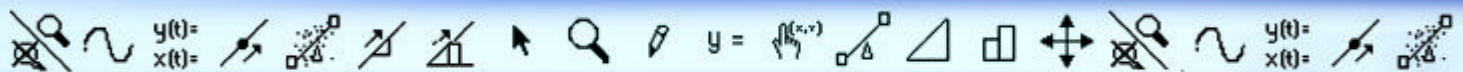


Function Probe

Βιβλίο Μαθητή



EXODUS
C.SOLUTIONS

QUEST
ULTIMEDIA
Austin, TX USA

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ITY



ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ



ΑΘΗΝΑ 2002

Function Probe

Βιβλίο Μαθητή

EXODUS
C.SOLUTIONS

QUEST
MULTIMEDIA
Austin, TX USA

ΕΚΔΗΜΑΤΕΚ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ITY
ΕΑ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ



Πνευματικά Δικαιώματα

Πρωτότυπη έκδοση 4.0 (Java)
Πνευματικά Δικαιώματα © 1998-2002
Cornell Research Foundation
Quest Math & Science Multimedia, Inc.

Προσαρμογή στη ελληνική γλώσσα και στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, Έκδοση 1.0
EXODUS S.A. - Φαραντάτων 6-10, 11527 Αθήνα, Τηλ. 010-7450300, Fax 010-7450399,
www.exodus.gr

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος έργου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με οποιονδήποτε τρόπο αναπαραγωγής έργου λόγου ή τέχνης, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν. 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης Βέρνης-Παρισιού, που κυρώθηκε με το ν. 100/1975.

Ειδικότερα για το ΥΠΕΠΘ ισχύουν τα εξής (σύμφωνα με τη συμφωνία ανάμεσα στην εταιρεία Exodus και το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών για την παραχώρηση άδειας χρήσης, συμβατή με την υπογεγραμμένη στις 29/6/2000 σύμβαση και τα Παραρτήματα I, II και III αυτής):

1. Η εταιρεία Exodus παραχωρεί στο Υπ.Ε.Π.Θ. απλή, μη χρονικά περιορισμένη, μη περαιτέρω μεταβιβάσιμη άδεια χρήσης του εξελληνισμένου προϊόντος με αντικείμενο τη χρήση του στα Ελληνικά Σχολικά Εργαστήρια (όπως αυτά ορίστηκαν στο Κεφ. 1.1. του Παραρτήματος Ε του Οδηγού Υποβολής Προσφορών για το Διαγωνισμό Νο 2 της Κίρκης) και για τον Αριθμό των Σχολικών Εργαστηρίων σε πρώτη φάση (όπως αυτά ορίστηκαν στο Μέρος II, § 1.3.ii.23) και για το σύνολο των σταθμών εργασίας αυτών των σχολικών εργαστηρίων (10 σταθμούς εργασίας ανά σχολικό εργαστήριο).

Στην/ις άδεια/ες χρήσης εμπεριέχεται πρόβλεψη αδιακώλυτης άσκησης από το Υπ.Ε.Π.Θ. των ακόλουθων εξουσιών:

- την εξουσία διαρκούς προσαρμογής του έργου ώστε να ανταποκρίνεται στο σκοπό του εξελληνισμού του και της προσαρμογής του στις τρέχουσες εκπαιδευτικές ανάγκες με τη σύμπραξη του ελληνικού εκδοτικού ή του αλλοδαπού δικαιούχου των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας, με ξεχωριστή αμοιβή που θα συμφωνηθεί μελλοντικά.

- την εξουσία διάδοσης του έργου με οιονδήποτε νόμιμο τρόπο μέσα στα σχολεία, σύμφωνα με τους όρους του παρόντος.

2. Η εταιρεία Exodus δεσμεύεται ότι η τιμή πώλησης του εξελληνισμένου προϊόντος στην ελληνική αγορά δεν θα ξεπερνά την τιμή πώλησης της συγκεκριμένης έκδοσης του αρχικού προϊόντος στη διεθνή αγορά.

3. Η εταιρεία Exodus παραχωρεί στο Υπ.Ε.Π.Θ. το δικαίωμα ελεύθερης χρήσης των δεδομένων που θα παραχθούν για τον εξελληνισμό του προϊόντος, για μη εμπορικούς σκοπούς, από το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα και για πρακτικά απεριόριστο χρονικό διάστημα.

Φορείς Υλοποίησης του Έργου

Πρωτότυπη έκδοση
Cornell Research Foundation
Quest Math & Science Multimedia, Inc.
<http://www.grandecom.net/~questmsm/Home.htm>

Προσαρμογή λογισμικού στην ελληνική γλώσσα
Exodus A.E.
<http://www.exodus.gr>

Υπεύθυνοι έργου αναδόχου
Αθηνά Ζαμπάρα, Άννα Κοτζάμπαση

Παιδαγωγικός υπεύθυνος
Λητώ Λάσκου

Συγγραφή και προσαρμογή συνοδευτικού υλικού
Νικολέτα Σιδηρά-Ξένου
Ξένια Σιούπη

Μετάφραση
Ελένη Αθανασάτου

Φιλολογική επιμέλεια
Άννη Θεοδούλου

Καλλιτεχνική επιμέλεια εντύπων
Μαρία Χατζημυχαλίδου

Σχεδιασμός ενδεικτικής περιήγησης
Μάρη Ζονουδάκη

Γραφίστες
Ιωάννης Στύλος, Χριστίνα Κουντούρη

Προγραμματισμός λογισμικού
Διαμαντής Αστέρης, Περικλής Κουτσογιάννης

Προγραμματισμός ενδεικτικής περιήγησης
Παναγιώτης Χριστοδούλου

Υπεύθυνος ελέγχου ποιότητας
Γεώργιος Κωνσταντινίδης

Φορείς του έργου Κίρκη
Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας
Υπολογιστών (Ε.Α. ΙΤΥ), <http://www.cti.gr>
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (ΠΙ), <http://www.pi-schools.gr>

ΥΠΕΠΘ <http://www.ypepth.gr>
(Διευθύνσεις Σπουδών Δευτεροβάθμιας
Εκπαίδευσης
και Κοινωνικού Παισίου Στήριξης)

Σύνδεσμοι παρακολούθησης του έργου
Γιώργος Ανδρουλάκης, Ε.Α. ΙΤΥ
Σταυρούλα Σκούρα-Θηρίου, ΠΙ
Βίβιαν Αντωνακοπούλου, Ε.Α. ΙΤΥ

Function Probe

>	Πρόλογος	5
>	Συμβουλές για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων	7
>	Εκπαιδευτικές δραστηριότητες	9
>	Ομάδα Α: Γραμμικές Συναρτήσεις	9
1.	Το πρόβλημα με τις πίτσες	9
	Μέρος Ι. Κατασκευή 'Πίνακα'	9
	Μέρος ΙΙ. Χρήση του παραθύρου 'Αριθμομηχανή'	12
	Μέρος ΙΙΙ. Γραφική παράσταση	17
	Μέρος ΙV. Εκτύπωση και κλείσιμο	21
	Φύλλο εργασίας-Ερωτήσεις	22
2.	Το πρόβλημα του πέτρινου μονοπατιού	23
3.	Τα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα	27
4.	Το ταξίδι	29
>	Ομάδα Β: Εκθετική / Λογαριθμική Συνάρτηση	32
5.	Ο πολλαπλασιασμός των βακτηριδίων	32
6.	Η αύξηση του πληθυσμού	35
7.	Επένδυση χρημάτων	37
8.	Μετασχηματισμοί στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση	38
>	Ομάδα Γ: Δευτεροβάθμιες Συναρτήσεις	40
9.	Ο Πύραυλος	40
10.	Η πρόσκληση	43
11.	Η εκδρομή	45
12.	Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$	47
13.	Ο παραγωγός μήλων	50
>	Ομάδα Δ: Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	53
14.	Ο Τροχός του Λούνα Παρκ	53
15.	Πρόβλεψη θερμοκρασιών	54
16.	Μελέτη των συναρτήσεων $y = \eta \mu x$, $y = \sigma \nu x$ και των μετασχηματισμών τους.	55
17.	Μελέτη των συναρτήσεων $y = \epsilon \phi x$, $y = \sigma \phi x$ και των μετασχηματισμών τους	60
>	Ομάδα Ε: Άλλες Συναρτήσεις	65
18.	Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση της απόλυτης τιμής	65
19.	Το πρόβλημα του χώρου στάθμευσης	73
20.	Μελέτη της συνάρτησης $y = a/x$ και των μετασχηματισμών της	77
>	Πίνακας συναρτήσεων	86

Πρόλογος

Η επίλυση προβλημάτων βρίσκεται στην καρδιά των Μαθηματικών. Σε αυτό το βιβλίο προσπαθούμε να παρουσιάσουμε περισσότερα προβλήματα παρά ασκήσεις. Τα προβλήματα έχουν πολλά βήματα και απαιτούν από σένα, το μαθητή, να προσδιορίσεις τι ακριβώς ζητείται να λυθεί. Τα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα είναι βασισμένα σε πραγματικές καταστάσεις ενώ στις ασκήσεις πρέπει απλώς να εφαρμόσεις έναν κανόνα που έχεις αποστηθίσει ή μια ορισμένη διαδικασία. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διπλός: θέλουμε να σε βοηθήσουμε να δεις πως τα Μαθηματικά που μαθαίνεις έχουν άμεση σχέση με την καθημερινότητά σου και επίσης, πιστεύουμε πως το πραγματικό νόημα στις μαθηματικές οικογένειες των συναρτήσεων, με τις οποίες θα δουλέψεις με αυτό το βιβλίο, προέρχεται από την ανθρώπινη δραστηριότητα. Τα Μαθηματικά δεν πέσανε από τον ουρανό! Δεν είναι το αποτέλεσμα ενός μαγικού κόλπου! Είναι το αποτέλεσμα της ανθρώπινης προσπάθειας να επιλυθούν προβλήματα και να αποκτηθεί μια καλύτερη γνώση του κόσμου που μας περιβάλλει. Κατασκευάζουμε μοντέλα για το πώς δουλεύουν τα πράγματα και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε διάφορες μεθόδους για να ερευνήσουμε τον κόσμο γύρω μας. Οι οικογένειες συναρτήσεων είναι δυναμικοί τρόποι που έχουμε αναπτύξει για να επιτύχουμε τον παραπάνω στόχο. Προσπάθησε να δεις πώς η δράση σε ένα πρόβλημα κωδικοποιείται στις μαθηματικές αναπαραστάσεις ενός διαγράμματος, ενός πίνακα, μιας γραφικής παράστασης ή μιας αλγεβρικής έκφρασης.

Σου παρέχουμε πολλαπλούς τρόπους, για να αναπαραστήσεις τις συναρτήσεις: πίνακες, γραφικές παραστάσεις, τύπους. Κι αυτό γιατί το να γνωρίζεις κάτι στα Μαθηματικά δεν είναι το ίδιο με το να γνωρίζεις ένα γεγονός. Μοιάζει με το πώς υφαίνεις ένα χαλί. Όσο περισσότερες ίνες δένονται μαζί για να το συνθέσουν, τόσο πιο ανθεκτικό γίνεται το υλικό. Πρέπει να δουλεύεις κάθε αναπαράσταση προσεκτικά και με πολλή σκέψη και στη συνέχεια να υφάνεις τις αναπαραστάσεις μαζί, κάνοντας τις συγκρίσεις και βρίσκοντας τις αντιθέσεις στις αναλύσεις σου.

Όταν χρησιμοποιείς αυτό το υλικό, δοκίμασε να ακολουθήσεις την παρακάτω προσέγγιση: προσπάθησε να μάθεις να αναγνωρίζεις την οικογένεια των συναρτήσεων, που χρειάζεται για να μοντελοποιηθεί η κατάσταση. Οι συναρτήσεις μπορεί να είναι γραμμικές, δευτεροβάθμιες, τριγωνομετρικές, εκθετικές ή ένας συνδυασμός αυτών.

Στη συνέχεια, μέσω της έννοιας των μετασχηματισμών προσπάθησε να προσαρμόσεις τη συνάρτησή σου σε κάθε ξεχωριστή κατάσταση που συναντάς.

Να δώσεις ιδιαίτερη προσοχή στα παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων που περιλαμβάνουν παραλλαγές σε ένα είδος συνάρτησης. Δηλαδή, αν κάποιος μάθει έναν τρόπο που παίζεται το κυνηγητό, τότε εύκολα μαθαίνονται επίσης όλες οι παραλλαγές του, το 'με κλειστά φώτα', η τυφλόμυγα ή και η αμπάριζα! Σου δίνεται αυτό που ονομάζουμε "συνάρτηση-αρχέτυπο" και στη συνέχεια σου ζητείται να ερευνήσεις πώς αυτή αλλάζει, αν χρησιμοποιήσεις διαφορετικές "παραμέτρους". Για παράδειγμα, αν γνωρίζεις πώς μοιάζει η $y = \eta\mu x$, τότε μπορείς να προβλέψεις τη μορφή της $y = 3\eta\mu x$. Μην επικεντρωθείς μόνο στο πώς φαίνονται οι αλλαγές αλλά και στο πώς κάνεις την έρευνα αυτή καθαυτή. Η διερεύνηση είναι ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της επίλυσης προβλημάτων.

Κυρίως όμως πρέπει να διασκεδάσεις, καθώς χρησιμοποιείς αυτό το υλικό. Τα συναισθήματα είναι σημαντικά όταν λύνεις προβλήματα! Η απογοήτευση συχνά προηγείται της εύρεσης μιας λύσης. Την πρώτη φορά που καταλαβαίνεις πλήρως μια λύση ή μια μέθοδο, σίγουρα νοιώθεις μεγάλη χαρά! Δεν έχει σημασία αν κάποιος άλλος την έχει βρει νωρίτερα. Αν ηρεμήσεις, μπορεί ξαφνικά να σου 'κατέβει' μια λύση που έψαχνες μάταια για πολλή ώρα!

Μερικοί από σας ξεκινούν κουβαλώντας ψυχολογικά βάρη από προηγούμενα μαθήματα μαθηματικών, που οπωσδήποτε θα δυσκολέψουν το τωρινό μάθημα. Για κάποιους αυτά τα βάρη είναι προκαταλήψεις για το πώς υποτίθεται ότι είναι τα Μαθηματικά. Μπορεί να περιμένετε πολλές ασκήσεις, μεθόδους καθοδηγητικές από τους δασκάλους και πολλή αποστήθιση. Αλλά τα πράγματα δεν θα είναι έτσι. Εσείς λοιπόν που σκέφτεστε με αυτόν τον τρόπο, καλό είναι να αναλογιστείτε ότι, έξω από το σχολείο, σπάνια κανείς συναντάει στη ζωή του προβλήματα, τα οποία επιλύονται με προκαθορισμένους κανόνες. Να έχετε υπομονή με τις καινούριες μεθόδους. Θα χρειαστεί κάποιος χρόνος, για να αλλάξουν οι παλιές σας αντιλήψεις.

Άλλοι μπορεί να νοιώθουν απογοήτευση, θυμό ή φόβο απέναντι στα Μαθηματικά. Αυτό είναι πολύ συχνά το αποτέλεσμα περασμένων θλιβερών εμπειριών. Πράγματι μπορεί κανείς να πιστεύει πως τα Μαθηματικά προκαλούν σύγχυση, φόβο ή και ντροπή για την άγνοιά τους. Για σας, λοιπόν, η συμβουλή μας είναι να αναγνωρίσετε πως τα συναισθήματα αυτά σας έχουν εντυπωθεί και δεν μπορείτε να τα ξεχάσετε αυτόματα, μπορείτε όμως να τα ξεπεράσετε σιγά - σιγά. Μπορείτε να μελετάτε Μαθηματικά μαζί με φίλους σας και να μιλάτε γι' αυτά τα συναισθήματα, αναγνωρίζοντας πως παρότι είναι αληθινά και δεν έχετε άδικο να τα νιώθετε από καιρού εις καιρό, ωστόσο αν δεν τα ξεπεράσετε θα σας εμποδίσουν να προχωρήσετε και να μάθετε. Και αυτό θα συμβεί, μόλις καταλάβετε ότι πραγματικά μπορείτε να ασχοληθείτε με τα Μαθηματικά με επιτυχία! Πολλές φορές έχουμε δει μαθητές που δεν τα πήγαιναν καθόλου καλά με τα Μαθηματικά, να αντιδρούν πολύ θετικά στην επίλυση προβλημάτων. Πολλοί από αυτούς είχαν τιμωρηθεί, γιατί επέμεναν να σκέφτονται με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που μάθαιναν στην τάξη τους. Αυτοί ακριβώς οι μαθητές συχνά καταλήγουν οι καλύτεροι στην επίλυση προβλημάτων, παρότι έχουν συνήθως να καλύψουν κάποια κενά. Δώστε λοιπόν στον εαυτό σας μια νέα ευκαιρία.

Κάποιοι από σας θα ξεκινήσουν τη χρήση του νέου υλικού με αυτοπεποίθηση και ενθουσιασμό. Αυτό είναι πολύ σπουδαίο και είστε πολύ τυχεροί. Εσάς, σας συμβουλεύουμε να μην επικεντρωθείτε μόνο στον τρόπο που θα λύνετε το κάθε πρόβλημα, αλλά να δώσετε προσοχή και στον τρόπο που εργάζονται οι υπόλοιποι. Η δυνατότητα να βρίσκεις εναλλακτικές λύσεις και να εξηγείς το πρόβλημα σε άλλους ακούγοντας τις ιδέες τους είναι σίγουρα δείγμα βαθιάς κατανόησης.

Όλοι σας πρέπει να θεωρήσετε αυτά τα προβλήματα μόνο ως σημείο εκκίνησης. Να έχετε τα μάτια σας ανοιχτά για καλύτερα προβλήματα που προέρχονται από τις δικές σας εμπειρίες, να τα φέρνετε στην τάξη και να τα μοιράζεστε με τους υπόλοιπους. Μπορείτε να δημιουργήσετε νέα προβλήματα, αλλάζοντας τα νούμερα, τις ποσότητες ή τις ερωτήσεις. Προσθέστε καινούριες συνθήκες σε ένα πρόβλημα και δείτε, αν μπορείτε να το λύσετε. Συχνά βλέπουμε μαθητές να προτείνουν νέες ιδέες και τρόπους για τη λύση ενός προβλήματος που μερικές φορές είναι καλύτερες από αυτές που σκέφτονται οι ίδιοι οι καθηγητές. Να λέτε, λοιπόν, τις ιδέες σας στους καθηγητές σας. Να θυμάστε ότι η αποτελεσματική μάθηση συνδέεται πάντα με τις ιδέες που έχετε ήδη σκεφτεί.

Συμβουλές για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων

1. Διάβασε το πρόβλημα προσεχτικά. Πού βρίσκεται η καρδιά του προβλήματος; Ξαναδιάβασέ το και υπογράμμισε τα σημαντικά σημεία, μέχρι να μπορείς να εξηγήσεις σε ένα συμμαθητή σου τι πιστεύεις ότι ζητάει το πρόβλημα.
2. Να φτιάξεις ένα πλάνο δράσης. Προσδιόρισε τι πιστεύεις ότι μπορείς να κάνεις. Μπορεί να θέλεις να γράψεις ή να σχεδιάσεις το πλάνο σου. Μη διστάζεις να δοκιμάζεις διάφορα πράγματα. Ποτέ δεν ξέρεις τι μπορεί να ανακαλύψεις. Μιλώντας για το πρόβλημα στην τάξη ή με κάποιο συμμαθητή σου μπορεί να βοηθηθείς στη λύση του.
3. Μην περιμένεις να λύσεις τα πάντα κατευθείαν. Μόνο στα 'λυσάρια' μπορείς να λύσεις τα προβλήματα απλώς αντιγράφοντας τις πράξεις. Μπορείς να το σκεφτείς ακόμα και για μέρες. Το να γνωρίζεις ένα πρόβλημα σε βάθος είναι καλύτερο από το να γνωρίζεις πολλά μικρά προβλήματα.
4. Σχεδίασε μια εικόνα ή ένα διάγραμμα. Ένα απλό σκίτσο μπορεί να σε βοηθήσει να ξεκινήσεις. Μερικές φορές ένα προσεχτικό σχέδιο μπορεί να είναι το κλειδί της επίλυσης ενός προβλήματος, οπότε είναι πιθανό να σου φανεί χρήσιμο να ξαναφτιάξεις ένα διάγραμμα χρησιμοποιώντας χαρτί μιλιμετρέ ή χάρακα, για να το κάνεις σε κλίμακα και με ακρίβεια. Να φροντίσεις να ονομάσεις σωστά το διάγραμμα σου, ώστε να μπορεί να το διαβάσει και να το καταλάβει οποιοσδήποτε.
5. Ένας πίνακας είναι πολύτιμος για να ξεκινήσεις. Να χρησιμοποιήσεις πολλά αριθμητικά παραδείγματα, μέχρι να καταλάβεις το νόημα του προβλήματος. Να δώσεις στον πίνακα σου συνεχείς τιμές, για να ψάξεις τις συσχετίσεις. Να φροντίσεις τελικά να χρησιμοποιήσεις ποικίλες τιμές: μεγάλα νούμερα, κλάσματα, αρνητικούς αριθμούς, το μηδέν, το π. Τέτοιου είδους αριθμοί μπορεί να σε βοηθήσουν να βρεις τις συσχετίσεις σε ένα πρόβλημα.
6. Αν ένα πρόβλημα που σου έχει δοθεί είναι πολύ δύσκολο, να βρεις ένα απλούστερο του ίδιου τύπου και να το λύσεις. Σταδιακά να το κάνεις πιο πολύπλοκο, μέχρι να γίνει όπως το πρόβλημα που αρχικά είχες. Ένας τρόπος για να το κάνεις αυτό είναι να μετατρέψεις τα νούμερα του αρχικού προβλήματος σε ακέραιους, τους οποίους μπορείς να δουλέψεις ευκολότερα.
7. Να ονομάσεις με ακρίβεια τις μεταβλητές σου. Για την απόσταση, να ορίσεις ακριβώς ποιο μήκος μετράς. Για το χρόνο να διαλέξεις με προσοχή το χρονικό σημείο που αρχίζεις. Είναι, επίσης, πολύ σημαντικό να ορίζεις τις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιείς (έτη, μήνες, εβδομάδες, ημέρες, ώρες, κτλ.).
8. Όταν γράφεις τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, να φροντίσεις να είσαι αρκετά αναλυτικός, ώστε ο καθηγητής και οι συμμαθητές σου να μπορούν να ακολουθήσουν τον ειρμό των σκέψεών σου. Να χρησιμοποιείς προτάσεις, για να εξηγήσεις ολοκληρωμένα τη μέθοδό σου. Αν πιστεύεις ότι μπορεί να δημιουργηθούν αμφιβολίες σε κάποιον που διαβάζει το γραπτό σου σε κάποια σημεία, να το αναφέρεις.
9. Όταν χρησιμοποιείς διαγράμματα, να ονομάσεις τους άξονες προσεχτικά, καθώς και τις μεταβλητές, τι αναπαριστούν και ποιες είναι οι μονάδες μέτρησής τους. Είναι, επίσης, συχνά καλή ιδέα να ονομάσεις ένα ή δύο σημεία με συντεταγμένες. Τα διαγράμματα που γίνονται από

τον υπολογιστή πρέπει να έχουν όλες τις πληροφορίες, για να μπορεί όποιος τα διαβάξει, να καταλάβει τι αναπαριστούν.

