

## §4. Αφαίρεση ακεραίων – Απαλοιφή παρενθέσεων

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ

Αυτή η παράγραφος είναι μέρος μιας συλλογής δραστηριοτήτων και ασκήσεων με θέμα τους ακέрайους αριθμούς και τις πράξεις τους. Μπορείτε να βρείτε το σύνολο των παραγράφων αυτών στις διευθύνσεις:

- Πράξεις ακεραίων-1-Οι ακέрайοι αριθμοί – Η ευθεία των ακεραίων
- Πράξεις ακεραίων-2-Διάταξη και σύγκριση ακεραίων – Αντίθετοι αριθμοί - Η απόλυτη τιμή
- Πράξεις ακεραίων-3-Πρόσθεση ακεραίων
- Πράξεις ακεραίων-4-Αφαίρεση ακεραίων – Απαλοιφή παρενθέσεων
- Πράξεις ακεραίων-5-Πολλαπλασιασμός ακεραίων
- Πράξεις ακεραίων-6-Διαίρεση ακεραίων

### Οδηγίες για την ενότητα «§4. Αφαίρεση ακεραίων – Απαλοιφή παρενθέσεων»

Οι διδακτικοί στόχοι αυτής της παραγράφου είναι να αφαιρούν ακέрайους χρησιμοποιώντας τα δύο μοντέλα που έχουν αναφερθεί (θετικές-αρνητικές κάρτες, κίνηση στην αριθμογραμμή), να κατανοήσουν αναπαραστατικά γιατί η αφαίρεση με έναν αριθμό ισοδυναμεί με την πρόσθεση του αντίθετου του και να μπορούν να αφαιρούν ακέрайους αριθμούς μετατρέποντας την αφαίρεση σε πρόσθεση. Στην συνέχεια μαθαίνουν να απαλείφουν παρενθέσεις κάτι που ενώ διαδικαστικά είναι σχετικά απλό, εντούτοις αλλάζει εννοιολογικά όλη τη δομή των αριθμητικών παραστάσεων.

Αναλυτικότερα με τις δραστηριότητες:

**4.1-4.2** Εδώ οι μαθητές ανακαλύπτουν διαισθητικά αυτό που στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά ονομάζεται «πρόσθεση από τίποτα». Είναι ουσιαστικά το αντίστροφο αυτού που έμαθαν στην προηγούμενη ενότητα όπου ίδιος αριθμός θετικών και αρνητικών καρτών εξουδετερώνονται. Εδώ, για να καλύψουμε την πράξη  $(+2)-(-3)$  (δεν υπάρχουν αρνητικές κάρτες, άρα πως θα αφαιρέσουμε τρεις;), προσθέτουμε ίδιο αριθμό θετικών και αρνητικών καρτών (3 ζευγάρια) και στη συνέχεια αφαιρούμε τις 3 αρνητικές κάρτες.

**4.3** Στο (δ) και στο (ε) ερώτημα προσπαθούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι αντί να δώσει θετικές κάρτες, μπορεί να αφαιρέσει ίδιο αριθμό αρνητικών καρτών και αντίστροφα. Ανακαλύπτει έτσι διαισθητικά, ότι η αφαίρεση ισοδυναμεί με την πρόσθεση του αντίθετου.

**4.4** Η αφαίρεση στην αριθμογραμμή αναπαριστάται με την περιστροφή του ρομπότ κατά  $180^\circ$ . Έτσι, αντί να στρίψει το ρομπότ και να προχωρήσει κάποια βήματα μπροστά, ισοδυναμεί με το να προχωρήσει ίδιο αριθμό βημάτων προς τα πίσω, ή αντί να στρίψει το ρομπότ και να προχωρήσει κάποια βήματα πίσω, ισοδυναμεί με το να προχωρήσει ίδιο αριθμό βημάτων προς τα μπροστά. Έτσι πάλι οδηγείται διαισθητικά, ότι η αφαίρεση ισοδυναμεί με την πρόσθεση του αντίθετου.

