμε τις παραστάσεις κάνοντας απαλοιφή των παρενθέσεων

$$\alpha) -(+8)-(+4)+(-15)-(-8)-(-31)=$$

$$\beta) (+7)+(+30)-(-14)+(-2)-(-31)=$$

4.8 Υπολογίζοντας παραστάσεις με δύο τρόπους

Υπολογίζουμε τις παραστάσεις με δύο τρόπους. Κάνοντας πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ή απαλείφοντας πρώτα τις παρενθέσεις.

$$\alpha) 1^{\circ}: 15-(7-2)+(4-5)-(-9+3)=$$

$$2^{\circ}: 15-(7-2)+(4-5) -(-9+3)=$$

$$\beta) 1^{\circ}: -(-25+61)+(-34+41)-21-(83-24-59)=$$

$$2^{\circ}: -(-25+61)+(-34+41)-21-(83-24-59)=$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ - ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

4.9 Πόσες λύσεις υπάρχουν;

α) Βρίσκουμε δύο ακέραιους αριθμούς με άθροισμα -4.

Πόσες λύσεις υπάρχουν;

β) Βρίσκουμε δύο ακέραιους αριθμούς με διαφορά 10 .

Πόσες λύσεις υπάρχουν;

γ) Βρίσκουμε δύο ακέραιους αριθμούς με άθροισμα -4 και διαφορά 10.

Πόσες λύσεις υπάρχουν; Αναλύουμε τον τρόπο που σκεφτήκαμε.

4.10 Τοποθετώντας το σωστό σύμβολο διάταξης

Συμπληρώνουμε το σωστό σύμβολο διάταξης (<, >, =) στα κενά

$$-5-(-2) \text{ ____ } -8+(-2)$$

$$-5+|-4| \text{ ____ } -8-(+7)$$

$$-|-9|+4 \text{ ____ } |-8| -1$$

4.11 Λύνοντας εξισώσεις

Υπολογίζουμε με αντίστροφες πράξεις τον άγνωστο αριθμό χ , στις εξισώσεις:

$$5+\chi=-7$$

$$-2+\chi=5$$

$$\chi+(-5)=9$$

4.12 Μεταφράζοντας σε εξίσωση

Εκφράζουμε με εξισώσεις τα παρακάτω προβλήματα και βρίσκουμε τις λύσεις τους.

1. Η θερμοκρασία στις 6:00 π.μ. ήταν από τους 5°C κάτω από το μηδέν, ενώ στις 13:00 ήταν 14 βαθμοί πάνω από το 0. Ποια είναι η διαφορά της πρωινής θερμοκρασίας από τη θερμοκρασία το μεσημέρι;
2. Ο Δημήτρης παίρνει το ασανσέρ από το 2° υπόγειο και πάει στο 13° όροφο. Πόσους ορόφους ανέβηκε;
3. Η Μαρία χρωστούσε 15 ευρώ αλλά με τα χρήματα που πήρε από τον πατέρα της έχει τώρα 20 ευρώ. Πόσα χρήματα πήρε από τον πατέρα της;

4.13 Η αριθμητική τιμή

Αν $\alpha=-4$, $\beta=5$, $\gamma=-3$ και $\delta=7$ υπολόγισε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

α) $\alpha-4=$

β) $\alpha-\beta=$

γ) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=$

δ) $-\alpha+\beta-\gamma-\delta=$

ε) $-(\gamma-\delta)-(\alpha-\beta)=$

Αλγεβρική παράσταση

Αλγεβρική παράσταση ονομάζουμε την παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ γραμμάτων και αριθμών.

Αριθμητική τιμή

Όταν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς τότε το αποτέλεσμα που παίρνουμε λέγεται αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

4.14 Το εύρος παρατηρήσεων

Οι χαμηλότερες θερμοκρασίες μία εβδομάδα του χειμώνα στο Σουφλί ήταν: -5, -9, -10, 5, 7, 15, 10. Υπολογίζουμε το εύρος των παρατηρήσεων.

Για να υπολογίσουμε τη εύρος των παρατηρήσεων, διατάσσουμε τις παρατηρήσεις και αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τιμή τη μικρότερη τιμή.

4.15 Υπολογίζοντας τη διαφορά από τη μέση τιμή

Μία ομάδα μαθητών θέλει να υπολογίσει τη διαφορά ύψους του καθενός από τη μέση τιμή ύψους της ομάδας.

Κατέγραψαν το ύψος του καθενός στον διπλανό πίνακα.

Μαθητές	A	B	Γ	Δ	Ε
Ύψος (σε cm)	145	152	163	172	143

α) Υπολογίζουμε τη μέση τιμή (ΜΤ) του ύψους των μαθητών

β) Υπολογίζουμε για κάθε μαθητή η διαφορά: $ΜΤ - \text{Ύψος}_{\text{μαθητή}}$

Μαθητές	A	B	Γ	Δ	Ε
Διαφορά ύψους (σε cm)					

γ) Αποτυπώνουμε τις παραπάνω διαφορές στο διπλανό ραβδόγραμμα.

δ) Πόσο είναι το άθροισμα όλων αυτών των διαφορών;

Τι σχέση έχουν οι αρνητικές διαφορές με τις θετικές;

4.16 Ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα;

α) Ο καθηγητής έθεσε στην τάξη το ερώτημα αν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην αφαίρεση ακεραίων (δηλ: $\alpha - \beta = \beta - \alpha$). Η 2^η ομάδα ισχυρίστηκε ότι δεν ισχύει χρησιμοποιώντας ένα αντιπαράδειγμα: «Αν πάρουμε τους αριθμούς 5, -2 τότε $5 - (-2) = 5 + 2 = 7$, ενώ $-2 - 5 = -7$. Άρα δεν ισχύει».

Συμφωνείτε με την 3^η ομάδα; Ένα παράδειγμα που δεν ικανοποιεί μία πρόταση (ονομάζεται αντιπαράδειγμα) αρκεί, ώστε να πούμε με βεβαιότητα ότι η πρόταση δεν ισχύει;

β) Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα για την αφαίρεση $(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta - \gamma)$ στους ακέραιους αριθμούς; Αιτιολογούμε τις απόψεις μας.

Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή παρατηρήσεων, διαιρούμε το άθροισμα των παρατηρήσεων με το πλήθος τους.