10. Οι έννοιες 'πεδίο ορισμού' και 'σύνολο τιμών' μιας συνάρτησης μπορεί επίσης να βοηθήσουν να πάρεις μια ιδέα γι' αυτή. Να σκέφτεσαι το πλαίσιο του προβλήματος. Η συνάρτηση πρέπει να παίρνει όλες τις τιμές, μόνο θετικές ή μόνο ακέραιες; Θα δίνει όλες τις τιμές, μόνο θετικές ή μόνο ακέραιες; Όταν ορίζεις πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, να προσδιορίσεις αν αναφέρεται στις συνθήκες του προβλήματος ή στην πιο γενική μαθηματική συνάρτηση που χρησιμοποιείς για τη λύση.
11. Όταν προσπαθείς να γράψεις έναν αλγεβρικό τύπο, μην περιμένεις να σου πέσει από τον ουρανό. Να μένεις κοντά στις υπόλοιπες αναπαραστάσεις σου: τη διατύπωση του προβλήματος, τον τρόπο που υπολόγισες τις τιμές του πίνακα ή τη μορφή του διαγράμματος. Προσπάθησε να κωδικοποιήσεις βήμα προς βήμα αυτό που έκανες για να λύσεις το πρόβλημα.
12. Αν ο τύπος σου μπορεί να γραφτεί αλγεβρικά σε άλλη μορφή, δοκίμασε αν η νέα μορφή συμβαδίζει με τις συνθήκες του προβλήματος.
13. Να ελέγχεις τη συνέπεια των αναπαραστάσεών σου. Αντιστοιχεί ο τύπος σου με τη γραφική παράσταση; Έχεις θέσει όρια στο πεδίο ορισμού σου;
14. Να ελέγχεις εισάγοντας σημεία (περισσότερα από ένα) από το αρχικό σου πρόβλημα, ώστε να μην επαναλαμβάνονται λάθη που πιθανώς προέρχονται από την ερμηνεία του προβλήματος σε άλλη μορφή.
15. Αν κολλήσεις σε κάποιο σημείο, ζήτη τη βοήθεια ενός συμμαθητή σου, κοίταξε στα βιβλία σου ή ρώτα τον καθηγητή σου. Μην παραιτείσαι!

Jere Confrey και Alan Maloney
email: info@questmath.com
Austin, Texas
1999

Συμβάσεις του λογισμικού Function Probe

Στο Function Probe υπάρχουν οι εξής συμβάσεις:

- > Χρησιμοποιούνται οι διεθνείς ονομασίες των συναρτήσεων (για παράδειγμα \cos για τη συνάρτηση του συνημιτόνου και \sin για το ημίτονο). Για τη διευκόλυνση του χρήστη, σε όλα τα εγχειρίδια υπάρχει ένας πίνακας με τις αντιστοιχίες των συναρτήσεων, καθώς και μια σύντομη περιγραφή τους.
- > Για την κατασκευή των δυνάμεων, θα πρέπει να χρησιμοποιείται το πλήκτρο '^' ('Shift+6'). Για περισσότερες πληροφορίες βλ. την ενότητα στη σελ.38 του Εγχειριδίου Χρήστη.
- > Σε όλα τα παράθυρα, για τη γραφή των δεκαδικών αριθμών χρησιμοποιείται η τελεία αντί της υποδιαστολής. Θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή αν από τον 'Πίνακα Ελέγχου' των Windows έχουν επιλεγεί οι τοπικές ρυθμίσεις για την Ελλάδα. Σε αυτήν την περίπτωση, το πλήκτρο '.' του αριθμητικού πληκτρολογίου εισαγάγει την υποδιαστολή και όχι την τελεία.
- > Οι μεγάλοι αριθμοί μετατρέπονται αυτόματα σε τυποποιημένη μορφή.
- > Για την εισαγωγή των μεταβλητών (και των συναρτήσεων), θα πρέπει να είναι επιλεγμένο το αγγλικό πληκτρολόγιο.

Εκπαιδευτικές Δραστηριότητες

Ομάδα Α: Γραμμικές Συναρτήσεις

1. Το πρόβλημα με τις πίτσες

Μία πιτσαρία φτιάχνει στρογγυλές πίτσες σε 5 διαφορετικά μεγέθη:

- > ατομική πίτσα με διάμετρο 15 cm
- > πίτσα μεσαίου μεγέθους με διάμετρο 30 cm
- > πίτσα μεγάλου μεγέθους με διάμετρο 45 cm
- > πίτσα 'πάρτυ' με διάμετρο 60 cm
- > πίτσα 'γίγας' με διάμετρο 75 cm

Ο ιδιοκτήτης της πιτσαρίας έχει καθιερώσει μια παράξενη 'οικονομική πολιτική' που σας επιτρέπει να πληρώσετε την πίτσα σας με δύο διαφορετικούς τρόπους:

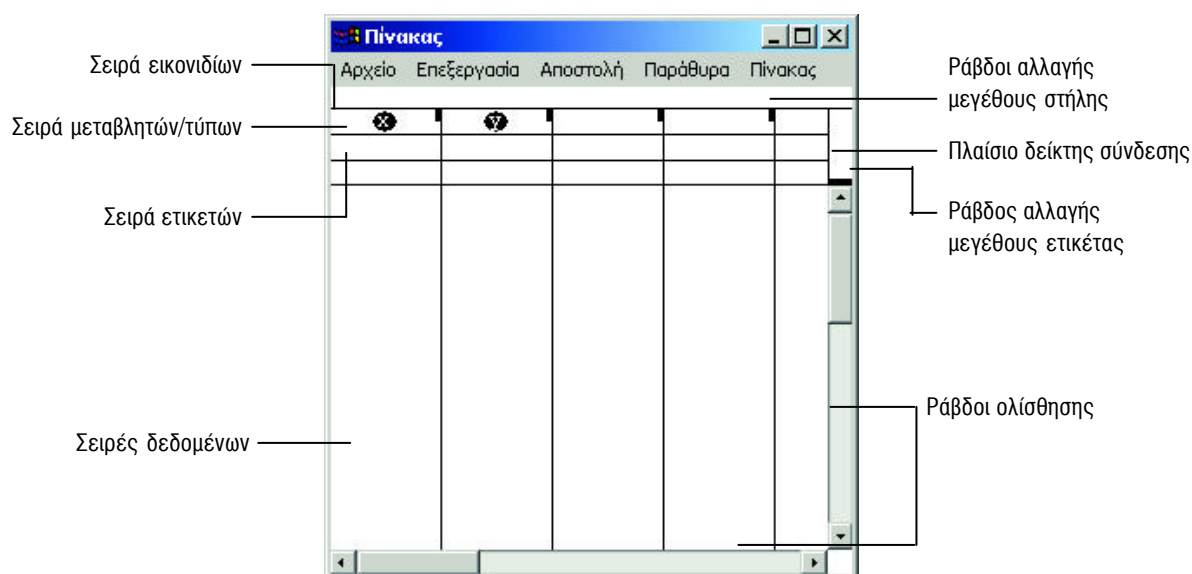
1. Πληρώνετε 6 λεπτά για κάθε εκατοστό της περιφέρειάς της.
2. Πληρώνετε 0,7 λεπτά για κάθε τετραγωνικό εκατοστό του εμβαδού της.

Διαλέξτε τον τρόπο που σας συμφέρει, για να πληρώσετε την πίτσα που θα αγοράσετε.

Μέρος Ι. Κατασκευή 'Πίνακα'

Βήμα 1. Άνοιγμα του Function Probe

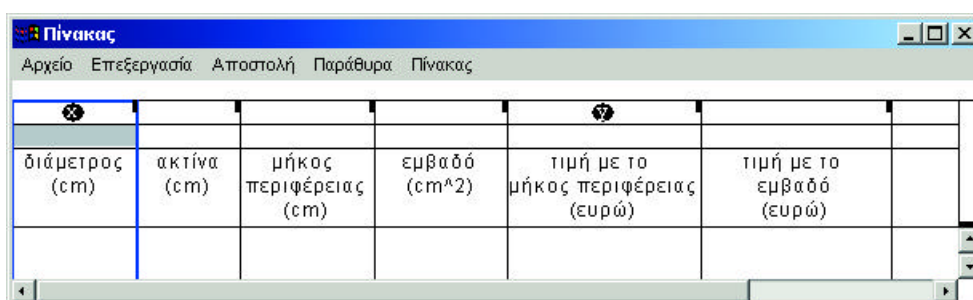
Το Function Probe ανοίγει με διπλό κλικ στο εικονίδιό του και κατόπιν με κλικ στο πλήκτρο 'ΟΚ'. Στην οθόνη εμφανίζονται τρία παράθυρα. Το 'Γράφημα', ο 'Πίνακας' και η 'Αριθμομηχανή'. Μπορείτε να ενεργοποιήσετε το παράθυρο 'Πίνακας' με ένα κλικ πάνω σ' αυτό. Μπορείτε να αλλάξετε το μέγεθός του τοποθετώντας το δείκτη στην κάτω δεξιά γωνία του παραθύρου, κάνοντας κλικ και σύροντας το ποντίκι όταν ο δείκτης γίνει βέλος (για περισσότερες οδηγίες βλ. το **Εγχειρίδιο Χρήστη**).



Η σειρά εικονιδίων χρησιμοποιείται για να στέλνετε τιμές από το παράθυρο 'Πίνακας' στο παράθυρο 'Γράφημα'. Η σειρά μεταβλητών/τύπων χρησιμεύει για να εισαγάγετε μια μεταβλητή ή ένα τύπο σε μια στήλη. Η σειρά ετικετών χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη μεταβλητή (ή τον τύπο) και τις μονάδες τους. Τα δεδομένα εισαγάγονται στις σειρές δεδομένων.

Βήμα 2. Εισαγωγή ετικετών

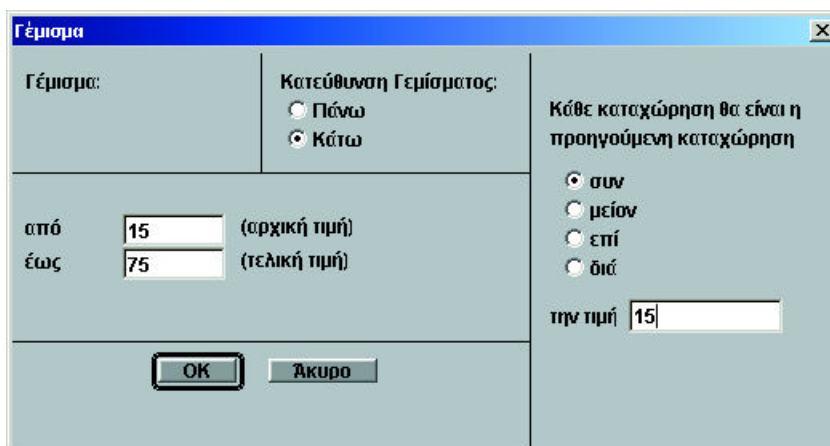
Τοποθετήστε το δείκτη στη σειρά ετικετών της πρώτης στήλης και ονομάστε τη 'διάμετρος'. Συμπληρώστε με τον ίδιο τρόπο τις υπόλοιπες στήλες σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα. Μπορείτε να αλλάξετε το πλάτος της κάθε στήλης σύροντας τη ράβδο αλλαγής μεγέθους της στήλης. Επίσης, μπορείτε να αλλάξετε το ύψος της σειράς ετικετών σύροντας τη ράβδο αλλαγής μεγέθους ετικέτας.



διάμετρος (cm)	ακτίνα (cm)	μήκος περιφέρειας (cm)	εμβαδό (cm ²)	τιμή με το μήκος περιφέρειας (ευρώ)	τιμή με το εμβαδό (ευρώ)

Βήμα 3. Εισαγωγή δεδομένων

Υπάρχουν δύο τρόποι για να εισαγάγετε τις πέντε διαφορετικές τιμές της διαμέτρου στην πρώτη στήλη. Ο πρώτος είναι να πληκτρολογήσετε μια-μια τις τιμές της διαμέτρου. Επειδή για μεγάλο όγκο δεδομένων αυτό θα είναι κουραστικό, το Function Probe σας δίνει τη δυνατότητα να εισαγάγετε τα δεδομένα σας πιο εύκολα, με τη βοήθεια της εντολής 'Γέμισμα'. Κάντε κλικ στην πρώτη σειρά της περιοχής δεδομένων στη στήλη "διάμετρος" και κατόπιν επιλέξτε την εντολή 'Γέμισμα' από το μενού 'Πίνακας'. Εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο διαλόγου στο οποίο θα πρέπει να δώσετε τρεις τιμές: την αρχική τιμή, την τελική τιμή και την τιμή που προστίθεται σε κάθε προηγούμενη καταχώρηση. Επειδή θέλουμε η αρχική τιμή να είναι 15, πληκτρολογείτε τον αριθμό 15 στο πλαίσιο 'από'. Πατήστε το πλήκτρο 'Tab', για να μεταφερθείτε και να συμπληρώσετε στη συνέχεια στο πλαίσιο 'έως' την τελική τιμή 75. Επιλέγεται την ένδειξη 'συν' και στο πλαίσιο 'την τιμή' συμπληρώνετε '15', που είναι ο αριθμός που πρέπει να προστεθεί σε κάθε προηγούμενό του. Ολοκληρώνετε κάνοντας κλικ στο πλήκτρο 'OK'.



Γέμισμα

Γέμισμα: Κατεύθυνση Γερίσματος:

☐ Πάνω ☒ Κάτω

από 15 (αρχική τιμή)

έως 75 (τελική τιμή)

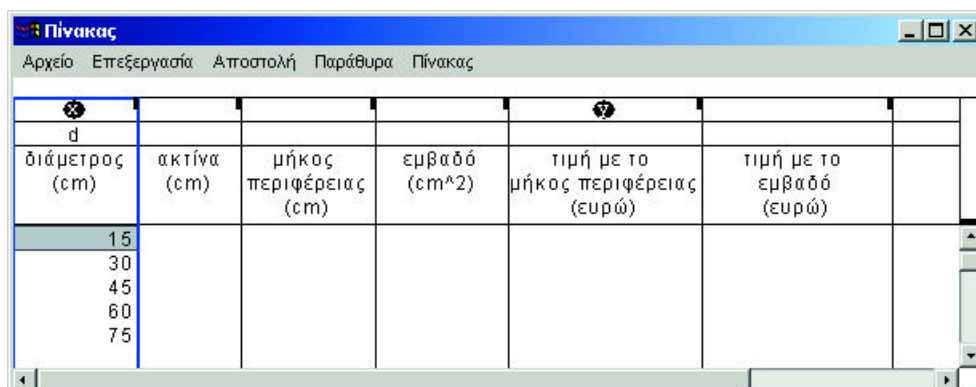
Κάθε καταχώρηση θα είναι η προηγούμενη καταχώρηση

☒ συν ☐ μείον ☐ επί ☐ διά

την τιμή 15

OK Άκυρο

Με τον τρόπο αυτό θα εμφανιστούν στην πρώτη στήλη οι τιμές 15, 30, 45, 60, 75, όπως φαίνεται παρακάτω:



διάμετρος (cm)	ακτίνα (cm)	μήκος περιφέρειας (cm)	εμβαδό (cm ²)	τιμή με το μήκος περιφέρειας (ευρώ)	τιμή με το εμβαδό (ευρώ)
15					
30					
45					
60					
75					

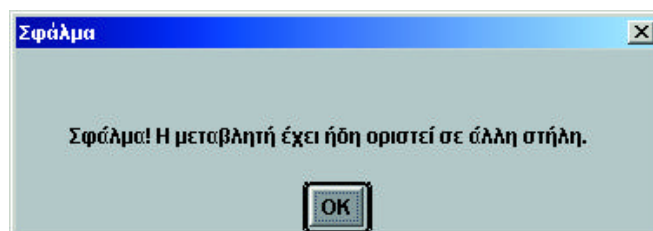
Βήμα 4. Χρήση μεταβλητών και τύπων

Για να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες θα πρέπει να καταχωρήσετε στη σειρά μεταβλητών/τύπων τους κατάλληλους τύπους και το Function Probe θα συμπληρώσει όλες τις στήλες αυτόματα. Πρέπει να δώσετε το όνομα μιας μεταβλητής για κάθε στήλη. *Προσοχή!* Δε μπορείτε να δώσετε το ίδιο όνομα μεταβλητής σε δύο διαφορετικές στήλες, όμως το Function Probe αναγνωρίζει π.χ. το A και a σαν διαφορετικές μεταβλητές. Πηγαίνετε, λοιπόν, στη στήλη που έχετε ονομάσει 'διάμετρος' και πληκτρολογείτε στη σειρά μεταβλητών/τύπων το γράμμα π.χ. d, και στη στήλη που έχετε ονομάσει 'ακτίνα' γράφετε $r=d/2$ ή $r=0,5d$, αφού η ακτίνα είναι το μισό της διαμέτρου. Στη συνέχεια πατάτε το πλήκτρο 'Enter' και έτσι στη στήλη αυτή θα συμπληρωθούν αυτόματα οι τιμές της ακτίνας. Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να πληκτρολογήσετε τους τύπους και στις υπόλοιπες στήλες: $c=\pi d$ (ή $c=2\pi r$) και $a=\pi r^2$ ($a=\pi r^2$). Για να γράψετε το 'π' πατήστε ταυτόχρονα τα πλήκτρα 'Shift+P' (το πληκτρολόγιο πρέπει να είναι στην αγγλική γλώσσα), και για να γράψετε τη δύναμη τα πλήκτρα 'Shift+6'.

Προσοχή! Όταν εισαγάγετε τις μεταβλητές, πρέπει να προσέξετε να έχετε επιλέξει το αγγλικό πληκτρολόγιο! Επίσης, όταν εισαγάγετε δεκαδικούς αριθμούς θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την τελεία αντί την υποδιαστολή!

Βήμα 5. Δημιουργία δεδομένων

Τώρα είσαστε έτοιμοι να ολοκληρώσετε τον πίνακα συμπληρώνοντας τις τιμές της πίτσας σύμφωνα με τους δύο διαφορετικούς τρόπους πληρωμής. Αφού η τιμή με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου είναι 6 λεπτά (δηλαδή 0,06 ευρώ) για κάθε εκατοστό, πληκτρολογείτε στη σειρά μεταβλητών/τύπων τον τύπο $p=0,06c$ και στην επόμενη στήλη $p=0,007a$ (τιμή με το εμβαδό). *Προσοχή!* Πρέπει να κάνετε την κατάλληλη μετατροπή για να βρείτε την τιμή της πίτσας σε ευρώ! Όταν πατήσετε το πλήκτρο 'Enter', θα εμφανιστεί το παρακάτω μήνυμα σφάλματος.



Το Function Probe σας ενημερώνει ότι η μεταβλητή p χρησιμοποιείται ήδη σε κάποια άλλη στήλη. Για να το διορθώσετε κάντε κλικ στο κουμπί 'OK' και αντικαταστήστε τη μεταβλητή p με κάποιο άλλο γράμμα π.χ. m . Όταν τελειώσετε με αυτή τη διαδικασία, ο πίνακας θα έχει την παρακάτω μορφή:

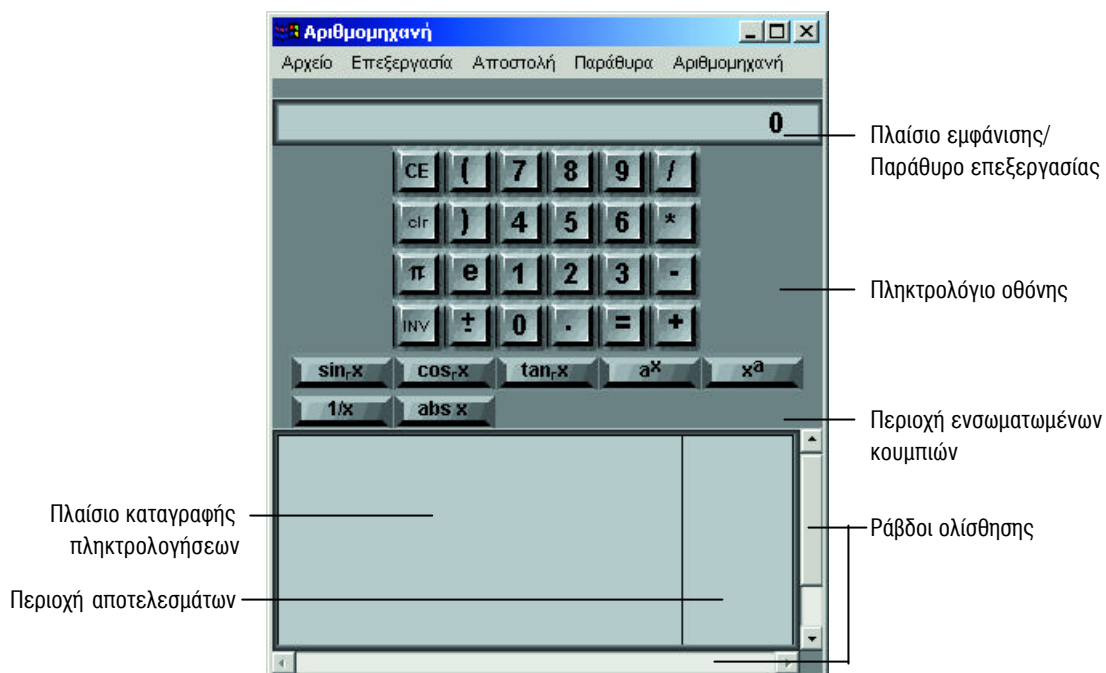
Πίνακας					
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρο Πίνακας					
d	$r=d/2$	$c=2\pi r$	$a=\pi r^2$	$p=0.06c$	$m=0.007a$
διάμετρος (cm)	ακτίνα (cm)	μήκος περιφέρειας (cm)	εμβαδό (cm ²)	τιμή με το μήκος περιφέρειας (ευρώ)	τιμή με το εμβαδό (ευρώ)
15	7.5	47.12	176.71	2.83	1.24
30	15	94.25	706.86	5.65	4.95
45	22.5	141.37	1590.43	8.48	11.13
60	30	188.5	2827.43	11.31	19.79
75	37.5	235.62	4417.86	14.14	30.93

Παρατηρήστε τις τιμές στον πίνακα και απαντήστε στις ερωτήσεις 1 και 2 του φύλλου εργασίας.

Και τώρα φροντίστε να αποθηκεύσετε την εργασία σας! Επιλέξτε την εντολή 'Αποθήκευση χώρου εργασίας' από το μενού 'Αρχείο' (εάν επιλέξετε την εντολή 'Αποθήκευση παραθύρου' θα αποθηκεύσετε μόνο τα δεδομένα του 'Πίνακα'). Το πλαίσιο αποθήκευσης που εμφανίζεται σας ζητάει το όνομα που θέλετε να δώσετε στο αρχείο που έχετε δημιουργήσει μέχρι αυτό το σημείο. Πληκτρολογήστε 'Tutorial.prb' (ή όποια άλλη ονομασία θέλετε) και κατόπιν κάντε κλικ στο κουμπί 'Αποθήκευση'.