**4.6** Πριν εισαχθεί στην απαλοιφή παρενθέσεων είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές τις διάφορες εκφάνσεις των συμβόλων «+» και «-».

**4.12-4.13-4.14-4.15** Αυτές οι δραστηριότητες είναι συνδέσεις κυρίως με άλλες μαθηματικές περιοχές και ξεφεύγουν από τους γνωστικούς στόχους αυτής της παραγράφου. Ο εκπαιδευτικός θα κρίνει αν πρέπει να τις διαπραγματευτούν οι μαθητές.

### **Γενικότερο θεωρητικό πλαίσιο για τους ακέραιους αριθμούς και τις πράξεις τους**

Η ιστορία των Μαθηματικών έχει δείξει ότι η εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας σε ένα ήδη διαμορφωμένο εννοιολογικό πλαίσιο συνοδεύεται συχνά από σημαντικές δυσκολίες και αντιπαραθέσεις. Δεδομένου ότι συχνά οι ίδιες δυσκολίες που αντιμετώπισαν ιστορικά οι μαθηματικοί στην υποδοχή μιας νέας έννοιας συναντώνται και σήμερα στις τάξεις των Μαθηματικών, οι ερευνητές έχουν προτείνει διάφορους τρόπους για την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών και τις πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών. Οι σύγχρονες έρευνες, ακολουθώντας την ιστορική εξέλιξη των αρνητικών, προτείνουν διαπραγμάτευση αυτής της έννοιας μέσα σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο. Η χρήση της αλγεβρικής προσέγγισης των αρνητικών αριθμών θεωρείται από πολλούς σχεδιαστές προγραμμάτων σπουδών ως το κατώφλι για την εισαγωγή των μαθητών στην Άλγεβρα, και γενικά οι αρνητικοί αριθμοί ως ο συνδετικός κρίκος μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας.

Πολλές φορές για την εισαγωγή αυτών των εννοιών, τα πραγματικά προβλήματα που χρησιμοποιούνται ως εισαγωγικές δραστηριότητες ή ως ασκήσεις εφαρμογής δεν αποτελούν φαινομενολογικές πηγές (των συγκεκριμένων πράξεων), και έχουν τις περισσότερες φορές αμφίσημη ερμηνεία. Άλλες φορές η προσέγγιση που υιοθετείται είναι καθαρά μαθηματική, με εστίαση στην απομνημόνευση κανόνων και διαδικασιών.

Τα βασικότερα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές είναι η κατανόηση των διαφορετικών δομικών εκφάνσεων των συμβόλων «+» και «-», αλλά και των διαφορετικών λειτουργικών εκφάνσεων. Για παράδειγμα, το «-» εκτός από τις τρεις δομικές εκφάνσεις (πράξη της αφαίρεσης, πρόσημο, σύμβολο του αντίθετου) χρησιμοποιείται λειτουργικά σε πλαίσια που προσπαθούν να εισάγουν τους μαθητές τις έννοιες των πράξεων, ως απόσταση, ως χρονική διαφορά, ως μείωση θερμοκρασίας κλπ.

Επιλέξαμε στις συγκεκριμένες δραστηριότητες δύο αλγεβρικά μοντέλα, το μοντέλο των θετικών- αρνητικών καρτών και την κίνηση σε αριθμογραμμή. Και τα δύο μοντέλα μπορούν να υποστηρίξουν και τις τέσσερις πράξεις μεταξύ ακεραίων αριθμών. Προτείνονται επίσης από το νέο Πρόγραμμα Σπουδών και τον εξορθολογισμό της σχολικής ύλης 2016-2017.