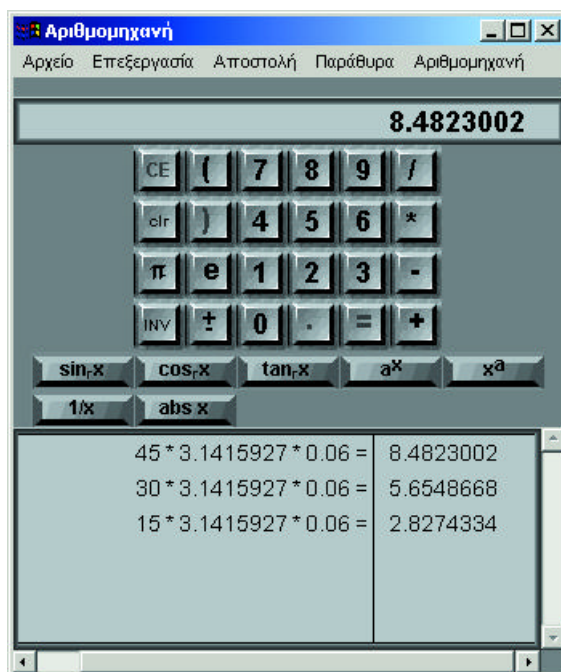
Μέρος II. Χρήση του παραθύρου 'Αριθμομηχανή'

Ο ιδιοκτήτης της πιτσαρίας λέει τώρα ότι θα μπορούσε να φτιάχνει οποιοδήποτε μέγεθος πίτσας, αν είχε τη δυνατότητα να υπολογίζει εύκολα την τιμή της και με τους δύο τρόπους κάθε φορά. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Αριθμομηχανή'. Η λειτουργία της 'Αριθμομηχανής' του Function Probe είναι όμοια με των υπόλοιπων αριθμομηχανών.



Βήμα 1. Υπολογισμός

Μπορείτε να υπολογίσετε διαδοχικά, όπως θα κάνατε με κάθε αριθμομηχανή, το κόστος μιας πίτσας διαμέτρου 15, 30, ή 45 cm, όταν πληρώνετε με το μήκος της.

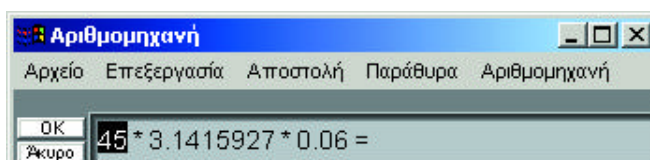


Προσοχή! Αν θέλετε να απαλείψετε έναν αριθμό πρέπει να κάνετε κλικ στο κουμπί 'CE' αμέσως μόλις τον εισαγάγετε, διαφορετικά, αν έχετε κάνει λάθος στην εισαγωγή των αριθμητικών τιμών σας, θα πρέπει να διαγράψετε ολόκληρη τη σειρά υπολογισμού. Αυτό μπορείτε να το κάνετε με το κουμπί 'clr' (Clear) το οποίο διαγράφει τη σειρά υπολογισμού την οποία υπολογίζετε. Δεν υπάρχει τρόπος να διαγράψετε μια προηγούμενη σειρά υπολογισμού!

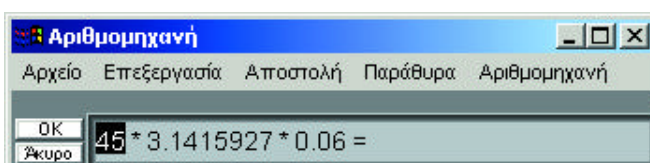
Βήμα 2. Κατασκευή κουμπιού

Για να μην επαναλαμβάνετε συνέχεια την ίδια διαδικασία, μπορείτε να την αυτοματοποιήσετε ως εξής:

1. Επιλέξτε την εντολή 'Κατασκευή κουμπιού' από το μενού 'Αριθμομηχανή'. Στο παράθυρο επεξεργασίας της 'Αριθμομηχανής' εμφανίζεται η πιο πρόσφατη σειρά που υπάρχει στο πλαίσιο καταγραφής πληκτρολογήσεων.
2. Αφού η διάμετρος είναι το μόνο που αλλάζει κατά τους υπολογισμούς, επιλέξτε τον αριθμό 45 τοποθετώντας το δείκτη πάνω του και σύροντάς τον.



3. Κάντε κλικ πάνω σε αυτό το πλήκτρο  του παραθύρου 'Αριθμομηχανή'. Η σχέση τώρα παίρνει την παρακάτω μορφή:

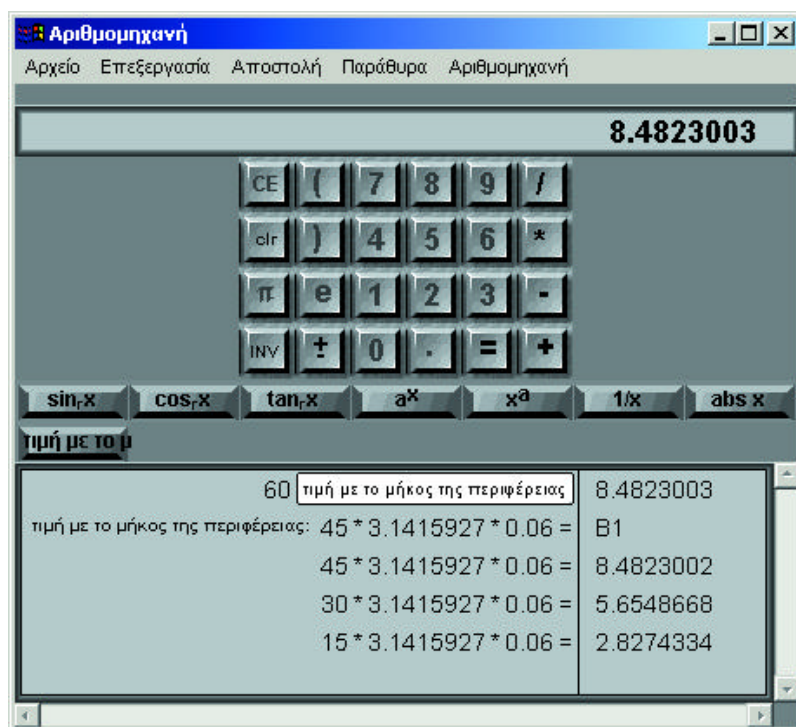


4. Κάντε κλικ στο πλήκτρο 'OK'.
5. Θα σας ζητηθεί να δώσετε όνομα στο κουμπί. Ονομάστε το 'τιμή με το μήκος της περιφέρειας'. Κάντε κλικ στο πλήκτρο 'OK'. Το πλήρες όνομα του κουμπιού θα εμφανιστεί μόνο στο πλαίσιο καταγραφής πληκτρολόγησης. Το όνομα πάνω στο κουμπί θα περικοπεί. Σημειώστε ότι στο πλαίσιο αποτελεσμάτων το όνομα του κουμπιού εμφανίζεται σαν 'B1'. Με αυτό το όνομα θα μπορούσατε να καλέσετε το συγκεκριμένο κουμπί από τα παράθυρα 'Γράφημα' ή 'Πίνακας'.

Βήμα 3. Το κουμπί 'τιμή με το μήκος περιφέρειας'

Το κουμπί που κατασκευάσατε θα εμφανιστεί τελευταίο στην περιοχή των κουμπιών.

Πληκτρολογήστε την τιμή '60' και κατόπιν πατήστε το κουμπί που κατασκευάσατε. Θα υπολογιστεί αυτόματα το κόστος της πίτσας διαμέτρου 60 cm, όταν την αγοράζετε με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου.



Συγκρίνετε τώρα αυτή την τιμή με την αντίστοιχη τιμή από το παράθυρο 'Πίνακας' και δοκιμάστε να κάνετε το ίδιο και για την τιμή 75 της διαμέτρου.

Απαντήστε τώρα στην ερώτηση 3 του φύλλου εργασίας.

Βήμα 4. Το κουμπί 'τιμή με το εμβαδό'

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα μπορείτε να κατασκευάσετε ένα κουμπί 'B2' = 'τιμή με το εμβαδό' που να σας δίνει την τιμή της κάθε πίτσας, όταν πληρώνετε με το εμβαδό. (Για να υπολογίσετε τη δύναμη κάποιου αριθμού, γράφετε πρώτα τον αριθμό, κατόπιν πατάτε το πλήκτρο x^a και τέλος τη δύναμη στην οποία θέλετε να τον υψώσετε π.χ. (15 x^a 2.)

Βήμα 5. Χρήση του παραθύρου 'Πίνακας' για την εύρεση μιας λύσης - Η χρήση της εντολής 'Ενδιάμεσο γέμισμα'

Υπάρχει ένα μέγεθος πίτσας που να κοστίζει το ίδιο με όποιο τρόπο και αν την πληρώσετε;

Απαντήστε στην ερώτηση 4 στο φύλλο εργασίας.

Από το παράθυρο 'Πίνακας' παρατηρείτε ότι η ζητούμενη τιμή θα βρίσκεται μεταξύ του 30 και του 45. Έχετε τη δυνατότητα να εισαγάγετε και άλλες τιμές ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς με την εντολή 'Ενδιάμεσο γέμισμα' του μενού 'Πίνακας'. Για να γίνει αυτό, πρώτα επιλέγετε αυτές τις τιμές τοποθετώντας το δείκτη πάνω τους και σύροντας το ποντίκι και στη συνέχεια πηγαίνετε στην εντολή 'Ενδιάμεσο γέμισμα'. Εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο διαλόγου, στο οποίο μπορείτε να συμπληρώσετε μόνο το πλαίσιο 'την τιμή' με τον αριθμό 1.

Γέμισμα

Ενδιάμεσο Γέμισμα:

Κατεύθυνση Γεμίσματος:
☐ Πάνω
☒ Κάτω

από **(αρχική τιμή)**
έως **(τελική τιμή)**

Κάθε καταχώρηση θα είναι η προηγούμενη καταχώρηση
☒ συν
☐ μείον
☐ επί
☐ διά
την τιμή

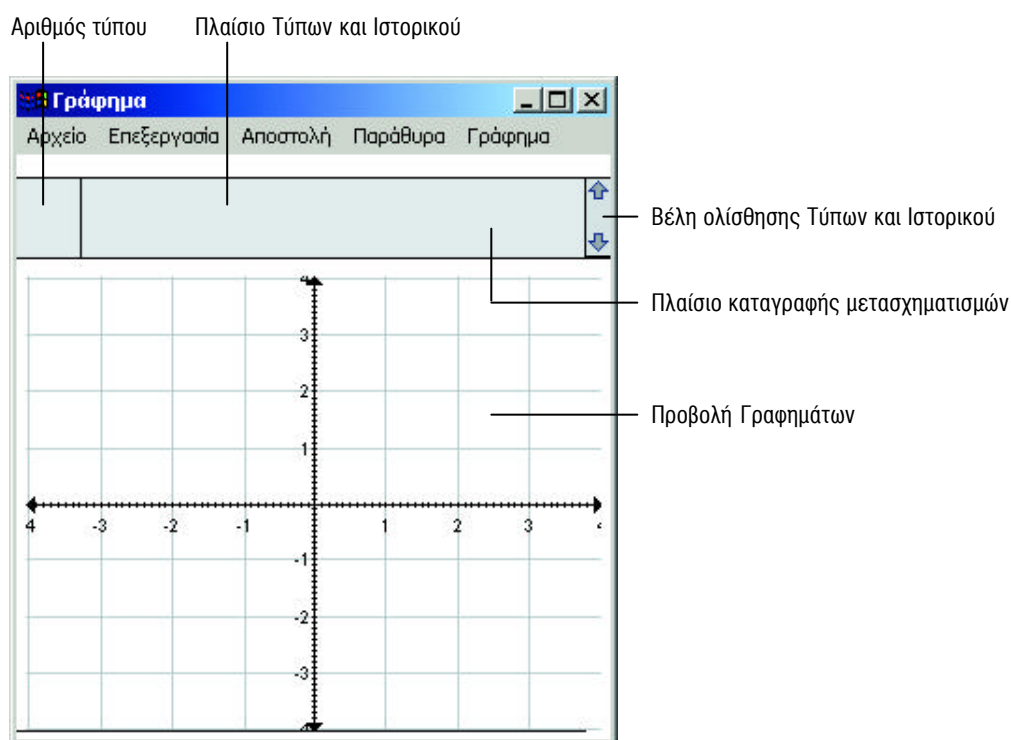
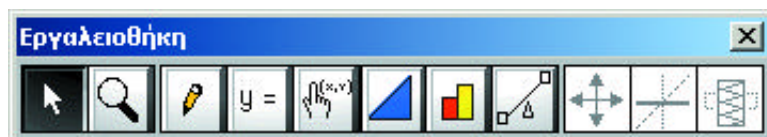
Κάνοντας κλικ στο κουμπί 'OK' διαπιστώνετε ότι στον 'Πίνακα' έχουν προστεθεί νέες τιμές ανάμεσα στο 30 και 45, ακόμη όμως δεν μπορείτε τώρα να εντοπίσετε την απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε. Θα πρέπει να παρεμβάλετε και άλλες τιμές μεταξύ του 34 και 35 με βήμα 0,1, οπότε προκύπτει ο πίνακας που φαίνεται παρακάτω. Τώρα μπορείτε να εντοπίσετε την απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε.

Πίνακας						
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας						
d	r=d/2	c=2πr	a=πr ²	p=0.06c	m=0.007a	
διάμετρος (cm)	ακτίνα (cm)	μήκος περιφέρειας (cm)	εμβαδό (cm ²)	τιμή με το μήκος περιφέρειας (ευρώ)	τιμή με το εμβαδό (ευρώ)	
15	7.5	47.12	176.71	2.83	1.24	
30	15	94.25	706.86	5.65	4.95	
31	15.5	97.39	754.77	5.84	5.28	
32	16	100.53	804.25	6.03	5.63	
33	16.5	103.67	855.3	6.22	5.99	
34	17	106.81	907.92	6.41	6.36	
34.1	17.05	107.13	913.27	6.43	6.39	
34.2	17.1	107.44	918.63	6.45	6.43	
34.3	17.15	107.76	924.01	6.47	6.47	
34.4	17.2	108.07	929.41	6.48	6.51	
34.5	17.25	108.38	934.82	6.5	6.54	
34.6	17.3	108.7	940.25	6.52	6.58	
34.7	17.35	109.01	945.69	6.54	6.62	
34.8	17.4	109.33	951.15	6.56	6.66	
34.9	17.45	109.64	956.62	6.58	6.7	
35	17.5	109.96	962.11	6.6	6.73	
36	18	113.1	1017.88	6.79	7.13	
37	18.5	116.24	1075.21	6.97	7.53	
38	19	119.38	1134.11	7.16	7.94	



Παρατηρήστε το παράθυρο 'Πίνακας' και απαντήστε στην ερώτηση 5 του φύλλου εργασίας.

Μέρος III. Γραφική παράσταση

Για να αναπαραστήσετε γραφικά τις σχέσεις μεταξύ της διαμέτρου κάθε πίτσας και του κόστους της με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου (και αντίστοιχα με το εμβαδό), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το παράθυρο 'Γράφημα' του Function Probe.



Βήμα 1. Αποστολή δεδομένων από τον 'Πίνακα' στο 'Γράφημα'

Έστω ότι θέλετε να αναπαραστήσετε γραφικά τις τιμές που αντιστοιχούν στη σχέση μεταξύ διαμέτρου και κόστους πίτσας με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Αφού οι τιμές αυτές βρίσκονται ήδη στο παράθυρο 'Πίνακας', μπορείτε να τις 'στείλετε' στο 'Γράφημα' ως εξής: Τοποθετείτε (σύροντας με το ποντίκι) τα εικονίδια  και  πάνω από τις στήλες των μεταβλητών d και p αντίστοιχα. Στη συνέχεια επιλέγετε από το μενού 'Αποστολή' την εντολή 'Σημεία σε Γράφημα'. Οι τιμές τώρα εμφανίζονται ως διακριτά σημεία στο 'Γράφημα'. Για να μπορέσετε να τα δείτε, θα πρέπει να αλλάξετε την κλίμακα των αξόνων (εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' στο μενού 'Γράφημα').

Βήμα 2. Αλλαγή κλίμακας

Από το μενού 'Γράφημα' επιλέγετε 'Αλλαγή κλίμακας'. Εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου, στο οποίο θα πρέπει να καθορίσετε τα άκρα των αξόνων ($\min x$, $\max x$, $\min y$, $\max y$), καθώς και το διάστημα μεταξύ των γραμμών πλέγματος πάνω στους άξονες (απόσταση πλέγματος x , απόσταση πλέγματος y). Μπορείτε να πληκτρολογήσετε τις τιμές, όπως αυτές φαίνονται στην εικόνα. (Οι τιμές της διαμέτρου βρίσκονται στον άξονα x και οι αντίστοιχες τιμές της πίτσας στον άξονα y).

Βήμα 3. Γραφική αναπαράσταση τύπου



Μπορείτε να αναπαραστήσετε γραφικά επιπλέον τιμές πίτσας, πέρα από αυτές που έχετε τώρα στο 'Γράφημα'. Για να αναπαραστήσετε κάθε δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το μέγεθος της πίτσας, θα μπορούσατε να κατασκευάσετε μια γραμμή που να περνά από όλα τα σημεία. Αυτό

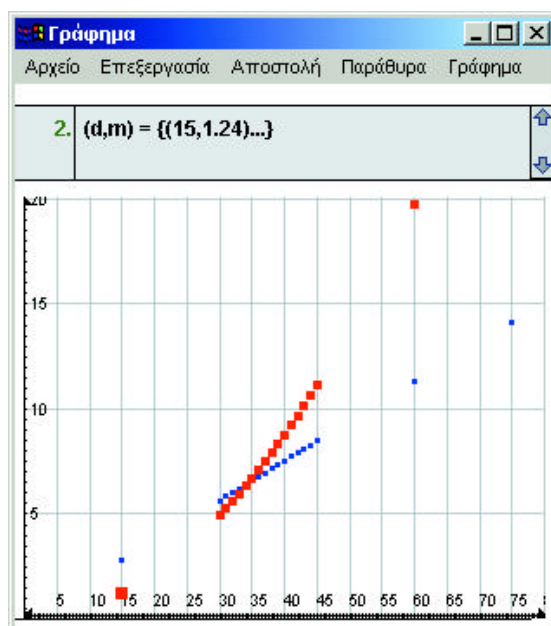


μπορείτε να το κάνετε εισάγοντας τον τύπο που συνδέει την τιμή και τη διάμετρο της πίτσας. Πηγαίνετε λοιπόν στην 'Εργαλειοθήκη' του παραθύρου 'Γράφημα', κάντε κλικ στο εικονίδιο νέου τύπου (α), και πληκτρολογήστε στο 'Πλαίσιο Τύπων' τον τύπο

(α) $r=0,06\pi d$ (αφού η τιμή της πίτσας με το μήκος της περιφέρειας είναι $r=0,06c$ και το $c=2\pi r=\pi d$) και τέλος πατήστε το πλήκτρο 'Enter'. Το Function Probe θα κατασκευάσει τη γραφική αναπαράσταση της σχέσης η οποία θα περνάει από τα σημεία που έχετε ήδη στείλει από το παράθυρο 'Πίνακας' στο 'Γράφημα'.

Βήμα 4. Γραφική αναπαράσταση σημείων

Εάν θέλετε να αναπαραστήσετε τα σημεία της σχέσης μεταξύ διαμέτρου της πίτσας και τιμής της με το εμβάδο, θα ακολουθήσετε πάλι τα προηγούμενα βήματα (τοποθετώντας το εικονίδιο  πάνω από τη στήλη 'διάμετρος' και το  πάνω από τη στήλη 'τιμή με το εμβάδο'). Τώρα το γράφημά σας θα φαίνεται όπως παρακάτω:



Βήμα 5. Αντιστοίχιση γραμμής στα σημεία

Η αντιστοίχιση της γραμμής στα σημεία που στείλατε από τον 'Πίνακα' στο 'Γράφημα' μπορεί να γίνει και με έναν άλλο τρόπο. Θυμηθείτε ότι στην 'Αριθμομηχανή' έχετε κατασκευάσει ένα κουμπί



(α)

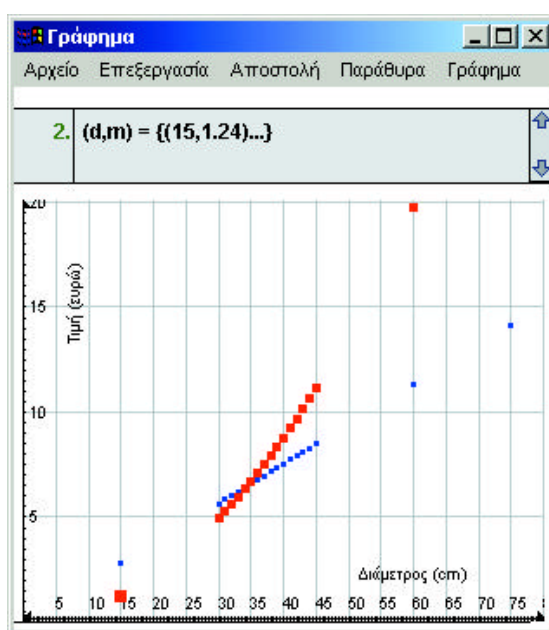
που το ονομάσατε 'τιμή με το εμβαδό' (B2). Για να κατασκευάσετε τη γραμμή που περνάει από τα σημεία, θα πρέπει να κάνετε κλικ στο εικονίδιο νέου τύπου (α), να πληκτρολογήσετε στο πλαίσιο τύπων 'm=B2(d)' και τέλος να πατήσετε το πλήκτρο 'Enter'.

Βήμα 6. Ετικέτες αξόνων

Το τελευταίο βήμα είναι να ονομάσετε τους άξονες. Πηγαίνετε στο μενού 'Γράφημα' και επιλέξτε την εντολή 'Μεταβλητές'. Θα εμφανιστεί το παρακάτω παράθυρο διαλόγου:

Σημειώστε ότι το ζεύγος μεταβλητών (d , m) θα εμφανιστεί στο παράθυρο γιατί είναι το τελευταίο που χρησιμοποιήθηκε. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα μπλε βέλη για να μετακινηθείτε μεταξύ των υπολοίπων ζευγών των μεταβλητών. Μπορείτε τώρα να εισαγάγετε τα ονόματα των μεταβλητών και τις μονάδες τους, όπως φαίνεται παρακάτω.

Όταν συμπληρώσετε τα αντίστοιχα κουτάκια, κάντε κλικ στο κουμπί 'Αποθήκευση' για να αποθηκεύσετε τις αλλαγές. Αφού κάνετε το ίδιο και με το άλλο ζεύγος μεταβλητών, κάντε κλικ στο κουμπί 'Έγινε'. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε ένα σημείο. Το γράφημά σας θα έχει την παρακάτω μορφή:



Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε ένα σημείο. Για να βρείτε τις συντεταγμένες του



(α)

σημείου τομής, κάντε κλικ στο εικονίδιο δείκτη σημείου (α), και προσεγγίστε το όσο περισσότερο μπορείτε. Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε και το εικονίδιο μεγέθυνσης για να δείτε καλύτερα το σημείο τομής.

Απαντήστε τώρα στην ερώτηση 6 στο φύλλο εργασίας.

Για να αποθηκεύετε τις αλλαγές που κάνετε, θυμηθείτε να επιλέγετε την εντολή 'Αποθήκευση χώρου εργασίας' από το μενού 'Αρχείο' οποιουδήποτε παραθύρου, όσο το δυνατόν συχνότερα κατά τη διάρκεια της εργασίας σας.

Ακολουθούν τώρα κάποιες επιπλέον λειτουργίες του παραθύρου 'Γράφημα':

- > Για να απαλείψετε μια γραφική παράσταση, αρχικά επιλέξτε την κάνοντας κλικ πάνω στη γραφική της παράσταση και στη συνέχεια επιλέξτε την εντολή 'Απαλοιφή επιλογών' από το μενού 'Επεξεργασία'. Εναλλακτικά, πατήστε το πλήκτρο 'Delete' στο πληκτρολόγιο.
- > Για να απαλείψετε όλες τις γραφικές παραστάσεις που βρίσκονται στο παράθυρο 'Γράφημα', επιλέξτε την εντολή 'Επιλογή όλων' από το μενού 'Επεξεργασία' και μετά την εντολή 'Απαλοιφή επιλογών' από το ίδιο μενού. Εναλλακτικά, πατήστε το πλήκτρο 'Delete' στο πληκτρολόγιο.
- > Μπορείτε να έχετε ανοικτά μέχρι τρία παράθυρα γραφημάτων. Για να ανοίξετε ένα επιπλέον παράθυρο 'Γράφημα', επιλέξτε την εντολή 'Προσθήκη παραθύρου Γραφήματος' από το μενού 'Παράθυρα' του παραθύρου 'Γράφημα'.

Μέρος IV. Εκτύπωση και κλείσιμο

Για να εκτυπώσετε οποιοδήποτε παράθυρο, ενεργοποιήστε το και κατόπιν επιλέξτε την εντολή 'Εκτύπωση' από το μενού 'Αρχείο'. Θυμηθείτε ότι για να ενεργοποιήσετε κάποιο παράθυρο, αρκεί να κάνετε κλικ σε οποιοδήποτε σημείο του παραθύρου ή να το καλέσετε με το όνομά του από το μενού 'Παράθυρα' των υπόλοιπων παραθύρων. Για να βγείτε από το Function Probe, επιλέξτε την εντολή 'Εξοδος' από το μενού 'Αρχείο' οποιουδήποτε παραθύρου.

Εδώ τελειώνει η σύντομη εισαγωγή στη χρήση του Function Probe. Μέχρι στιγμής έχετε συναντήσει μόνο μερικά από τα χαρακτηριστικά του. Εάν ασχοληθείτε με το πρόγραμμα, μπορείτε να γνωρίσετε περισσότερα χαρακτηριστικά του από το **Εγχειρίδιο Χρήστη**.

Ελπίζουμε ότι το πρόγραμμα σας φάνηκε όχι μόνο χρήσιμο αλλά και διασκεδαστικό!

Φύλλο εργασίας-Ερωτήσεις

1. Για ποια μεγέθη πίτσας σας συμφέρει να πληρώσετε με το μήκος της περιφέρειας; Για να απαντήσετε στην ερώτηση αυτή, παρατηρήστε προσεκτικά τα δεδομένα που έχετε συμπληρώσει στον πίνακα με τις στήλες 'διάμετρος', 'ακτίνα', 'μήκος περιφέρειας', 'εμβαδό', 'τιμή με το μήκος', 'τιμή με το εμβαδό'.

2. Για ποια μεγέθη πίτσας σας συμφέρει να πληρώσετε με το εμβαδό;

3. Κατασκευάστε δύο κουμπιά στην 'Αριθμομηχανή' που να υπολογίζουν την τιμή της πίτσας με το εμβαδό και την τιμή της πίτσας με το μήκος της περιφέρειας. Τα κουμπιά που κατασκευάσατε σας λύνουν το πρόβλημα σχετικά με τον τρόπο που θα επιλέξετε να πληρώσετε την πίτσα;

4. Υπάρχει ένα μέγεθος πίτσας που να κοστίζει το ίδιο με όποιον τρόπο και αν την πληρώσετε; Αν ναι, μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται; Απαντήστε παρατηρώντας το παράθυρο 'Πίνακας'.

5. Ποια είναι ακριβώς αυτή η τιμή;

6. Στείλε τα δεδομένα των στηλών ('διάμετρος' - 'τιμή με το εμβαδό') και ('διάμετρος' - 'τιμή με το μήκος της περιφέρειας') στο παράθυρο 'Γράφημα'. Τι αντιπροσωπεύουν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο γραφικών παραστάσεων;

2. Το πρόβλημα του πέτρινου μονοπατιού

Α' Μέρος

Ας υποθέσουμε ότι η ηλικιωμένη γειτόνισσά σου, η κυρία Αγνή Γέρου, σου ζητάει να στρώσεις ένα μονοπάτι από πέτρες μέσα στην αυλή της, ξεκινώντας από την πίσω πόρτα του σπιτιού της και καταλήγοντας σε μια σκάφη για πουλιά, η οποία βρίσκεται 13,5 m μακρύτερα. Για το σκοπό αυτό, η ίδια έχει αγοράσει δεκαπέντε στρογγυλές πέτρες, διαμέτρου 30 cm η καθεμία. Θα ήθελε να τις τοποθετήσεις ομοιόμορφα στην αυλή, ώστε η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες να είναι παντού η ίδια και με τέτοιον τρόπο, ώστε η τελευταία πέτρα να ακουμπάει στη σκάφη για τα πουλιά. Μπορείς να καθορίσεις μόνος σου την απόσταση ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και την πόρτα του σπιτιού και δεν πειράζει να διαφέρει από την απόσταση που έχουν οι υπόλοιπες πέτρες μεταξύ τους. Πριν πας λοιπόν στο σπίτι της, για να κάνεις την δουλειά, κάνεις ένα σχέδιο με τις 15 πέτρες που ξεκινούν από το σπίτι της κυρίας Αγνής και καταλήγουν στη σκάφη για τα πουλιά.

1. Πόσο θα αφήσεις ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και την πόρτα του σπιτιού;

2. Σε ποια απόσταση θα τοποθετήσεις τη μια πέτρα μετά την άλλη, ώστε να χρησιμοποιήσεις και τις δεκαπέντε, προκειμένου να φτάσεις τη σκάφη για τα πουλιά;

3. Πόσο θα απέχει το σπίτι από την αρχή της τρίτης πέτρας;

4. Πόσο θα απέχει το σπίτι από την αρχή της πέμπτης πέτρας;

5. Της δέκατης πέτρας; Της δέκατης τέταρτης πέτρας;

6. Περιγράψε την μέθοδο που ακολούθησες, για να απαντήσεις στις ερωτήσεις 3-5.

7. Κατασκεύασε έναν πίνακα στο Function Probe για να δείξεις πόσο απέχει κάθε μια από τις δεκαπέντε πέτρες από το σπίτι. Η μια στήλη θα περιλαμβάνει τους αριθμούς από 1 ως 15 και η δεύτερη την απόσταση του σπιτιού από την πρώτη πέτρα, από τη δεύτερη πέτρα κτλ. Μολονότι μπορείς να πληκτρολογήσεις τις τιμές της δεύτερης στήλης μια - μια, το Function Probe έχει τρόπους να σε βοηθήσει. Μπορείς α) να γεμίσεις τη στήλη χρησιμοποιώντας την εντολή 'Γέμισμα' β) να πληκτρολογήσεις έναν τύπο στη σειρά μεταβλητών/τύπων γ) να δημιουργήσεις ένα κουμπί στην 'Αριθμομηχανή' και να χρησιμοποιήσεις την εντολή 'Τιμή σε Πίνακα' από το μενού 'Αποστολή', κτλ. (Θα πάρεις επιπλέον βαθμό για κάθε νέο τρόπο που μπορείς να βρεις για να συμπληρώσεις τη στήλη).

Β' Μέρος

Έχοντας κάνει όλους τους υπολογισμούς σου σε χαρτί, πηγαίνεις στο σπίτι της κυρίας Αγνής, για να ξεκινήσεις το στρώσιμο του μονοπατιού. Όμως, ανακαλύπτεις με έκπληξη ότι έξω από την πίσω πόρτα της γειτονισσάς σου υπάρχει ένα τσιμεντένιο σκαλοπάτι με πλάτος 25 cm. Δεδομένου ότι θέλεις να χρησιμοποιήσεις και τις δεκαπέντε πέτρες, αντιλαμβάνεσαι ότι θα πρέπει να προσαρμόσεις την απόσταση που αρχικά υπολόγισες ότι θα έχουν οι πέτρες μεταξύ τους, αφού μειώθηκε η ολική απόσταση σπιτιού και σκάφης.

8. Πόσο θα αφήσεις ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και το σκαλοπάτι;

9. Ποια θα είναι τώρα η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες;

10. Πόσο απέχει πλέον η αρχή της πρώτης πέτρας από το σπίτι;

11. Πόσο απέχει η αρχή της έβδομης πέτρας από το σπίτι; Της δωδέκατης;

12. Προκειμένου να διευκολυνθείς στον υπολογισμό της απόστασης οποιασδήποτε πέτρας του μονοπατιού από το σπίτι, δημιούργησε ένα κουμπί στην 'Αριθμομηχανή', το οποίο θα την υπολογίζει. Ή γράψε έναν τύπο που θα εκφράζει την απόσταση του σπιτιού από μια πέτρα και χρησιμοποίησέ τον για να γεμίσεις μια στήλη του πίνακα.

Γ' Μέρος

Η κυρία Αγνή περπάτησε στο μονοπάτι που έστρωσες και θεωρεί ότι η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες είναι πολύ μεγάλη για το διασκελισμό της. Θα ήθελε λοιπόν να προσθέσει μερικές πέτρες, ώστε να μειωθεί στο μισό η απόσταση που υπάρχει τώρα ανάμεσά τους. Περιμένει λοιπόν από σένα να υπολογίσεις πόσες πέτρες θα χρειαστούν, να τις αγοράσεις και να διορθώσεις το μονοπάτι.

13. Πόσο απέχει τώρα η πρώτη πέτρα από το σπίτι (η αρχή της);

14. Ποια θα είναι η καινούρια απόσταση ανάμεσα στις πέτρες; Πόσες επιπλέον πέτρες θα χρειαστείς;

15. Πόσο θα απέχει η αρχή της έβδομης πέτρας από το σπίτι; Της δέκατης πέτρας;

16. Δημιούργησε ένα κουμπί στην 'Αριθμομηχανή' με το οποίο θα εισάγεις τον αριθμό μιας πέτρας και θα παίρνεις ως αποτέλεσμα την απόσταση αυτής της πέτρας από το σπίτι.

17. Κατάστρωσε έναν πίνακα που να δείχνει την απόσταση κάθε πέτρας από το σπίτι. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις έναν τύπο για να εισάγεις τις αποστάσεις ή το κουμπί που δημιούργησες στο προηγούμενο ερώτημα.

18. α) Εάν χρησιμοποιήσες τύπο, για να γεμίσεις τον πίνακα του ερωτήματος 16, να αναγνωρίσεις τον πολλαπλασιαστή και τον προσθετέο στον τύπο σου. Όσον αφορά τις διαστάσεις του μονοπατιού, δηλαδή το πλάτος που έχουν οι πέτρες, την απόσταση ανάμεσά τους, το τιμεντένιο σκαλοπάτι κτλ., να περιγράψεις τι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή και τι στον προσθετέο στον τύπο σου. β) Εάν χρησιμοποιήσες κουμπί της 'Αριθμομηχανής' για να γεμίσεις τον πίνακα του ερωτήματος 16, να αναγνωρίσεις τον πολλαπλασιαστή και τον προσθετέο στην καταχωρημένη σειρά της πληκτρολόγησης που ακολούθησες για να δημιουργήσεις το κουμπί. Όσον αφορά τις διαστάσεις του μονοπατιού, δηλαδή το πλάτος που έχουν οι πέτρες, την απόσταση ανάμεσά τους, το τιμεντένιο σκαλοπάτι κτλ., να περιγράψεις τι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή και τι στον προσθετέο στην πληκτρολόγησή σου.

3. Τα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα

Έχεις να επιλέξεις ανάμεσα σε δύο τύπους φωτοαντιγραφικών μηχανημάτων, για να βγάλεις φωτοαντίγραφα ενός μεγάλου εγγράφου. Το πρώτο μηχανήμα (Α) απαιτεί τη δημιουργία ενός πρωτοτύπου, το οποίο κοστίζει 60 λεπτά, ενώ κάθε επόμενο φωτοαντίγραφο κοστίζει 0.6 λεπτά. Αν χρησιμοποιήσεις το δεύτερο μηχανήμα (Β), θα πληρώσεις 6 λεπτά για κάθε φωτοαντίγραφο που θα βγάλεις. Χρησιμοποίησε το Function Probe, για να απαντήσεις στα παρακάτω:

1. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. (Μπορείς να χρησιμοποιήσεις το παράθυρο 'Αριθμομηχανή', για να κάνεις τις πράξεις.)

Αριθμός φωτοαντιγράφων	Κόστος στο μηχανήμα Α (ευρώ)	Κόστος στο μηχανήμα Β (ευρώ)	Σε ποιο μηχανήμα σε συμφέρει να βγάλεις τα φωτοαντίγραφα;
5			
8			
13			
20			

Τι παρατηρείς;

2. Δημιούργησε δύο κουμπιά στην 'Αριθμομηχανή' που το ένα θα σου δίνει το κόστος των αντιγράφων με το μηχανήμα Α και το άλλο με το μηχανήμα Β. Με τη βοήθεια αυτών των κουμπιών συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός φωτοαντιγράφων	Κόστος στο μηχανήμα Α (ευρώ)	Κόστος στο μηχανήμα Β (ευρώ)
7		
11		
23		
32		
47		
51		
72		

3. Ο ιδιοκτήτης των μηχανημάτων θα ήθελε να έχει έναν πίνακα, στον οποίο να φαίνεται πόσα χρήματα θα εισπράξει κάθε φορά, αν βγάλει από 1 μέχρι και 100 φωτοαντίγραφα, τόσο στο μηχανήμα Α, όσο και στο Β. Μπορείς να του φτιάξεις εσύ έναν τέτοιο πίνακα; (Θα σε διευκόλυνε πολύ για τη δουλειά αυτή να χρησιμοποιήσεις το παράθυρο 'Πίνακας'.)

4. Παρατήρησε τον πίνακα που έφτιαξες και απάντησε στην ερώτηση: Πότε σε συμφέρει να χρησιμοποιήσεις (για την παραγωγή αντιγράφων) το μηχάνημα Α και πότε το Β;

5. Να κατασκευάσεις τις γραφικές παραστάσεις 'Αριθμός αντιγράφων-Κόστος με το μηχάνημα Α' και 'Αριθμός αντιγράφων-Κόστος με το μηχάνημα Β' στέλνοντας τα αντίστοιχα σημεία στο παράθυρο 'Γράφημα'. Τέμνονται αυτές οι γραφικές παραστάσεις; Αν ναι, σε ποιο σημείο; Γιατί συμβαίνει αυτό; Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις μπορείς να αποφανθείς για το πότε σε συμφέρει η παραγωγή αντιγράφων στο μηχάνημα Α και πότε στο μηχάνημα Β;

4. Το ταξίδι

Τα οχτώ μέλη μιας αρχαιολογικής λέσχης σχεδιάζουν ένα ταξίδι μιας εβδομάδας στην Αρχαία Ολυμπία, προκειμένου να επισκεφτούν αρχαία μνημεία. Δεδομένου ότι η λέσχη έχει περιορισμένες δυνατότητες χρηματοδότησης, τα μέλη κάνουν έναν προϋπολογισμό με βάση δύο προσφορές.

Α' Προσφορά

Μπορούν να νοικιάσουν δύο μικρά αυτοκίνητα με ένα ειδικό πακέτο προσφοράς για μια εβδομάδα ή λιγότερο. Για να ισχύσει η ειδική προσφορά, θα πρέπει να δώσουν 148 ευρώ παραλαμβάνοντας το κάθε αυτοκίνητο. Η βενζίνη και τα λάδια θα κοστίζουν 15 ευρώ την ημέρα και για τα δύο μικρά αυτοκίνητα. Κατά τα άλλα, θα ξοδεύουν 30 ευρώ το άτομο την ημέρα για φαγητό σε εστιατόρια και για τις διανυκτερεύσεις τους.

1. Πόσα θα έχει ξοδέψει η λέσχη μετά από μια ημέρα (για διανυκτέρευση, φαγητό, βενζίνη, λάδια και ενοίκιο των αυτοκινήτων); Μετά από 5, 6, 7 ημέρες; Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα κάνοντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς στην 'Αριθμομηχανή':

Διάρκεια ταξιδιού (Ημέρες)	Έξοδα (ευρώ)
5η	
6η	
7η	

2. Κατασκεύασε στην 'Αριθμομηχανή' ένα κουμπί, το οποίο να υπολογίζει το συνολικό κόστος της εκδρομής ανάλογα με τον αριθμό των ημερών του ταξιδιού.
Ο τύπος είναι: _____
3. Κατασκεύασε έναν πίνακα που να δείχνει το αθροιστικό συνολικό κόστος ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού (δηλαδή τον αριθμό των ημερών του ταξιδιού). Σκέψου πώς θα τον δημιουργήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο που κατασκεύασες και τη δυνατότητα που σου δίνει το πρόγραμμα για κατασκευή εξαρτημένων στηλών.
4. Η ταμίας της λέσχης ζητάει να της δοθεί ένα διάγραμμα στο Function Probe, από το οποίο θα μπορεί να διαβάσει το συνολικό κόστος ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού. Βρες έναν τρόπο να κάνεις αυτό το διάγραμμα αξιοποιώντας τις στήλες του 'Πίνακα' που έχεις κατασκευάσει. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη δυνατότητα της 'Αριθμομηχανής' για αποστολή δεδομένων στα άλλα παράθυρα του λογισμικού. Καθώς το κατασκευάζεις, να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:
 - α) Τι αντιπροσωπεύει κάθε άξονας;

β) Τι κλίμακα χρησιμοποιείς σε κάθε άξονα;

γ) Είναι το διάγραμμά σου μια συνεχής γραμμή; Διακριτά σημεία; Κάτι άλλο; Γιατί;

δ) Πώς εισαγάγεις τα δεδομένα σου στο διάγραμμα (με τύπο, με κουμπί της 'Αριθμομηχανής', με το μενού 'Αποστολή' του παραθύρου 'Πίνακας');

ε) Να γράψεις τον κατάλληλο τύπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία αυτά.

ζ) Αν άλλαζες την κλίμακα του x (διπλασίαζες τη μονάδα μέτρησης), τι θα παρατηρούσες στη γραφική παράσταση;

Β' Προσφορά

Ενόσω η ταμίας καταστρώνει τον αρχικό αυτό προϋπολογισμό, κάποιο άλλο μέλος κάνει μια νέα προσφορά, η οποία φαίνεται πιο διασκεδαστική και ενδεχομένως φθηνότερη: Μπορούν να νοικιάσουν στην τιμή των 80 ευρώ την ημέρα ένα πουλμανάκι και για τους οχτώ, το οποίο έχει ένα αρκετά μεγάλο ψυγείο. Το κόστος για το πουλμαν θα αφαιρείται αυτόματα στο τέλος κάθε ημέρας, από τον τραπεζικό λογαριασμό της λέσχης. Η βενζίνη και τα λάδια θα κοστίζουν 20 ευρώ την ημέρα. Όμως, επειδή θα μπορούν να ετοιμάζουν φαγητό και να το κρατάνε στο ψυγείο του πουλμαν, τα έξοδα της ημέρας για φαγητό και για διανυκτέρευση θα είναι μόνο 24 ευρώ το άτομο.

1. Αν νοικιάσουν το πουλμαν, πόσο θα κοστίζει στη λέσχη για μια ημέρα (για διανυκτερεύσεις, φαγητό, βενζίνη, λάδια και ενοίκιο του πουλμαν); Πόσα θα έχουν πληρώσει μετά από πέντε ημέρες; Χρησιμοποίησε την 'Αριθμομηχανή' για τους υπολογισμούς σου.

2. Κατάστρωσε έναν πίνακα που να παρουσιάζει το αθροιστικό συνολικό κόστος για κάθε μέρα του ταξιδιού ανάλογα με τη διάρκειά του, αν νοικιάσουν το πουλμαν. Δούλεψε σε αυτό το σημείο, όπως και στην Α' Προσφορά.

3. Η ταμίας σου επιστρέφει το αρχικό σου διάγραμμα και σου ζητάει να προσθέσεις σε αυτό τα στοιχεία για το αθροιστικό κόστος της ενοικίασης του πούλμαν σύμφωνα με την Β' Προσφορά. Να γράψεις τον κατάλληλο τύπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία αυτά.
4. Ποιο είναι το οικονομικότερο σχέδιο για το ταξίδι της μιας εβδομάδας; Πώς μπορεί η ταμίας να το καταλάβει, κοιτώντας το διάγραμμα; Εσύ τι θα νοίκιαζες, τα δύο μικρά αυτοκίνητα ή το πούλμαν; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

5. Κάποιος θέτει την ιδέα ότι σε κάποια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του ταξιδιού τα αθροιστικά έξοδα που αντιστοιχούν στις δύο προσφορές ενοικιάσεων, μπορεί να είναι ίδια. Πιστεύεις ότι αυτό αληθεύει; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου, χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Γράφημα' του Function Probe και να το αποδείξεις αλγεβρικά στο τετράδιό σου.

Ομάδα Β: Εκθετική / Λογαριθμική Συνάρτηση

5. Ο πολλαπλασιασμός των Βακτηριδίων

Ένας βιολόγος ενδιαφέρεται να μελετήσει ένα νέο είδος βακτηριδίων. Όταν παρατηρεί για πρώτη φορά με το μικροσκόπιο την καλλιέργεια των βακτηριδίων, μετράει 100 βακτηρίδια. Με προσεκτική και στενή παρακολούθηση της καλλιέργειας παρατηρεί ότι ο αριθμός των βακτηριδίων αυξάνει κατά 10% κάθε 10 λεπτά.

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σου.

1. Ποιος είναι ο αριθμός των βακτηριδίων τα πρώτα 10 λεπτά;

2. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Σαν χρόνο 0 θεώρησε τη χρονική στιγμή που ο βιολόγος παρατήρησε για πρώτη φορά τα βακτηρίδια.

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός βακτηρίων
0	
10	
20	
30	
40	
50	

3. Δημιούργησε έναν πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας', που να περιέχει δυο στήλες. Στην πρώτη, που θα την ονομάσεις 'Χρόνος', να εισαγάγεις τον αριθμό των λεπτών, ξεκινώντας από το 0 μέχρι το 50 με βήμα 10 και στη δεύτερη στήλη, που θα την ονομάσεις 'Αριθμός Βακτηριδίων', να εισαγάγεις τον αριθμό των βακτηριδίων στον αντίστοιχο χρόνο με βάση τον πίνακα που συμπλήρωσες στο προηγούμενο ερώτημα.
4. Στείλε τις δύο αυτές στήλες στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν τα σημεία δεν φαίνονται, διόρθωσε το πρόβλημα, ώστε να είναι ορατά. Τι παρατηρείς; Τι είδους μεταβολή ακολουθούν οι δύο μεταβλητές (γραμμική, εκθετική, λογαριθμική κτλ.);

5. Προσπάθησε να δημιουργήσεις μια τρίτη στήλη στο παράθυρο 'Πίνακας' που να τη ονομάσεις 'Υπολογισμός Βακτηριδίων' και η οποία να γεμίζει με βάση τον τύπο που νομίζεις ότι συνδέει το χρόνο (ανά 10 λεπτά) και τον αριθμό των βακτηριδίων.