### **Γενικές Οδηγίες χρήσης των δραστηριοτήτων**

- Αρχικά προτείνεται να εισαχθεί η κάθε πράξη μόνο με ακεραίους και στη συνέχεια με ρητούς αριθμούς. Δεν έχουν συμπεριληφθεί δραστηριότητες ή ασκήσεις με ρητούς, αφού μπορούν να αξιοποιηθούν οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου.
- Στην αρχή της κάθε παραγράφου περιγράφονται οι στόχοι του νέου προγράμματος σπουδών που περιλαμβάνονται σ' αυτήν την ενότητα.
- Σε κάθε παράγραφο υπάρχει η ενότητα ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ –ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ όπου υπάρχουν και συνδέσεις με άλλες μαθηματικές περιοχές που κάποιες μάλιστα δεν έχουν διδαχθεί ακόμα οι μαθητές. Προφανώς, ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος που θα κρίνει ποιες από αυτές θα

διαπραγματευτούν οι μαθητές, ανάλογα με το διδακτικό χρόνο που μπορεί να διατεθεί, με το επίπεδο του τμήματος κ.ο.κ.

- Υπάρχουν πολλές συνδέσεις σε ψηφιακά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε με διαδραστικό πίνακα στην ολομέλεια της τάξης, είτε στο εργαστήριο πληροφορικής (προτείνεται), είτε στο σπίτι από τους μαθητές. Τα μικροπείραματα είναι προσεκτικά επιλεγμένα ώστε να υπάρχει συνάφεια μεταξύ τους (ιδίως όταν εισάγουν έννοιες) και να έχει προστιθέμενη αξία η χρήση τους. Προέρχονται από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, το Φωτόδεντρο και από το GeogebraTube όπου έχουν αναρτηθεί μικροπείραματα (αυτούσια ή τροποποιημένα) που έχουν κατασκευαστεί από την Ομάδα Τεχνολογίας του νέου Προγράμματος Σπουδών και του Οδηγού του Εκπαιδευτικού. Επειδή σε κάποιες ενότητες υπάρχει πλήθος ψηφιακών εργαλείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, προτείνεται να επιλέξει ο εκπαιδευτικός αυτές που θα χρησιμοποιήσει, ώστε να γίνουν την κατάλληλη χρονική στιγμή που οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν κάποια έννοια, να μην υπάρχει αλληλοεπικάλυψη και με τρόπο διερευνητικό.

### Βιβλιογραφία που αξιοποιήθηκε

Βανδουλάκης, Ι. κ.α. (2008). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Έκδοση Β΄ -Ο.Ε.Δ.Β.

Γαβριήλ Άννα. *Το πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης των αρνητικών αριθμών και ο ρόλος της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αντιμετώπισή του*. Διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ 2014 στο <https://goo.gl/E6PrKv> (ημ. πρ. 5/5/17)

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ μαθηματικών [http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps\\_math.pdf](http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps_math.pdf) (ημ. πρ. 5/5/17) από τη σελίδα <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>

Εξορθολογισμός της σχολικής ύλης 2016-2017.

Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2009). *Το πρόβλημα της επιλογής πλαισίου για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεση ρητών αριθμών στα νέα σχολικά εγχειρίδια*. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή και Γ. Φεσάκης (επιμ.) *Πρακτικά 3<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικής Εκπαίδευση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 373-382). Αθήνα: Νέες Τεχνολογίες. <http://www.enedim.gr/index.php/el/2015-12-04-00-05-16/praktika-synedrion-2> (ημ. πρ. 10/12/17)

Ματθαίου Σοφία. *Διδασκαλία των θετικών και αρνητικών αριθμών βασισμένη στις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ 2005 στο [http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_mathaiou.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_mathaiou.pdf) (ημ. πρ. 5/5/17)

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών <https://goo.gl/c5HwNs> (ημ. πρ. 5/5/17) από τη σελίδα <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>

Πολυτίδης, Δ. (2004). *Ένα εμπειρικό μοντέλο διδασκαλίας για την εισαγωγή των πράξεων προσημασμένων αριθμών*. Πρακτικά 21<sup>ου</sup> συνεδρίου ΕΜΕ-Τρίκαλα.