6. Πληκτρολόγησε τον τύπο αυτό στο παράθυρο 'Γράφημα'.

7. Με βάση τη γραφική παράσταση, μετά από πόση ώρα υπήρχαν στην καλλιέργεια λιγότερα από 200 βακτηρίδια; Επίλεξε το κατάλληλο εργαλείο (Εργαλείο δείκτη σημείου) για να δεις τις συντεταγμένες του σημείου. Επαλήθευσέ το και στο παράθυρο 'Πίνακας'.

8. Αργότερα, ο βιολόγος ανακάλυψε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 5 λεπτά και όχι κάθε 10. Εντούτοις, τα βακτηρίδια εξακολουθούν να αυξάνονται κατά 10% κάθε 10 λεπτά. Να δημιουργήσεις στο παράθυρο 'Πίνακας' μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;

9. Στο παράθυρο 'Γράφημα' κάνε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείς σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;

10. Αν, αντίθετα με τα προηγούμενα, ο βιολόγος ανακάλυπτε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 10 λεπτά, αλλά παράγονται 20% βακτηρίδια κάθε 10 λεπτά, να δημιουργήσεις στο παράθυρο 'Πίνακας' μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;

11. Στο παράθυρο 'Γράφημα' κάνε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείς σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;

6. Η αύξηση του πληθυσμού

Στην έκδοση ενός Αμερικάνικου περιοδικού, για το 1991 παρουσιάζονται τα ακόλουθα δεδομένα για τον παγκόσμιο πληθυσμό (σε δις) μέσα σε διάστημα 7 χρόνων (1984-1990):

Έτη	Παγκόσμιος πληθυσμός
1984	4,766
1985	4,86132
1986	4,9585464
1987	5,05771733
1988	5,15887167
1989	5,26204911
1990	5,36729009

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σου.

1. Άνοιξε το παράθυρο 'Πίνακας'. Σε μια στήλη βάλε τους πληθυσμούς που δίνονται πιο πάνω ανοίγοντάς τη τόσο όσο να φαίνονται ολόκληροι οι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας την εντολή 'Διαφορά' στο μενού 'Πίνακας' βρες πόσο μεταβλήθηκε ο παγκόσμιος πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Συγκρίνοντας τις μεταβολές σε ποιο συμπέρασμα οδηγείσαι;

2. Χρησιμοποιώντας την εντολή 'Λόγος' στο μενού 'Πίνακας' βρες με ποιο ρυθμό αυξήθηκε ο πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Τι παρατηρείς;

3. Ποιος προβλέπεις να είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός το 1991; Να εξηγήσεις με ποιον τρόπο υπολόγισες την απάντησή σου και να τον αιτιολογήσεις.

Το ίδιο περιοδικό εκδίδει ακόμα τα ακόλουθα στοιχεία για τον πληθυσμό της Ασίας την ίδια χρονική περίοδο:

Έτη	Πληθυσμός Ασίας
1984	2,785
1985	2,8407
1986	2,897514
1987	2,95546428
1988	3,01457357
1989	3,07486504
1990	3,13636234

4. Να χρησιμοποιήσεις την εντολή 'Λόγος' στο μενού 'Πίνακας', για να υπολογίσεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας, όπως έκανες για τον πληθυσμό της Ευρώπης. Να συγκρίνεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας με τον παγκόσμιο για τα χρόνια 1984-1990.

5. Ποιος προβλέπεις να είναι ο πληθυσμός της Ασίας το 1991; Να εξηγήσεις με ποιο τρόπο χρησιμοποίησες το Function Probe, για να δώσεις την απάντησή σου.

6. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Γης παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα δέκα χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακα σου δημιουργώντας άλλες δύο εξαρτημένες στήλες, όπου στην πρώτη στήλη θα εισαγάγεις τον αριθμό των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000, και στη δεύτερη στήλη θα εισαγάγεις έναν τύπο που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως 2000 συναρτήσει της πρώτης στήλης.

7. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Ασίας παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα δέκα χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακά σου δημιουργώντας άλλη μια εξαρτημένη στήλη που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως 2000 συναρτήσει του αριθμού των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000.

8. Με τα δεδομένα του έτους 1984, πόσες φορές μεγαλύτερος ήταν ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Με τις τιμές που υπολόγισες για το έτος 2000, πόσες φορές μεγαλύτερος θα είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Εξήγησε το αποτέλεσμα.

7. Επένδυση χρημάτων

Κάποιος κατέθεσε στην τράπεζα 300 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 10% και μην έχοντας οικονομικές ανάγκες δεν έκανε καμία κίνηση των χρημάτων αυτών για 20 χρόνια. Ένας φίλος του όμως, ενώ κατέθεσε και εκείνος το ίδιο ποσό με το ίδιο επιτόκιο, έπαιρνε στο τέλος κάθε χρόνου τον τόκο που του έδινε η τράπεζα χωρίς να μετακινήσει το αρχικό του ποσό.

- α) Ποιος ήταν ο τόκος που έδινε η τράπεζα μετά από 1, 2, 3, 4 χρόνια στον κάθε ένα από τους δυο παραπάνω καταθέτες; β) Να υπολογίσεις τα χρήματα του καθενός καταθέτη τα παραπάνω χρόνια. Υπόθεσε ότι ο δεύτερος καταθέτης κρατάει τους τόκους που παίρνει κάθε χρόνο από την τράπεζα και έτσι συνυπολόγισέ τους στα χρήματά του. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις την 'Αριθμομηχανή' για να κάνεις τους υπολογισμούς σου.

Χρόνια	Καταθέτης Α (ευρώ)		Καταθέτης Β (ευρώ)	
	Τόκος	Χρήματα	Τόκος	Χρήματα
1				
2				
3				
4				

- Να κατασκευάσεις τρεις στήλες στο παράθυρο 'Πίνακας' που να αναπαριστούν τα χρήματα και των δυο καταθετών σε 20 χρόνια συναρτήσει του χρόνου με τη βοήθεια των κατάλληλων τύπων. Η μια στήλη θα είναι ο χρόνος σε χρόνια και οι άλλες δύο τα χρήματα των δύο καταθετών συναρτήσει του χρόνου.

- Στείλε τις παραπάνω στήλες στο παράθυρο 'Γράφημα'. Τι παρατηρείς;

- Ένας άλλος φίλος τους ισχυρίζεται ότι με τον ρυθμό που αυξάνεται το ποσό, κάποια χρονική στιγμή τα χρήματα του πρώτου καταθέτη θα ξεπεράσουν τα 1500 ευρώ. Έλεγξε από τη γραφική παράσταση την εικασία αυτή. Ποια χρονιά θα συμβεί αυτό;

- Ποια θα είναι τα χρήματα του δεύτερου καταθέτη τη χρονιά αυτή; Πού οφείλεται η μεγάλη απόκλιση των ποσών;

8. Μετασχηματισμοί στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Α' μέρος

1. Άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα' και να εισαγάγεις τον τύπο $y=2^x$ στο 'Πλαίσιο Τύπων' (πρόσεξε ότι πρέπει να πληκτρολογήσεις $y=2^x$. Για περισσότερες οδηγίες βλέπε το Εγχειρίδιο Χρήστη στη σελίδα 44). Στο ίδιο παράθυρο να εισαγάγεις και τον τύπο $y=(1/2)^x$.

A) Επίλεξε μερικά σημεία ως προς τον άξονα των y και από τις δύο γραφικές παραστάσεις και στείλε τα στο παράθυρο 'Πίνακας'. Για να επιλέξεις σημεία, ενεργοποίησε την κάθε γραφική παράσταση κάνοντας κλικ πάνω της, και στη συνέχεια επέλεξε τυχαία σημεία ως προς τον άξονα y με την εντολή 'Σύνολο σημείων' από το υπομενού 'Δείγμα από καμπύλη' του μενού 'Γράφημα'. Τι παρατηρείς σχετικά με τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων; Επαληθεύεις το ίδιο γραφικά; Με ποιο μετασχηματισμό θα μπορούσες να ταυτίσεις τη μια γραφική παράσταση με την άλλη;

B) Τι παρατηρείς σχετικά με τη μονοτονία των δύο συναρτήσεων στο παράθυρο 'Γράφημα'; Επαλήθευσε την παρατήρησή σου και από το παράθυρο 'Πίνακας'.

2. Απάλειψε από το παράθυρο 'Γράφημα' όλες τις γραφικές παραστάσεις εκτός από την $y=2^x$ (επιλέγοντας τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία'). Έπειτα σχημάτισε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=3^x$, $y=4^x$ και $y=5^x$ εισαγάγοντας τους αντίστοιχους τύπους. Τι παρατηρείς σχετικά με την κλίση των καμπυλών;

3. Να μετακινήσεις τη γραφική παράσταση της $y=2^x$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα των y (εργαλείο μετατόπισης). Ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;

4. Να μετακινήσεις τη γραφική παράσταση της $y=2^x$ κατά 3 μονάδες δεξιά στον άξονα των x . Ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;

5. Να κάνεις στο τετράδιό σου τη γραφική παράσταση της $y=2^{x-3}+2$. Επαλήθευσε το σχήμα σου στο παράθυρο 'Γράφημα'. Ποιους μετασχηματισμούς θα έκανες στην $y=2^x$, για να ταυτιστεί με την $y=2^{x-3}+2$; Επίλεξε το κατάλληλο εργαλείο από την εργαλειοθήκη του παραθύρου 'Γράφημα' ενεργοποίησέ το όσες φορές χρειαστεί.

Β' μέρος

1. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' με τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία'. Σχημάτισε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2^x$ και βρες τη συμμετρική της ως προς τη διχοτόμο των αξόνων με τη χρήση του εργαλείου συμμετρίας. Ποια συνάρτηση νομίζεις ότι είναι; Τι σχέση έχουν οι δύο συναρτήσεις; Για να βοηθηθείς, ενεργοποίησε το εικονίδιο δείκτη σημείου, το οποίο δείχνει τις συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης, επίλεξε μερικά σημεία και από τις δυο γραφικές παραστάσεις, στείλε τα στο παράθυρο 'Πίνακας' και βρες τι σχέση έχουν. Ποια είναι η σχέση τους ως προς τη μονοτονία;

2. Με το εργαλείο μετατόπισης, μετακίνησε τη νέα συνάρτηση κατά 3 μονάδες δεξιά στον άξονα των x . Πώς θα μεταβληθεί ο τύπος της;

3. Με το εργαλείο μετατόπισης, μετακίνησε τη συνάρτηση αυτή κατά 2 μονάδες στον άξονα των y προς τα πάνω. Τι νομίζεις ότι θα αλλάξει στον τύπο της;

Ομάδα Γ: Δευτεροβάθμιες Συναρτήσεις

9. Ο Πύραυλος

Ένας πρότυπος πύραυλος εκτοξεύεται από τη Γη. Τη στιγμή που σταματάει να καίει καύσιμα απέχει 15,24 m από το έδαφος και η ταχύτητά του είναι 23,384 m/sec με κατακόρυφη προς τα πάνω διεύθυνση. Εξακολουθεί να κινείται με αυτή τη διεύθυνση και στη συνέχεια, λόγω της δράσης της βαρύτητας, στρίβει και πέφτει στο έδαφος. Να χρησιμοποιήσεις το Function Probe για να μελετήσεις τη σχέση ανάμεσα στο ύψος του πυραύλου και το χρόνο, θεωρώντας ως αρχικό ύψος και αρχικό χρόνο το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο, καθώς και τη σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα του πυραύλου και το χρόνο.

1. Χρησιμοποίησε τις γνώσεις σου για τη δράση της βαρύτητας, για να γράψεις έναν τύπο που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στο ύψος (σε μέτρα) και το χρόνο (σε δευτερόλεπτα). Να θεωρήσεις ως χρόνο μηδέν το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο. Σε ποια γενική κατηγορία συναρτήσεων ανήκει ο τύπος που έγραψες; Κάνε την αντιστοίχιση των όρων του τύπου που σου δίνει το ύψος, με τους όρους του τύπου της συνάρτησης.

2. Να κατασκευάσεις έναν πίνακα στο Function Probe χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για να γράψεις τις τιμές του ύψους που έχει ο πύραυλος για χρόνο από $t=0$ ως $t=8$.
3. Να χρησιμοποιήσεις τον πίνακα που έφτιαξες, για να απαντήσεις τις ακόλουθες ερωτήσεις:
 - α) σε ποια, κατά προσέγγιση, χρονική στιγμή θα έχει ο πύραυλος αποκτήσει το μέγιστο ύψος του;
 - β) σε ποια, πάλι κατά προσέγγιση, χρονική στιγμή θα προσκρούσει στο έδαφος;

α)

β)

4. Να εξηγήσεις πώς μπορείς να τροποποιήσεις τον πίνακά σου, ώστε να λάβεις ακριβείς απαντήσεις για τα προηγούμενα δύο ερωτήματα. Να δώσεις την απάντηση με ακρίβεια χιλιοστού του δευτερολέπτου. Μπορείς να ρυθμίσεις τα δεκαδικά ψηφία μιας στήλης από το παράθυρο διαλόγου 'Ρυθμίσεις στήλης' στο μενού 'Πίνακας'.

α) σε ποια χρονική στιγμή θα έχει ο πύραυλος αποκτήσει το μέγιστο ύψος του;

β) σε ποια χρονική στιγμή θα προσκρούσει στο έδαφος;

α)

β)

5. Να κατασκευάσεις τη γραφική παράσταση της σχέσης ανάμεσα στο ύψος και το χρόνο και να εξηγήσεις με ποιόν τρόπο το έκανες (εισάγοντας έναν τύπο, στέλνοντας σημεία, κτλ.). Επιβεβαιώνονται από το διάγραμμά σου οι απαντήσεις που έδωσες για τη χρονική στιγμή που παρατηρείται το μέγιστο ύψος και η πρόσκρουση στο έδαφος;

6. Να γράψεις έναν τύπο που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο) και το χρόνο (σε δευτερόλεπτα). Να θεωρήσεις ως χρόνο μηδέν το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο. Σε ποια γενική κατηγορία συναρτήσεων ανήκει ο τύπος που έγραψες; Κάνε την αντιστοίχιση των όρων του τύπου που σου δίνει το ύψος, με τους όρους του τύπου της συνάρτησης.

7. Να γράψεις στο παράθυρο 'Πίνακας' τον τύπο μιας συνάρτησης που να εκφράζει την ταχύτητα του πυραύλου σε συνάρτηση με το χρόνο και κατόπιν να κατασκευάσεις τη γραφική της παράσταση. Να την κατασκευάσεις σε ένα ξεχωριστό παράθυρο 'Γράφημα' επιλέγοντας την εντολή 'Προσθήκη παραθύρου Γραφήματος' από το μενού 'Παράθυρα'.

8. Σε ποια χρονική στιγμή θα αποκτήσει ο πύραυλος τη μέγιστη θετική ταχύτητα και ποια θα είναι η τιμή της;

9. Σε ποια χρονική στιγμή θα αποκτήσει ο πύραυλος τη μέγιστη αρνητική ταχύτητα και ποια θα είναι η τιμή της;

10. Να ορίσεις την ταχύτητα του πυραύλου, όταν το ύψος του είναι 30,48 m από το έδαφος.

11. Στη γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο υπάρχει σημείο τομής της καμπύλης με τον οριζόντιο άξονα (άξονας των χρόνων); Αν υπάρχει, να εξηγήσεις τη σημασία του σημείου τομής. Αν δεν υπάρχει, να εξηγήσεις γιατί δεν υπάρχει.

ΙΟ. Η πρόσκληση

Η τάξη σου διοργανώνει μια εκδήλωση και πρέπει να ετοιμάσει προσκλήσεις. Μετά από συνέλευση της τάξης αποφασίστηκε η πρόσκληση να πληροί τις πιο κάτω προϋποθέσεις:

Η πρόσκληση να αποτελείται από 400 τετραγωνικά εκατοστά τυπωμένου υλικού, με περιθώρια 3 εκατοστών στην κορυφή και στο κάτω μέρος της σελίδας και 2 εκατοστών στα πλάγια τμήματά της. Επίσης, λόγω του κόστους του χαρτιού, οι προσκλήσεις πρέπει να τυπωθούν σε χαρτί που να έχει την ελάχιστη επιφάνεια (εμβαδό) που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις.

1. Να σχεδιάσεις στο φύλλο εργασίας ένα σχήμα για την πρόσκληση, ονομάζοντας το πλάτος της εκτύπωσης 'z'. Να εκφράσεις το μήκος της εκτύπωσης σε σχέση με το 'z' και τέλος το μήκος και το πλάτος ολόκληρης της πρόσκλησης σε σχέση με το 'z'.

μήκος εκτύπωσης: _____
μήκος πρόσκλησης: _____
πλάτος πρόσκλησης: _____

2. Να κατασκευάσεις στο Function Probe έναν πίνακα με τις ακόλουθες στήλες:
'Πλάτος εκτύπωσης', 'Μήκος εκτύπωσης', 'Πλάτος πρόσκλησης', 'Μήκος πρόσκλησης',
'Εμβαδό πρόσκλησης'. Να συμπληρώσεις τουλάχιστον 20 τιμές σε κάθε στήλη. Επίλεξε το κατάλληλο εύρος τιμών για το z.
3. Καθώς αυξάνονται οι τιμές στην στήλη του 'z', τι συμβαίνει στις τιμές κάθε μιας από τις άλλες στήλες;

4. Υπάρχει ελάχιστη τιμή για το εμβαδό της πρόσκλησης; Αν υπάρχει, υπολόγισέ τη και εξήγησε με ποιον τρόπο το έκανες.

5. Υπάρχει μέγιστη τιμή για το εμβαδό της πρόσκλησης; Να στείλεις τις στήλες 'Πλάτος εκτύπωσης' και 'Εμβαδό πρόσκλησης' στο παράθυρο 'Γράφημα', προκειμένου να ελέγξεις την υπόθεσή σου.

6. Το κατάστημα για τις εκτυπώσεις διαθέτει ένα μηχάνημα που μπορεί να κόβει χαρτί με ακρίβεια χιλιοστού. Να βρεις τις διαστάσεις του χαρτιού με το ελάχιστο εμβαδό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγγελία. Αν το χαρτί που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί κοστίζει 1,5 λεπτά το τετραγωνικό εκατοστό, πόσο θα πληρώσει η τάξη για κάθε πρόσκληση;

7. Εκτός από τις προσκλήσεις, αποφασίστηκε η τάξη να κολλήσει μια μεγάλη ανακοίνωση στον πίνακα ανακοινώσεων ως διαφήμιση για να ενημερωθούν για την εκδήλωση και οι υπόλοιποι μαθητές των άλλων τάξεων. Αυτή τη φορά, όμως, θέλει να μεγιστοποιήσει το εμβαδό της, ώστε να μπορούν οι άλλοι μαθητές να τη διαβάζουν από απόσταση. (Εντούτοις, εξακολουθούν να ισχύουν οι υπόλοιποι περιορισμοί.) Ας υποθέσουμε επιπλέον πως για λόγους αισθητικής, αποφασίστηκε το μήκος και το πλάτος της ανακοίνωσης να μη διαφέρουν περισσότερο από τέσσερα εκατοστά. Χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Πίνακας' να βρεις το πλάτος και το μήκος της πρόσκλησης που μεγιστοποιούν το εμβαδό της ανακοίνωσης. Για να βοηθηθείς, με την εντολή 'Διαφορά' δημιούργησε μια νέα στήλη στον πίνακα που να δείχνει τη διαφορά των διαστάσεων της πρόσκλησης. Πώς ερμηνεύεις τις αρνητικές τιμές της στήλης;

11. Η εκδρομή

Το σχολείο σου οργανώνει μια εκδρομή με πούλμαν. Απευθύνεται σε μια ιδιωτική εταιρεία με πούλμαν για να πάρει προσφορά. Η εταιρεία αρχικά σκόπευε να χρεώσει 15 ευρώ για το εισιτήριο. Δεδομένου όμως ότι εκατό μαθητές έχουν δηλώσει συμμετοχή για την εκδρομή από πριν, προτίθεται να μειώνει το κόστος όλων των εισιτηρίων κατά 10 λεπτά για κάθε επιπλέον άτομο που συμμετέχει πέρα από τους πρώτους 100.

1. Πόσα χρήματα θα εισπράξει η εταιρεία αν έρθουν στην εκδρομή 100 μαθητές;

2. Αν έρθουν 110 μαθητές, ποιες θα είναι οι εισπράξεις; Ποιο θα είναι το κέρδος από την προσφορά;

3. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Αριθμομηχανή'. Η πρώτη στήλη αφορά τον αριθμό των μαθητών που υπερβαίνουν τους 100.

Αριθμός μαθητών	Εισπράξεις (ευρώ)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

4. Δημιούργησε τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας' αλλά η στήλη 'Αριθμός μαθητών' θα παίρνει τιμές από 1-60 με βήμα 1, ενώ για τις 'Εισπράξεις' φτιάξε έναν τύπο ο οποίος να παίρνει σαν είσοδο τις τιμές της στήλης 'Αριθμός μαθητών' και να υπολογίζει τις εισπράξεις της εταιρείας ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών που ξεπερνούν τους εκατό.

5. Στείλε τις παραπάνω στήλες στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν τα σημεία δεν φαίνονται, διόρθωσε το πρόβλημα με την εντολή 'Αλλαγή Κλίμακας' στο μενού 'Γράφημα'.

6. Με βάση τη γραφική παράσταση, πόσοι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν, για να έχει η εταιρεία τις μέγιστες εισπράξεις, και κατά συνέπεια το μέγιστο κέρδος;

7. Σε αυτή την περίπτωση, ποιες θα είναι οι μέγιστες εισπράξεις και ποιο το μέγιστο κέρδος; Επαλήθευσέ το στο παράθυρο 'Πίνακας'. Ποιο θα είναι τότε το κόστος ενός εισιτηρίου;

8. Σε ποιες περιπτώσεις το συνολικό κέρδος της εταιρείας θα είναι μηδενικό; Επαλήθευσέ το στη γραφική παράσταση του κέρδους. Επαλήθευσε το αποτέλεσμα από το παράθυρο 'Πίνακας'.

9. Συμφέρει την εταιρία να κρατήσει την προσφορά αν οι συμμετέχοντες υπερβούν τους 150;

12. Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση $y=ax^2+Bx+\gamma$

Α' Μέρος

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' κατασκεύασε έναν πίνακα με δύο στήλες. Την πρώτη θα την ονομάσεις x και θα παίρνει τις τιμές -2,5, -2, -1,5, -1, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5 και τη δεύτερη θα την ονομάσεις y και θα γεμίζει αυτόματα με βάση τον τύπο $y=x^2$. Τι παρατηρείς σχετικά με τις τιμές της συνάρτησης $y=x^2$;

2. Στείλε τις τιμές των στηλών αυτών στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν θέλουμε να ενώσουμε τα σημεία που φαίνονται, με ποιο τρόπο θα το έκανες; Επαλήθευσέ το γραφικά.

3. Με ποιο μετασχηματισμό της γραφικής παράστασης μπορείς να δείξεις ότι οι τιμές της συνάρτησης για $x=-2,5, -2, -1,5, -1$ είναι ίσες με τις τιμές της συνάρτησης για $x=2,5, 2, 1,5, 1$;

4. Αν ανοίγαμε με οριζόντια αυξομείωση (εργαλείο αυξομείωσης) τη γραφική παράσταση κατά 2 μονάδες, τι φαντάζεσαι ότι θα άλλαζε στον τύπο της; Επαλήθευσε την εικασία σου γραφικά.

5. Αν κλείναμε με οριζόντια αυξομείωση τη γραφική παράσταση κατά μισή μονάδα, τι αλλαγές θα παρατηρούσες στον τύπο της; Επαλήθευσε και πάλι την εικασία σου γραφικά.

6. Αν αλλάζαμε τον τύπο της συνάρτησης σε $y=-x^2$, τι αλλαγή θα παρατηρούσες στη γραφική της παράσταση; Επαλήθευσε και πάλι την εικασία σου γραφικά.

7. Σκέψου με ποιο μετασχηματισμό (μετατόπιση, συμμετρικό ή αυξομείωση) θα μπορούσες να ταυτίσεις τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ με την $y=-x^2$; Απόδειξε την εικασία σου και αλγεβρικά.

8. Μετακίνησε την αρχική σου γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα δεξιά. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;

9. Μετακίνησε την αρχική σου γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα αριστερά. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;

10. Μετακίνησε τη γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;

11. Μετακίνησε τη γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;

Β' Μέρος

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' να κάνεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2x^2$. Έπειτα να κάνεις τη γραφική παράσταση της $y=2(x-3)^2+1$. Μετασχημάτισε κατάλληλα την πρώτη γραφική παράσταση, ώστε να ταυτιστεί με τη δεύτερη. Τι μετασχηματισμούς έκανες και κατά πόσες μονάδες;

2. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' (με τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία') και κάνε τη γραφική παράσταση του τύπου $y = -5(x+1)^2 - 4$. Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση θα επέλεγες να μετασχηματίσεις κατάλληλα, ώστε να ταυτιστεί με αυτή τη γραφική παράσταση; Επαλήθευσε την απάντησή σου γραφικά.

3. Κάποιος υποστηρίζει ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $y = ax^2 + bx + c$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\delta(x+\varepsilon)^2 + \zeta$, οπότε η γραφική παράσταση κάθε τριωνύμου βρίσκεται με κατάλληλη μετατόπιση της συνάρτησης ax^2 . Επαλήθευσέ το για τη συνάρτηση $y = x^2 - 6x + 8$, φέρνοντάς την πρώτα στη μορφή $y = \delta(x+\varepsilon)^2 + \zeta$.

13. Ο παραγωγός μήλων

Ένας παραγωγός μήλων διαπίστωσε ότι τα μήλα στο κτήμα του ωρίμασαν και πρέπει να τα μαζέψει το αργότερο μέσα σε έξι εβδομάδες. Αντιμετωπίζει όμως το εξής πρόβλημα: Αν τα μαζέψει σήμερα, κάθε δέντρο θα του αποδώσει 42 κιλά κατά μέσο όρο. Για κάθε εβδομάδα που περνάει, εκτιμά ότι η απόδοση κάθε δέντρου θα μειώνεται κατά 1 κιλό (από πέσιμο μήλων στο έδαφος, κτλ.), ενώ η τιμή πώλησης θα αυξάνεται κατά 0,6 λεπτά το κιλό. Η σημερινή τιμή πώλησης είναι 24 λεπτά το κιλό.

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή για τις πράξεις σου.

1. Ποιο είναι το κέρδος του παραγωγού ανά δένδρο, αν πουλήσει σήμερα τα μήλα του;

2. Στην αρχή της άλλης εβδομάδας πόσα κιλά θα είναι τα μήλα, πόσα ευρώ θα κοστίζουν το κιλό και ποιο θα είναι το κέρδος του παραγωγού;

3. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Σαν εβδομάδα 0 θεώρησε την τρέχουσα εβδομάδα.

Αριθμός εβδομάδων	Κέρδος ανά δένδρο (ευρώ)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

4. Δημιούργησε τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας' αλλά για τη στήλη 'Κέρδος' φτιάξε έναν τύπο, ο οποίος θα παίρνει σαν είσοδο τις τιμές της στήλης 'Αριθμός εβδομάδων' και θα υπολογίζει το κέρδος κάθε εβδομάδας ανά δένδρο.
5. Στείλε τα σημεία αυτά στο παράθυρο 'Γράφημα'. Μπορείς να διακρίνεις τα σημεία; Αν όχι, δικαιολόγησε γιατί και διόρθωσε το πρόβλημα.

6. Με την εντολή 'Σύνδεση σημείων' ένωσε τα σημεία αυτά. Μπορείς από τη γραφική παράσταση να υπολογίσεις το κέρδος του παραγωγού, αν πουλούσε τα μήλα του στα μισά της δεύτερης εβδομάδας, χρησιμοποιώντας το εργαλείο 'Δείκτη σημείου'; Επαλήθευσε την απάντησή σου χρησιμοποιώντας τον 'Πίνακα'. Εξήγησε τη διαφορά των αποτελεσμάτων. Χρησιμοποίησε το εικονίδιο μεγέθυνσης για να δεις καλύτερα τις γραφικές παραστάσεις.

7. Ποιον τύπο πρέπει να εισαγάγεις στην περιοχή εγγραφής τύπου, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία που φαίνονται;

8. Με το εργαλείο 'Δείκτη σημείου' να υπολογίσεις από τη γραφική παράσταση ποια είναι η κατάλληλη εβδομάδα, για να πουλήσει τα μήλα του. Επαλήθευσέ το στο παράθυρο 'Πίνακας'.

9. Μετατόπισε τη γραφική παράσταση οριζόντια προς τα δεξιά κατά τον άξονα των x κατά μια μονάδα. Τι έχει αλλάξει ως προς το μέγιστο κέρδος και ως προς την εβδομάδα που πρέπει να πουλήσει τα μήλα του;

10. Από πού θα άρχιζες την αρίθμηση των εβδομάδων, ώστε να μπορείς από το νέο τύπο της μετατοπισμένης γραφικής παράστασης να βρεις τα ίδια αποτελέσματα;

11. Παρατήρησε τον τύπο της μετατοπισμένης γραφικής παράστασης και βρες τη διαφορά με τον τύπο της αρχικής. Διατύπωσε σε μορφή κανόνα πώς μεταβάλλεται ο τύπος μιας συνάρτησης, όταν η γραφική της παράσταση μετακινηθεί κατά τον άξονα των x προς τα δεξιά.

Ομάδα Δ: Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

14. Ο τροχός του Λούνα Πάρκ

Φαντάσου πως είσαι ανεβασμένος στον τροχό του Λούνα Παρκ ο οποίος περιστρέφεται. Θεωρούμε αυτού του είδους την κίνηση κυκλική, αφού το σώμα μας ακολουθεί την κυκλική κίνηση του τροχού.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο τροχός έχει διάμετρο 24,5 m και εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 δευτερόλεπτα, ενώ στρέφεται με φορά αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο τροχός είναι κατασκευασμένος με τέτοιον τρόπο, ώστε η χαμηλότερη θέση του να απέχει από το έδαφος 3,5 m. Η πλατφόρμα από την οποία ανεβαίνεις βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το κέντρο του τροχού. Ξεκινώντας λοιπόν το γύρο με τον τροχό, η θέση σου βρίσκεται στο ύψος του κέντρου του.

Πριν ξεκινήσεις, σχεδίασε ένα σχήμα για να βοηθηθείς.

1. Πόσο απέχεις από την πλατφόρμα μετά από 3 sec; (Να στρογγυλοποιήσεις την απάντησή σου στο πλησιέστερο εκατοστό). Σε πόση ώρα θα βρεθείς στο υψηλότερο σημείο του γύρου;

3. Πόσο απέχεις από την πλατφόρμα μετά από 9 sec; Μετά από 12, 15, 36 sec;

4. Να κατασκευάσεις έναν πίνακα στο Function Probe, για να εκφράσεις τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο και το ύψος πάνω ή κάτω από την πλατφόρμα, για δύο τουλάχιστον πλήρεις περιστροφές του τροχού (με βήμα 1). Να εξηγήσεις πώς προέκυψαν οι τιμές του πίνακα.

2. Ανεβαίνεις περισσότερο τα πρώτα 3 sec ή τα 3 επόμενα; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου. Για να διευκολυνθείς στην απάντησή σου μπορείς να δημιουργήσεις μία στήλη 'διαφορών' ως εξής: κάνεις κλικ με το αριστερό πλήκτρο στη στήλη που δείχνει την απόσταση από την πλατφόρμα για να την ενεργοποιήσεις, και επιλέγεις την εντολή 'Διαφορά' από το μενού 'Πίνακας'.

5. Να στείλεις τις τιμές των κατάλληλων στηλών από το παράθυρο 'Πίνακας' στο παράθυρο 'Γράφημα', για να δημιουργήσεις τη γραφική παράσταση του ύψους από την πλατφόρμα συναρτήσει του χρόνου. Στο παράθυρο 'Γράφημα' να πληκτρολογήσεις τον τύπο της συνάρτησης που μας δίνει την απόσταση από την πλατφόρμα. Τι παρατηρείς;

6. Να δημιουργήσεις το διάγραμμα της $y = \eta \mu x$. Να δείξεις με ποιον τρόπο μπορείς να χρησιμοποιήσεις μετασχηματισμούς στη γραφική παράσταση του $y = \eta \mu x$, για να παραγάγεις το διάγραμμα που αντιστοιχεί στον τροχό του Λούνα Παρκ.

7. Πώς θα άλλαζε ο πίνακας, το γράφημα και ο τύπος σου αν:
- > Σε ενδιέφερε να μάθεις το ύψος από το έδαφος και όχι από την πλατφόρμα;
 - > Ο τροχός περιστρεφόταν με τη διπλάσια ταχύτητα; Ή με τη μισή της αρχικής, ταχύτητα;
 - > Η διάμετρος του τροχού ήταν 23 m;
 - > Η πλατφόρμα ήταν τοποθετημένη στο κάτω μέρος του τροχού;

8. Αν η βόλτα με τον τροχό του Λούνα Πάρκ διαρκεί πέντε λεπτά, ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το πεδίο τιμών της συνάρτησης που αντιστοιχεί σε αυτά τα δεδομένα;

15. Πρόβλεψη θερμοκρασιών

Σας δίνετε ο παρακάτω πίνακας τιμών μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας Αθηνών (Ιανουάριος 1983-Δεκέμβριος 1984).

Μήνας	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Θερμοκρασία (°C)	8.8	7.5	11.3	16.7	21.4	22.9	26.8	26	23.2	17.7	13.3	11.2
Μήνας	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Θερμοκρασία (°C)	10.8	10.3	10.8	13.4	20.7	23.9	26.2	24.9	24	20.7	14.4	10.4

1. Να δημιουργήσεις τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας' που θα αποτελείται από 2 στήλες: τη στήλη 'Μήνας' που παίρνει τιμές από 1-24, και τη στήλη 'Θερμοκρασία'. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή, η μέγιστη τιμή και το εύρος των τιμών του παραπάνω δείγματος; Επίλεξε την εντολή 'Εμφάνιση στατιστικών' στο μενού 'Πίνακας' για να απαντήσεις στο ερώτημα.

2. Στείλε τα σημεία στο παράθυρο 'Γράφημα'. Τι παρατηρείς σχετικά με την αύξηση και μείωση των τιμών της θερμοκρασίας;

3. Κάποιος ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση του συνημιτόνου με κατάλληλους μετασχηματισμούς 'μοντελοποιεί' τη θερμοκρασία στην περίοδο αυτή. Στο ίδιο γράφημα κάνε τη γραφική παράσταση του $\sin x$ και προσπάθησε με κατάλληλους μετασχηματισμούς (μετατόπιση, αυξομείωση) της συνάρτησης αυτής να προσεγγίσεις τα σημεία που φαίνονται. Γράψε στο φύλλο εργασίας τι είδους μετασχηματισμό κάνεις κάθε φορά καθώς και το πώς γίνεται κάθε φορά ο τύπος της συνάρτησης $\sin x$, όταν εκτελεστεί ο αντίστοιχος μετασχηματισμός.

4. Αν η θερμοκρασία είναι φαινόμενο περιοδικό, μπορείς να προβλέψεις από τη γραφική παράσταση τις θερμοκρασίες για τους επόμενους δύο μήνες του 1985;

5. Ποια είναι η περίοδος στο παραπάνω δείγμα;

16. Μελέτη των συναρτήσεων $y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$ και των μετασχηματισμών τους.

Α' Μέρος

1. Να κατασκευάσεις στο Function Probe τη γραφική παράσταση της $y=\eta\mu x$. Στον οριζόντιο άξονα να ορίσεις κλίμακα από το -4π ως το 4π (-4 ως 4) με βήμα 0.5π (0.5) και στον κατακόρυφο άξονα από το -5π ως το 5π (-5 ως 5) με βήμα 1π (1).

Να μελετήσεις τη γραφική παράσταση και να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:

- α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
- β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
- γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
- δ) Ποια είναι η περίοδος;

2. Να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία μετασχηματισμών από την 'Εργαλειοθήκη', για να εκτελέσεις την ακόλουθη διερεύνηση:

- α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
- β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
- γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
- δ) Ποια είναι η περίοδος;
- ε) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;

σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- > Έχοντας επιλεγμένη τη γραφική παράσταση της $y=\eta\mu x$, να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μετατόπισης, για να μεταφέρεις το διάγραμμα κατά τρεις μονάδες, κατακόρυφα.

- α)

- β)

- γ)

- δ)

- ε)

- > Κάνε κλικ στη γραφική παράσταση της $y=\eta\mu x$, για να την επιλέξεις ξανά. Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο αυξομείωσης, για να ανοίξεις το διάγραμμα κατακόρυφα κατά τρεις μονάδες.

- α)

- β)

- γ)

- δ)

- ε)

- > Να καθαρίσεις το παράθυρο 'Γράφημα' από όλες τις γραφικές παραστάσεις (μενού 'Επεξεργασία') και να αφήσεις μόνο το διάγραμμα της $y=\eta\mu x$. Κάνε κλικ πάνω σε αυτό, για να το επιλέξεις. Χρησιμοποίησε το εργαλείο συμμετρίας, για να δημιουργήσεις το συμμετρικό του ως προς τον άξονα των $x\acute{x}$.

- α) _____
 β) _____
 γ) _____
 δ) _____
 ε) _____

3. Να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία μετασχηματισμών από την 'Εργαλειοθήκη', για να εκτελέσεις την ακόλουθη διερεύνηση:

- α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
 β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
 γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
 δ) Ποια είναι η περίοδος;
 ε) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;

σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- > Έχοντας επιλεγμένη την γραφική παράσταση της $y=\eta\mu x$ να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μετατόπισης, για να μεταφέρεις το διάγραμμα κατά τρεις μονάδες οριζόντια.

- α) _____
 β) _____
 γ) _____
 δ) _____
 ε) _____

- > Κάνε κλικ στη γραφική παράσταση της $y=\eta\mu x$, για να την επιλέξεις ξανά. Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο αυξομειώσης, για να 'ανοίξεις' το διάγραμμα οριζόντια κατά τρεις μονάδες.

- α) _____
 β) _____
 γ) _____
 δ) _____
 ε) _____

- > Να καθαρίσεις το παράθυρο 'Γράφημα' από όλες τις γραφικές παραστάσεις (μενού 'Επεξεργασία') και να αφήσεις μόνο το διάγραμμα της $y=\eta\mu x$. Κάνε κλικ πάνω σε αυτό, για να το επιλέξεις. Χρησιμοποίησε το εργαλείο συμμετρίας, για να δημιουργήσεις το συμμετρικό του ως προς τον άξονα των $y\acute{y}$.

- α) _____
 β) _____
 γ) _____
 δ) _____
 ε) _____

4. Να καθαρίσεις το παράθυρο 'Γράφημα' και να κατασκευάσεις τη γραφική παράσταση του $y = \sin x$ και να επαναλάβεις τα βήματα 1, 2 και 3 για τη συνάρτηση αυτή.

5. Να περιγράψεις τι συμβαίνει στη γραφική παράσταση και στον τύπο των συναρτήσεων $y = \eta\mu x$ και $y = \sin x$ όταν:

- α) το διάγραμμα μεταφέρεται οριζόντια
- β) το διάγραμμα μεταφέρεται κατακόρυφα
- γ) το διάγραμμα ανοίγει κατακόρυφα
- δ) το διάγραμμα ανοίγει οριζόντια
- ε) πάρουμε το συμμετρικό του διαγράμματος ως προς τον άξονα των x
- στ) πάρουμε το συμμετρικό του διαγράμματος ως προς τον άξονα των y

α)

β)

γ)

δ)

ε)

στ)

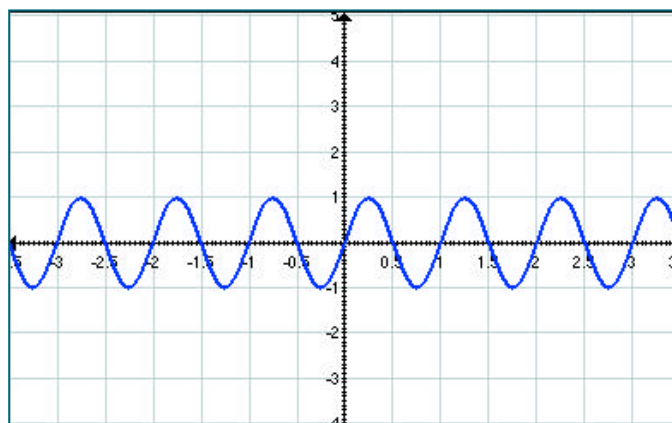
6. Για κάθε σύνολο τύπων, αρχικά να προβλέψεις ποια από τα διαγράμματα θα μοιάζουν και στη συνέχεια κατασκευάσε τα στο ίδιο σύστημα αξόνων.

- α) $y = \eta\mu(x)$, $y = 4\eta\mu(x)$, $y = \eta\mu(4x)$
- β) $y = \sin(x)$, $y = \eta\mu(x) + 6,28$, $y = \sin(x + 2\pi)$
- γ) $y = \eta\mu(x)$, $y = 0,5\eta\mu(x - 2\pi)$
- δ) $y = \sin(x)$, $y = -2\sin(0,5x)$

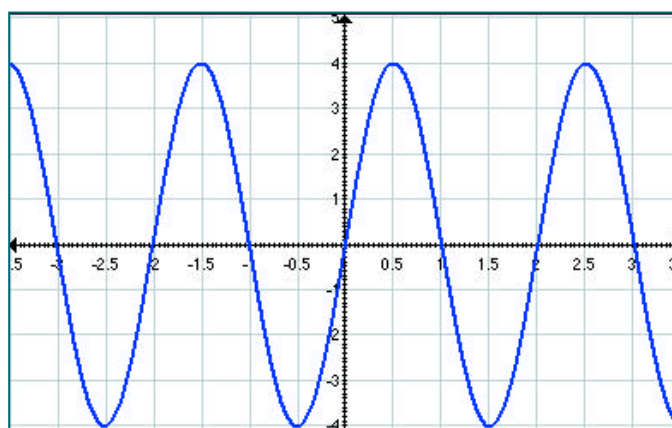
7. Γενικά, σε σύγκριση με την $y = \eta\mu x$, ποια είναι η επίδραση των A , B , Γ , Δ στη γραφική παράσταση της $y = A \cdot \eta\mu(Bx + \Gamma) + \Delta$;

Β' Μέρος

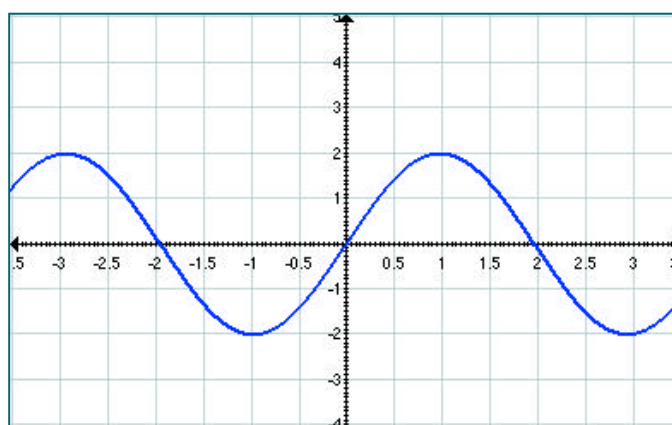
1. Για κάθε ένα από τα έξι διαγράμματα στις επόμενες σελίδες, να βρεις τον τύπο της συνάρτησης ταιριάζοντας ένα διάγραμμα στην οθόνη με αυτό που υπάρχει στο χαρτί. (Να ξεκινήσεις κάνοντας το παράθυρο 'Γράφημα' στην οθόνη το ίδιο μέγεθος με αυτό που έχουν τα διαγράμματα στο βιβλίο σου και ρύθμισε την κλίμακα ανάλογα. Να δώσεις ιδιαίτερη προσοχή στη διαδικασία (οριζόντια ή κατακόρυφη αυξομείωση, μετατόπιση κτλ.) που χρησιμοποιείς κάθε φορά, για να επιτύχεις το επιθυμητό αποτέλεσμα.



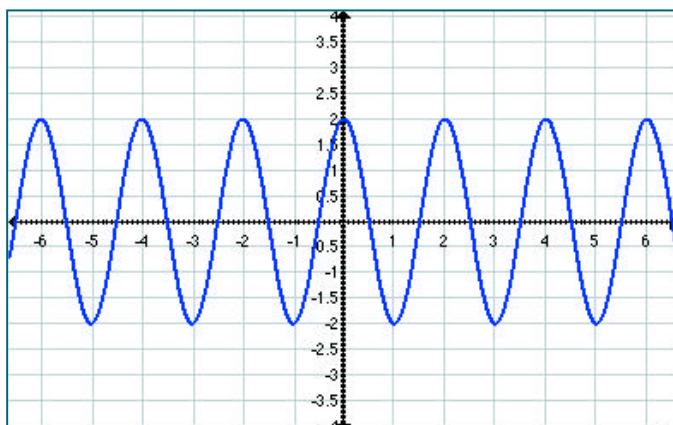
διάγραμμα 1



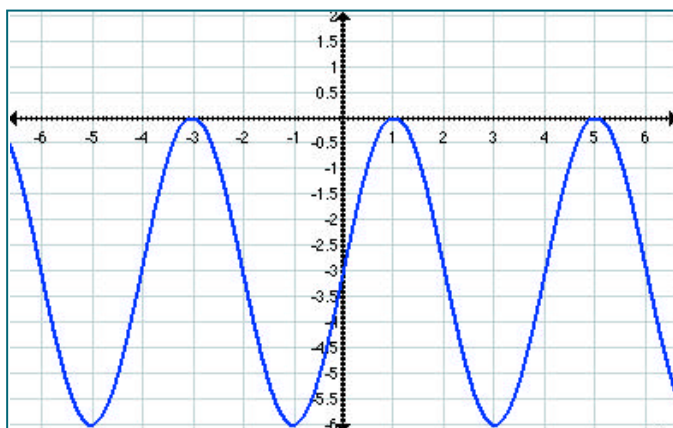
διάγραμμα 2



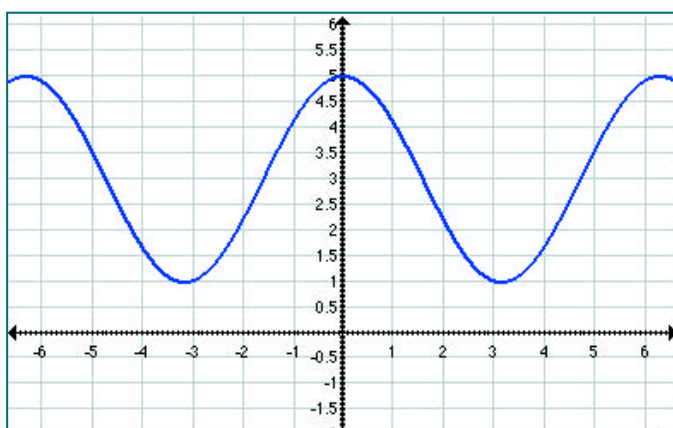
διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5



διάγραμμα 6

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΑ: Αν τελείωσες και έχεις όρεξη για λίγη ακόμα δουλειά, τότε δοκίμασε να ξανακάνεις τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις, αντικαθιστώντας όμως αυτή τη φορά τα συνημίτονα με τα ημίτονα και αντίστροφα

17. Μελέτη των συναρτήσεων $y=\epsilon\phi x$, $y=\sigma\phi x$ και των μετασχηματισμών τους

Α' Μέρος

1. Να κατασκευάσεις στο Function Probe τη γραφική παράσταση της $y=\epsilon\phi x$. Στον οριζόντιο άξονα να ορίσεις κλίμακα από το -5π ως το 5π (-5 ως 5) με βήμα 0.5π (0.5) και στον κατακόρυφο άξονα από το -5π ως το 5π (-5 ως 5) με βήμα 0.5π (1).

Να μελετήσεις τη γραφική παράσταση και να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:

- α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
- β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
- γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
- δ) Ποια είναι η περίοδος;

2. Να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία μετασχηματισμών από την 'Εργαλειοθήκη' πάνω από το παράθυρο 'Γράφημα', για να εκτελέσεις την ακόλουθη διερεύνηση:

- α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
- β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
- γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
- δ) Ποια είναι η περίοδος;
- ε) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;

σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- > Έχοντας επιλεγμένη τη γραφική παράσταση της $y=\epsilon\phi x$ να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μετατόπισης, για να μεταφέρεις το διάγραμμα κατά τρεις μονάδες, κατακόρυφα (οριζόντια).

- α)

- β)

- γ)

- δ)

- ε)

- > Κάνε κλικ στη γραφική παράσταση της $y=\epsilon\phi x$, για να την επιλέξεις ξανά. Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο αυξομείωσης, για να 'ανοίξεις' το διάγραμμα κατακόρυφα (οριζόντια) κατά τρεις μονάδες.

- α)

- β)

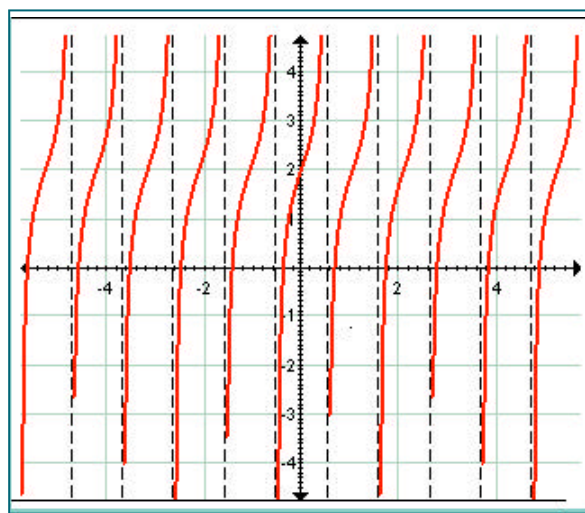
- γ)

- δ)

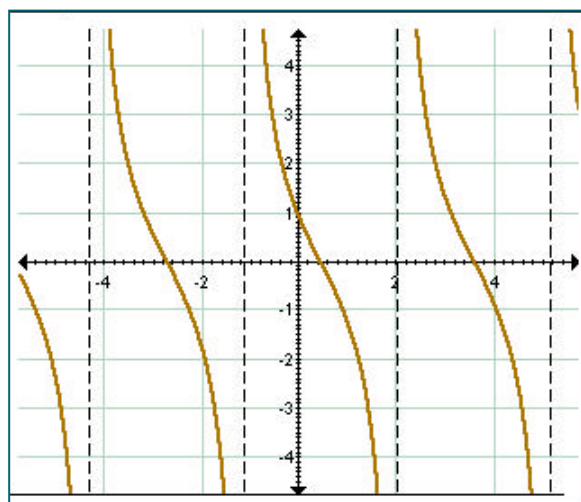
- ε)

1. Για κάθε ένα από τα διαγράμματα στις επόμενες σελίδες, να βρεις τον τύπο της συνάρτησης ταιριάζοντας ένα διάγραμμα στην οθόνη με αυτό που υπάρχει στο χαρτί. (Να ξεκινήσεις κάνοντας το παράθυρο 'Γράφημα' στην οθόνη στο ίδιο μέγεθος με αυτό που έχουν τα διαγράμματα στο βιβλίο σου και ρύθμισε την κλίμακα ανάλογα. Να δώσεις ιδιαίτερη προσοχή στη διαδικασία (άνοιγμα οριζόντιο ή κατακόρυφο, μετατόπιση κτλ.) που χρησιμοποιείς κάθε φορά, για να επιτύχεις το επιθυμητό αποτέλεσμα.

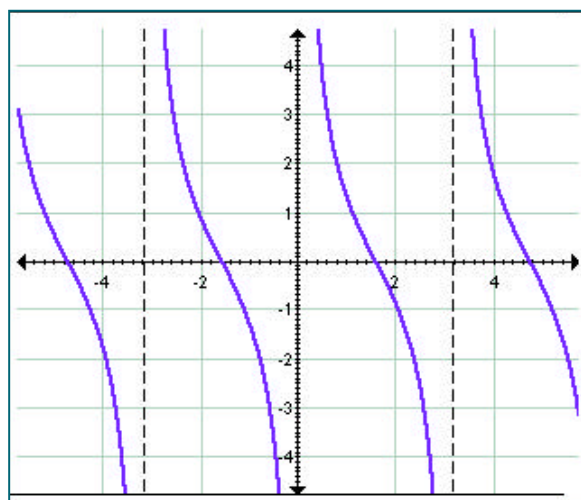
[illegible]



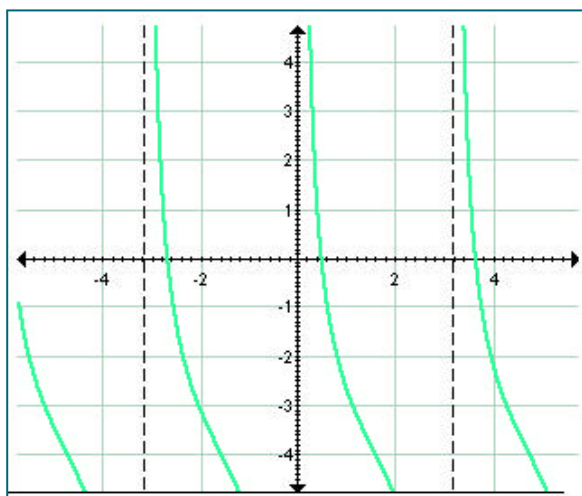
διάγραμμα 1



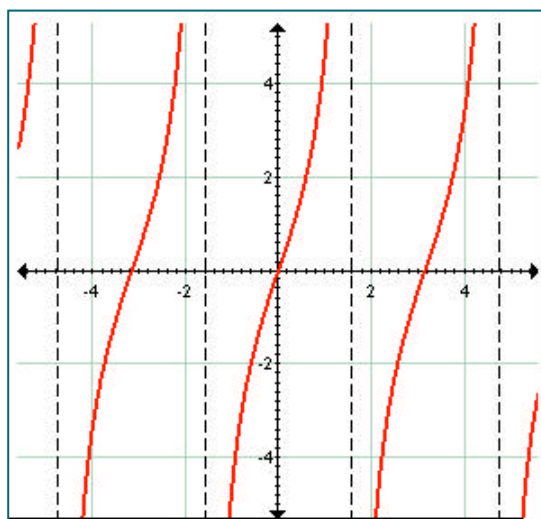
διάγραμμα 2



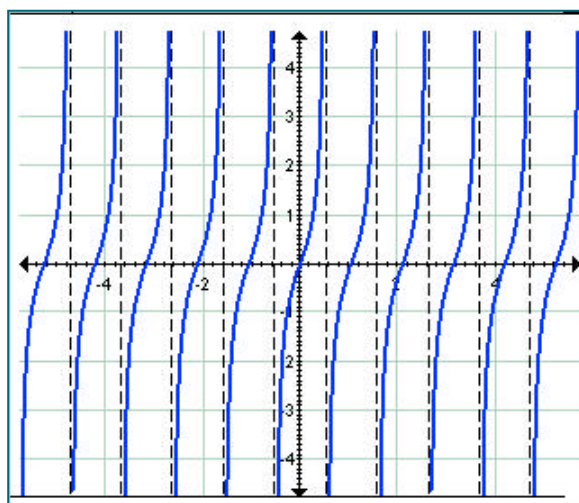
διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5



διάγραμμα 6

Ομάδα Ε: Άλλες Συναρτήσεις

18. Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση της απόλυτης τιμής

Α' Μέρος: Γραφική αναπαράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης 'Απόλυτη τιμή'

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' του Function Probe κατασκεύασε μια στήλη με τιμές του 'x' από -12 έως 12. Να κατασκευάσεις μια δεύτερη στήλη εισάγοντας $y=abs(x)$. Περιγράψε τις συσχετίσεις που βλέπεις σε αυτή τη στήλη. Χρησιμοποίησε τις εντολές 'Διαφορά' και 'Λόγος', για να ανακαλύψεις και άλλες σχέσεις.

2. Επίλεξε την εντολή 'Σημεία σε Γράφημα' από το μενού 'Αποστολή' και άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα', για να δεις τη σχέση ανάμεσα στα x και y. (Έχε το παράθυρο ανοιχτό σε πλήρες μέγεθος για αυτή την άσκηση). Κάνε μια περιγραφή του διαγράμματος, συμπεριλαμβάνοντας τη θέση του κατώτατου σημείου και τη γωνία που σχηματίζει γραφική παράσταση με τον άξονα των x. Πώς φαίνονται στο διάγραμμα οι σχέσεις που βρήκες στον πίνακα;

Β' Μέρος: Μετατοπίσεις

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' μετάφερε τα σημεία στη γραφική παράσταση της $y=abs(x)$ κατά έξι μονάδες, κατακόρυφα. Για να το πετύχεις αυτό, κάνε κλικ στο εικονίδιο μετατόπισης και από το παράθυρο διαλόγου επίλεξε το βέλος της κατακόρυφης μετατόπισης. Στη συνέχεια, σύρε τα σημεία της $y=abs(x)$, κατά έξι μονάδες κατακόρυφα. Περιγράψε το νέο διάγραμμα: Τι έχει αλλάξει; Τι έμεινε ίδιο;

2. Να προβλέψεις τι επίδραση έχει η μετατόπιση στον πίνακα με τις τιμές (που έχεις κατασκευάσει) και στη συνέχεια να στείλεις τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας', επιλέγοντας την εντολή 'Σημεία σε Πίνακα' από το μενού 'Αποστολή'. (Θα εμφανιστούν δύο μηνύματα τα οποία θα σε προειδοποιούν ότι οι αρχικές στήλες για τα x και y θα

απενεργοποιηθούν. Κάθε φορά θα κάνεις κλικ στο κουμπί 'OK' για να συνεχίσεις.) Δύο νέες στήλες θα εμφανιστούν στην οθόνη και θα αντιπροσωπεύουν τα μετατοπισμένα σημεία. Επαληθεύουν τα νέα σημεία τις προβλέψεις σου; Τι επίδραση έχει μια κατακόρυφη μετατόπιση στο παράθυρο 'Πίνακας';

3. Να προβλέψεις την επίδραση που έχει η μετατόπιση στον τύπο της $y=abs(x)$. Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, γράψε τον τύπο σου στο παράθυρο 'Γράφημα', ως συνάρτηση προς σχεδίαση. Διέρχεται από τα νέα σημεία; Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου στο παράθυρο 'Πίνακας', μπορείς να στείλεις τον τύπο σου από το παράθυρο 'Γράφημα', επιλέγοντας την εντολή 'Ορισμός αντικειμένου' στο παράθυρο 'Γράφημα' και γράφοντας ' $z=g1(x)$ ' στο παράθυρο 'Πίνακας'. Τα σημεία από τη $g1(x)$ ταυτίζονται με τα μετατοπισμένα σημεία; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης μετατόπισης στον τύπο;

4. Τι επίδραση θα είχε μια κατακόρυφη μετατόπιση 11 μονάδων προς τα κάτω, στον πίνακα, στο διάγραμμα και στον τύπο;

5. Πραγματοποίησε τώρα αντίστοιχες οριζόντιες μετατοπίσεις στην αρχική συνάρτηση $y=abs(x)$:
α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στις τιμές του πίνακα; β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στον τύπο; γ) Ποια θα ήταν η επίδραση, αν η μετατόπιση γινόταν προς τα αριστερά;

Γ' Μέρος: Αυξομειώσεις

1. Καθάρισε τον πίνακα από όλες τις στήλες, εκτός της αρχικής x ($-12 < x < 12$) και της $y=abs(x)$. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' από όλα τα διαγράμματα, εκτός από τα σημεία της $y=abs(x)$. Άνοιξε τη γραφική παράσταση κατακόρυφα με συντελεστή 2, χρησιμοποιώντας το εργαλείο αυξομείωσης. (Κάνε κλικ στο εικονίδιο αυξομείωσης και επέλεξε την κατακόρυφη αυξομείωση). Πάτησε το πλήκτρο 'Enter', για να τοποθετήσεις τη Γραμμή Άγκυρας στο $y=0$. Σύρε το διάγραμμα κατακόρυφα, μέχρι να διαβάξεις στο συντελεστή για το άνοιγμα το '2'. Να

συγκρίνεις τα παλιά με τα νέα σημεία. Τι έχει αλλάξει; Τι έχει παραμείνει το ίδιο;

2. α) Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον πίνακα τιμών: Πώς θα αλλάξει κάθε σημείο; Στη συνέχεια στείλε τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας'. β) Ήταν σωστή η πρόβλεψη σου; γ) Ποια είναι η επίδραση ενός ανοίγματος με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;

3. Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον τύπο της $y=abs(x)$. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου χρησιμοποιώντας είτε το παράθυρο 'Γράφημα' είτε το παράθυρο Πίνακας. Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στον τύπο της συνάρτησης;

4. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία για μια κατακόρυφη αυξομείωση με συντελεστή το $\frac{1}{2}$ (γνωστό και ως συρρίκνωση). Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το $\frac{1}{2}$ στις τιμές του πίνακα; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στον τύπο της συνάρτησης;

5. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία τώρα για μια οριζόντια αυξομείωση.
 α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
 β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στις τιμές του πίνακα;
 γ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
 δ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στον τύπο της συνάρτησης;

1. Να προβλέψεις τη μορφή της γραφικής παράστασης του $y=abs(2x+8)$. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, δημιουργώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποιες είναι οι μεταφορές και/ή οι αυξομειώσεις που σχετίζονται με αυτή την συνάρτηση; Να σχεδιάσεις την $y=2abs(x+4)$. Ποια είναι η σχέση της με τη γραφική παράσταση της $y=abs(2x+8)$;

-

- $$y = -2\text{abs}(2x + 8) - 5$$

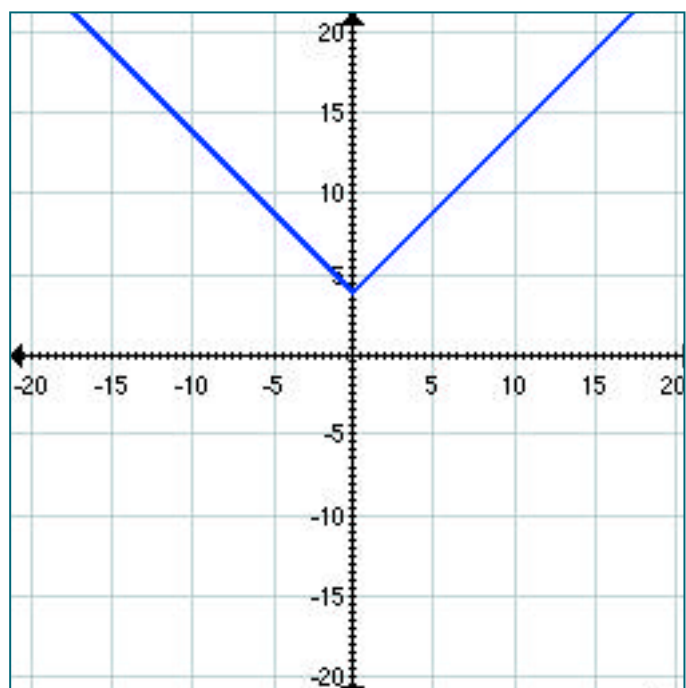
[illegible]

Ε' Μέρος: Περιγραφή μετασχηματισμών από τις γραφικές αναπαραστάσεις τους.

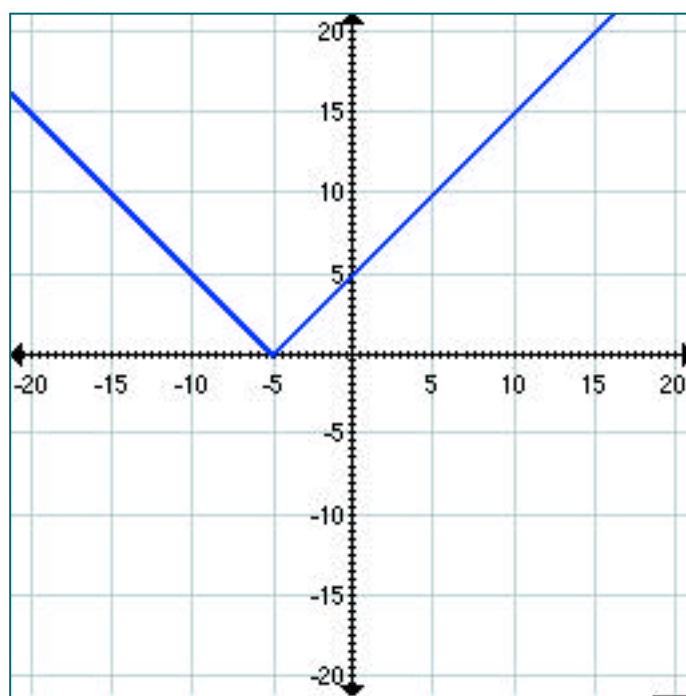
Για κάθε διάγραμμα της επόμενης σελίδας;

- i. Να αναφέρεις με ποιον τρόπο η γραφική παράσταση της $y=abs(x)$ μετασχηματίστηκε στο δοθέν διάγραμμα.

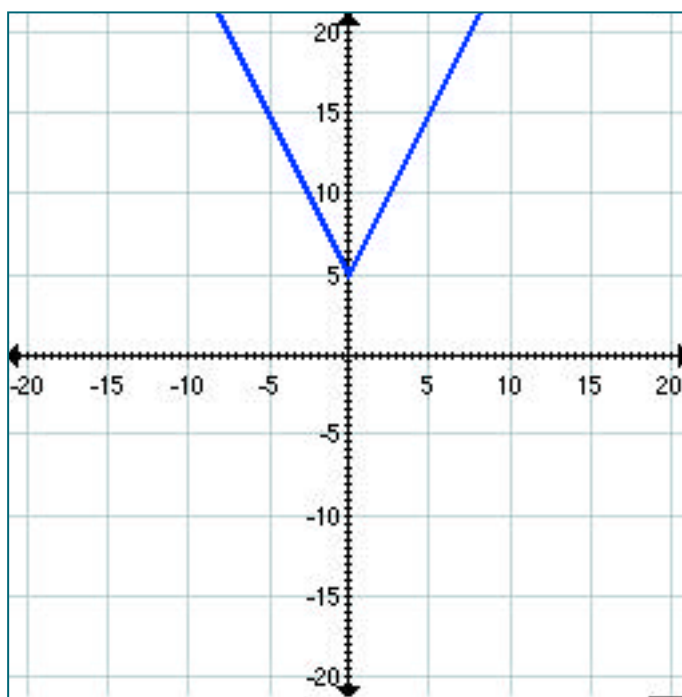
- ii. Να γράψεις τον τύπο της συνάρτησης, στην οποία αντιστοιχεί το διάγραμμα χρησιμοποιώντας το Function Probe, για να ελέγξεις την απάντησή σου.



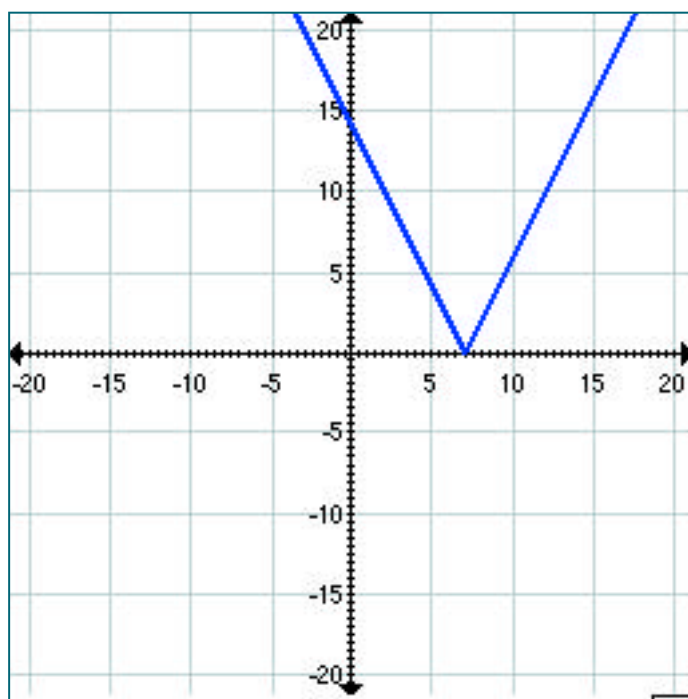
διάγραμμα 1



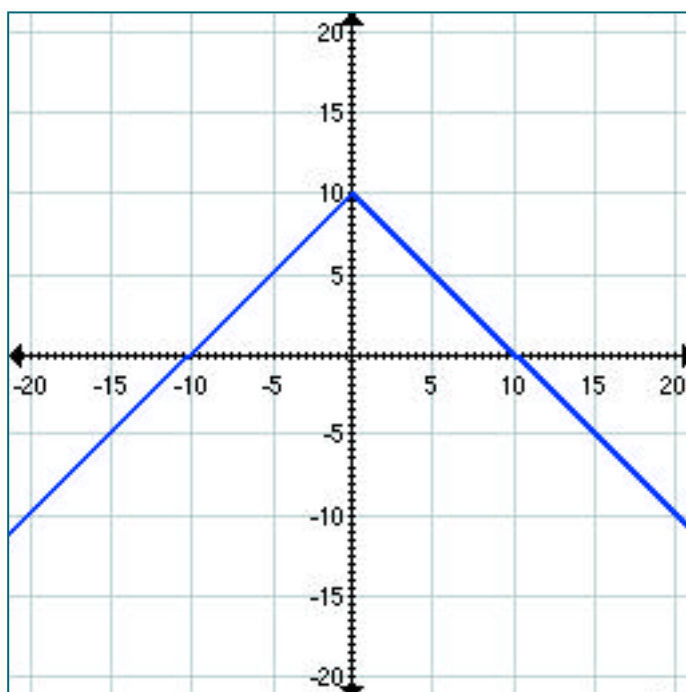
διάγραμμα 2



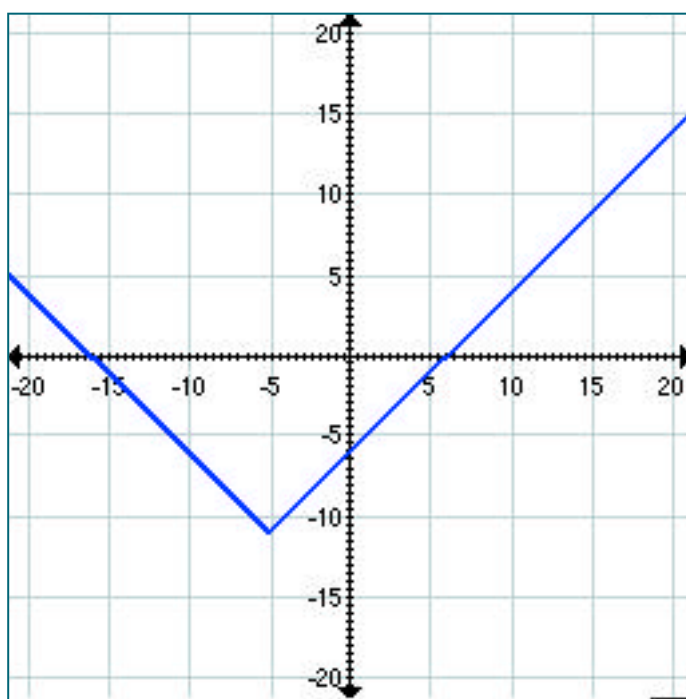
διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5



διάγραμμα 6

19. Το πρόβλημα του χώρου στάθμευσης

Το Συμβούλιο του εμπορικού κέντρου 'Ιθάκη' εξετάζει πέντε διαφορετικούς τρόπους χρέωσης για τη χρήση του χώρου στάθμευσης του εμπορικού κέντρου. Το συμβούλιο θα ήθελε φυσικά να κερδίσει όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα, χωρίς όμως να χάσει τους πελάτες του εμπορικού κέντρου. Προκειμένου δε να εξασφαλιστεί ότι ο χώρος στάθμευσης θα είναι ελεύθερος, για να χρησιμοποιείται από τους ιδιοκτήτες των καταστημάτων και όχι από τους ανθρώπους που εργάζονται στην πόλη, το συμβούλιο όρισε ως μέγιστο χρόνο παραμονής στο χώρο για οποιονδήποτε πελάτη του εμπορικού κέντρου, τις πέντε ώρες.

εκδοχή Α

λιγότερο από μια ώρα	δωρεάν
περισσότερο από μια αλλά λιγότερο από δύο ώρες	35 λεπτά
περισσότερες από δύο αλλά λιγότερες από τρεις ώρες	70 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Β

λιγότερο από μια ώρα	59 λεπτά
περισσότερο από μια αλλά λιγότερο από δύο ώρες	94 λεπτά
περισσότερες από δύο αλλά λιγότερες από τρεις ώρες	130 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Γ

λιγότερο από μισή ώρα	δωρεάν
περισσότερο από μισή αλλά λιγότερο από 1,5 ώρες	47 λεπτά
περισσότερο από 1,5 αλλά λιγότερο από 2,5 ώρες	94 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Δ

λιγότερο από μισή ώρα	18 λεπτά
περισσότερο από μισή αλλά λιγότερο από μια ώρα	35 λεπτά
περισσότερο από μια αλλά λιγότερο από 1,5 ώρες	53 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Ε

λιγότερο από 0,25 της ώρας	18 λεπτά
περισσότερο από 0,25 αλλά λιγότερο από 0,75 της ώρας	41 λεπτά
περισσότερο από 0,75 αλλά λιγότερο από 1,25 της ώρας	65 λεπτά
κτλ.	

1. Προκειμένου το Συμβούλιο να μπορέσει να αποφασίσει ποια από τις πέντε εκδοχές είναι προτιμότερο να εφαρμοστεί, σου ζητάει να ετοιμάσεις έναν πίνακα με τον οποίο θα είναι

δυνατή η αριθμητική σύγκρισή τους. Η στήλη στην οποία θα φαίνεται ο χρόνος, μπορεί να ξεκινάει από το 0,2 της ώρας και να φτάνει στις 4,8 ώρες με βήμα 0,2 της ώρας. Εξήγησε πώς έφτιαξες την κάθε στήλη του πίνακα. Ποιο είναι το κόστος της στάθμευσης για 4,5 ώρες για κάθε μια εκδοχή;

Χρόνος (ώρες)	Εκδοχή Α	Εκδοχή Β	Εκδοχή Γ	Εκδοχή Δ	Εκδοχή Ε
4,5 ώρες					

2. Τι συσχετίσεις παρατηρείς σε κάθε στήλη του πίνακα; Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις τιμές που έχουν οι στήλες που αντιστοιχούν στις εκδοχές Α και Β;

3. Ετοιμάζοντας την πρότασή σου για το συμβούλιο, αποφασίζεις να ετοιμάσεις γραφικές παραστάσεις για κάποιες από τις τέσσερις εκδοχές. Στείλε τα δεδομένα σημεία για την Α εκδοχή στο παράθυρο 'Γράφημα' και άλλαξε την κλίμακα, για να δεις ολόκληρο το σύνολο των σημείων. Περίγραψε τη σχέση που εμφανίζεται. Αποτελεί αυτό το διάγραμμα γραφική παράσταση συναρτήσεως; Στείλε τα δεδομένα σημεία για τη Β εκδοχή στο παράθυρο 'Γράφημα'. Ως προς τι μοιάζουν τα δύο διαγράμματα; Σε τι διαφέρουν;

4. Τι είδος συνάρτησης (γραμμική, δευτέρου βαθμού, λογαριθμική...) μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να μοντελοποιηθούν οι δύο εκδοχές; Χρησιμοποίησε τα διαγράμματα και τον πίνακα, για να γράψεις τύπους συναρτήσεων, που εκφράζουν τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο παραμονής στο χώρο στάθμευσης και το πληρωτέο αντίτιμο, σύμφωνα με τις εκδοχές Α και Β. Να καθορίσεις το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών για κάθε συνάρτηση. Δημιούργησε τη γραφική

παράσταση των συναρτήσεων που έγραψες ως τύπους στο παράθυρο 'Γράφημα' και βεβαιώσου ότι οι τύποι σου ταυτίζονται με τα σημεία του πίνακα.

5. Στείλε τα δεδομένα σημεία της εκδοχής Γ στο παράθυρο 'Γράφημα' και σύγκρινε την καμπύλη που προκύπτει με την αντίστοιχη της εκδοχής Α. (Θα είναι μάλλον πιο βολικό, αν σβήσεις την καμπύλη που αντιστοιχεί στην εκδοχή Β.) Ως προς τι διαφέρει το διάγραμμα της εκδοχής Γ από αυτό της Α;

6. Γράψε τον τύπο μιας συνάρτησης που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στον χρόνο παραμονής στο χώρο στάθμευσης και το πληρωτέο αντίτιμο, σύμφωνα με την εκδοχή Γ. Σε τι διαφέρουν οι τύποι για τις εκδοχές Α και Γ;

7. Γράψε τον τύπο για την εκδοχή Δ και Ε. Εξήγησε πώς τους κατάστρωσες και με ποιον τρόπο τους έλεγξες χρησιμοποιώντας το Function Probe.

8. Αν ήσουν μέλος του Συμβουλίου, ποια εκδοχή θα υποστήριζες και γιατί;

9. Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι καταστηματάρχες του εμπορικού κέντρου έκαναν μια σφυγμομέτρηση στους πελάτες τους και κατέληξαν στα εξής: εάν οι υποψήφιοι πελάτες υποχρεωθούν να πληρώσουν περισσότερα από 2,35 ευρώ, για να παρκάρουν το αυτοκίνητό

τους, είτε θα το αφήνουν αλλού και θα πηγαίνουν περπατώντας, είτε θα κάνουν τα ψώνια τους σε άλλο εμπορικό κέντρο. Με αυτά τα δεδομένα, ποια εκδοχή θα υποστήριζες; Γιατί;

10. Σαν πελάτης του εμπορικού κέντρου, ποια εκδοχή θα προτιμούσες να επιλέξει το συμβούλιο; Γιατί;

Μετασχηματισμοί

11. Τι είδους αλλαγή στο σύστημα χρέωσης για τη στάθμευση σχετίζεται με κατακόρυφη μετατόπιση μιας συνάρτησης;

12. Τι είδους αλλαγή σχετίζεται με κατακόρυφη αυξομείωση;

13. Τι είδους αλλαγή σχετίζεται με οριζόντια μετατόπιση;

14. Τι είδους αλλαγή σχετίζεται με οριζόντια αυξομείωση;

20. Μελέτη της συνάρτησης $y=a/x$ και των μετασχηματισμών της

Α' μέρος: Γραφική αναπαράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης $y=1/x$

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' του Function Probe κατασκεύασε μια στήλη με τιμές του 'x' από -4 έως 4 και με βήμα 0.2. Κατασκεύασε μια δεύτερη στήλη πληκτρολογώντας στη σειρά των μεταβλητών και εξισώσεων την $y=1/x$. Περίγραψε τις συσχετίσεις που βλέπεις μεταξύ των αριθμών αυτής της στήλης.

2. Επίλεξε την εντολή 'Σημεία σε Γράφημα' από το μενού 'Αποστολή' και άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα', για να δεις τη σχέση ανάμεσα στα x και y. (Έχε το παράθυρο ανοιχτό σε πλήρες μέγεθος για αυτή την άσκηση). Κάνε μια περιγραφή του διαγράμματος. Πώς φαίνονται στο διάγραμμα οι συσχετίσεις που βρήκες στον πίνακα;

Β' Μέρος: Μετατοπίσεις

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' μετάφερε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $y=1/x$ κατά 2 μονάδες κατακόρυφα. Για να το πετύχεις αυτό, κάνε κλικ στο εικονίδιο μετατόπισης και από το παράθυρο διαλόγου 'Μετατόπιση' επίλεξε το βέλος της κατακόρυφης μετατόπισης. Περίγραψε το νέο διάγραμμα: Τι έχει αλλάξει; Τι έμεινε ίδιο;

2. Να προβλέψεις τι επίδραση έχει η μετατόπιση, στον πίνακα με τις τιμές (που έχεις κατασκευάσει) και στη συνέχεια να στείλεις τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας', επιλέγοντας την εντολή 'Σημεία σε Πίνακα' από το μενού 'Αποστολή'. (Θα εμφανιστούν δύο μηνύματα τα οποία θα σε προειδοποιούν ότι οι αρχικές στήλες για τα x και y θα απενεργοποιηθούν. Κάθε φορά θα κάνεις κλικ στο κουμπί 'ΟΚ' για να συνεχίσεις.) Δύο νέες στήλες θα εμφανιστούν στην οθόνη και θα αντιπροσωπεύουν τα μετατοπισμένα σημεία. Επαληθεύουν τα νέα σημεία τις προβλέψεις σου; Τι επίδραση έχει μια κατακόρυφη μετατόπιση στον πίνακα;

3. Να προβλέψεις την επίδραση που έχει η μετατόπιση στον τύπο της $y=1/x$. Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, γράψε τον τύπο σου στο παράθυρο 'Γράφημα' ως συνάρτηση προς σχεδίαση. Διέρχεται από τα νέα σημεία; Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου στο παράθυρο 'Πίνακας', μπορείς να στείλεις τον τύπο σου από το παράθυρο 'Γράφημα', επιλέγοντας την εντολή 'Ορισμός τύπου' στο παράθυρο 'Γράφημα' και γράφοντας ' $z=g1(x)$ ' στο παράθυρο 'Πίνακας'. Τα σημεία από την $g1(x)$ ταυτίζονται με τα μετατοπισμένα σημεία; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης μετατόπισης στον τύπο;

4. Τι επίδραση θα είχε μια κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδων προς τα κάτω, στον πίνακα, στο διάγραμμα και στον τύπο;

5. Πραγματοποίησε τώρα αντίστοιχες οριζόντιες μετατοπίσεις στην αρχική συνάρτηση $y=1/x$: α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στις τιμές του πίνακα; β)

Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στον τύπο; γ) Ποια θα ήταν η επίδραση, αν η μετατόπιση γινόταν προς τα αριστερά;

Γ' Μέρος: Αυξομειώσεις

1. Καθάρισε τον πίνακα από όλες τις στήλες, εκτός της αρχικής x ($-4 < x < 4$) και της $y = 1/x$. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' από όλα τα διαγράμματα, εκτός από τα σημεία της $y = 1/x$. Άνοιξε τη γραφική παράσταση κατακόρυφα με συντελεστή 2, χρησιμοποιώντας το εργαλείο αυξομείωσης. (Κάνε κλικ στο εικονίδιο αυξομείωσης και επέλεξε την κατακόρυφη Ά αυξομείωση). Πάτησε το πλήκτρο 'Enter', για να τοποθετήσεις τη Γραμμή Άγκυρας στο $y = 0$. Σύρε το διάγραμμα κατακόρυφα, μέχρι να διαβάξεις στο συντελεστή για το άνοιγμα το '2'. Να συγκρίνεις τα παλιά με τα νέα σημεία. Τι έχει αλλάξει; Τι έχει παραμείνει το ίδιο;

2. α) Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον πίνακα τιμών: Πώς θα αλλάξει κάθε σημείο; Στη συνέχεια, στείλε τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας'.
β) Ήταν σωστή η πρόβλεψή σου;
γ) Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;

3. Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον τύπο της $y = 1/x$. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου χρησιμοποιώντας είτε το παράθυρο 'Γράφημα' είτε το παράθυρο 'Πίνακας'. Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στον τύπο της συνάρτησης;

4. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία για μια κατακόρυφη αυξομείωση με συντελεστή το $\frac{1}{2}$ (γνωστό και ως συρρίκνωση). Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το $\frac{1}{2}$ στις τιμές του πίνακα; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στον τύπο της συνάρτησης;

5. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία, αυτή τη φορά για μια οριζόντια αυξομείωση.
- α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
- β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στις τιμές του πίνακα;
- γ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
- δ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το $\frac{1}{2}$ στον τύπο της συνάρτησης;

Δ' Μέρος: Πρόβλεψη γραφημάτων από τους τύπους των συναρτήσεων

1. Να προβλέψεις τη μορφή της γραφικής παράστασης του $y = \frac{2}{3}x - 5$. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, δημιουργώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποιες είναι οι μεταφορές και/ή τα ανοίγματα που σχετίζονται με αυτή την συνάρτηση σε σχέση με την $y = \frac{1}{x}$; Να σχεδιάσεις την $y = \frac{2}{3}x - 5$. Ποια είναι η σχέση της με τη γραφική παράσταση της $y = \frac{2}{3}x - 5$;

2. Τι μπορείς να πεις για τη θέση του κατώτερου σημείου και την κλίση των κλάδων στην γραφική παράσταση της $y = \frac{A}{Bx - \Gamma}$;

3. Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε χαρτί και έλεγξε τα σχέδιά σου δημιουργώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα με το Function Probe. Να αναφέρεις τους μετασχηματισμούς (κατακόρυφη ή οριζόντια μετατόπιση, κατακόρυφο ή οριζόντιο άνοιγμα, συμμετρική) που μπορούν να πραγματοποιηθούν στην $y=1/x$, για να προκύψουν τα νέα διαγράμματα. Έλεγξέ το στο Function Probe.

$$y = 3/x - 2$$

$$y = 3/(x-2)$$

$$y = -5/x - 1$$

$$y = 5/x - 1$$

$$y = -4/3x + 2$$

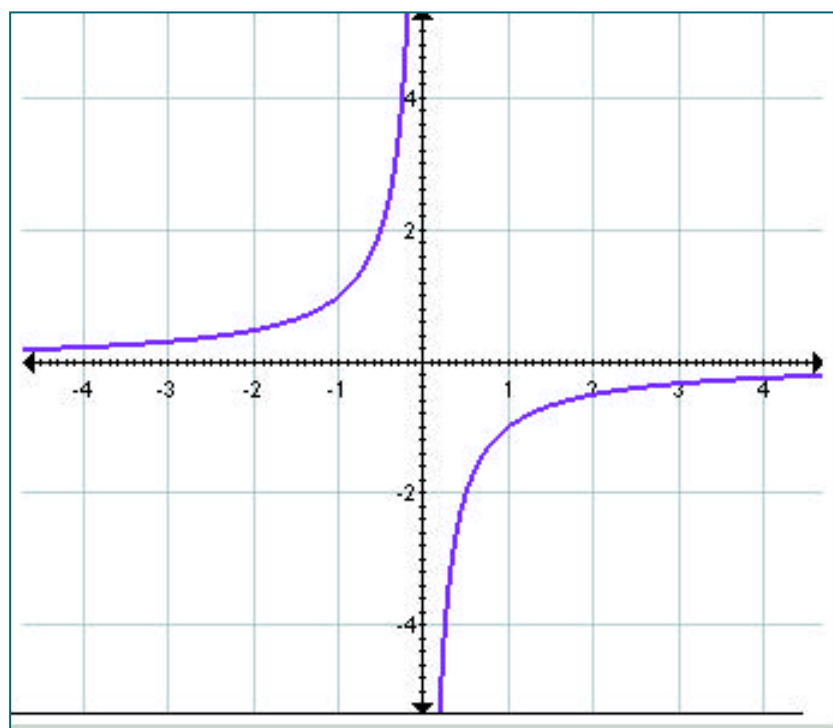
$$y = -4/(3x+2)$$

Ε' μέρος: Περιγραφή μετασχηματισμών από τις γραφικές αναπαραστάσεις τους.

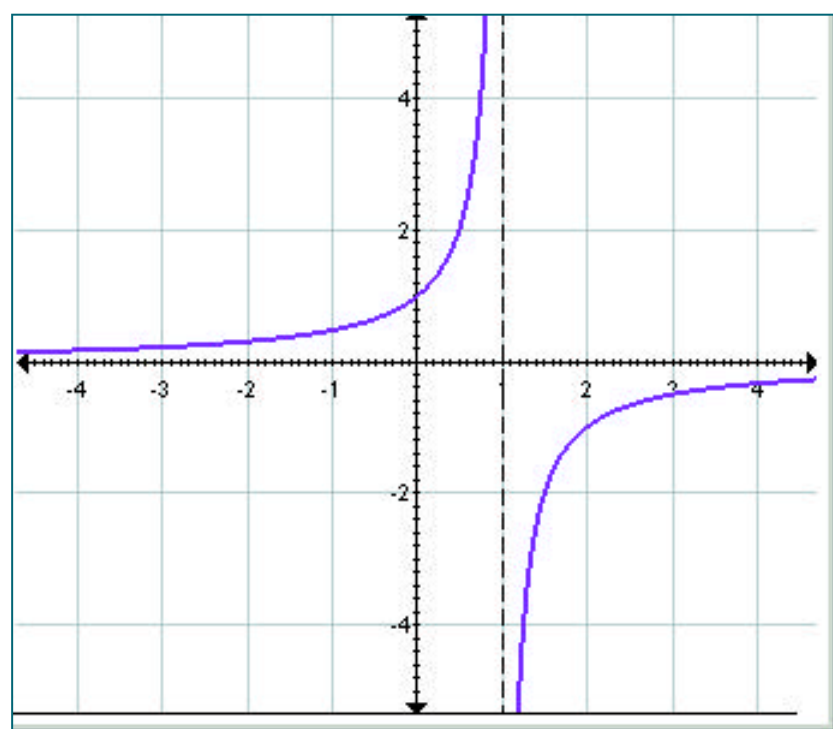
Για κάθε ένα από τα επόμενα διαγράμματα:

- i. Να αναφέρεις με ποιον τρόπο η γραφική παράσταση της $y=1/x$ μετασχηματίστηκε στο δοθέν διάγραμμα.

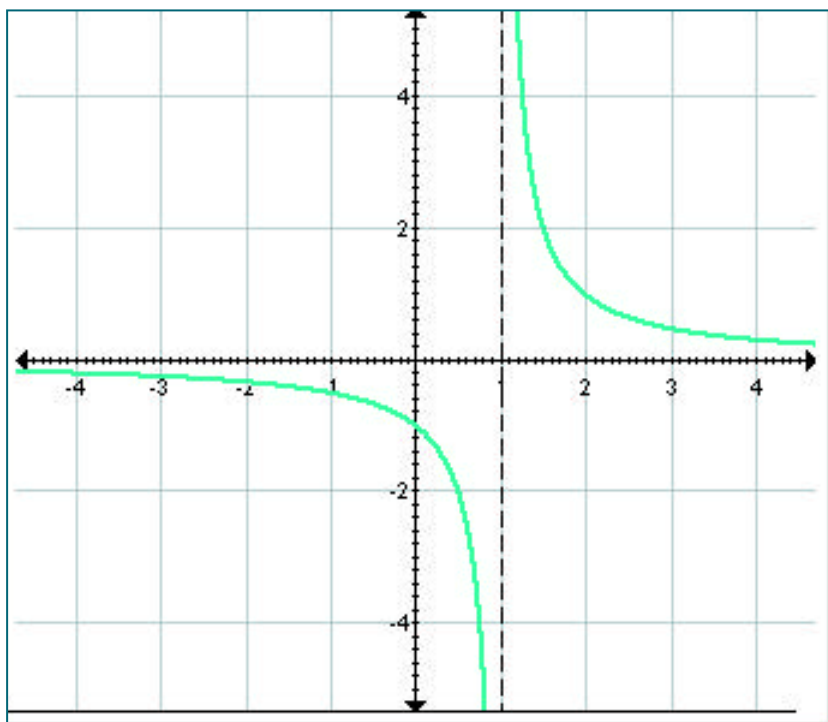
- ii. Να γράψεις τον τύπο της συνάρτησης, στην οποία αντιστοιχεί το διάγραμμα χρησιμοποιώντας το Function Probe, για να ελέγξεις την απάντησή σου.



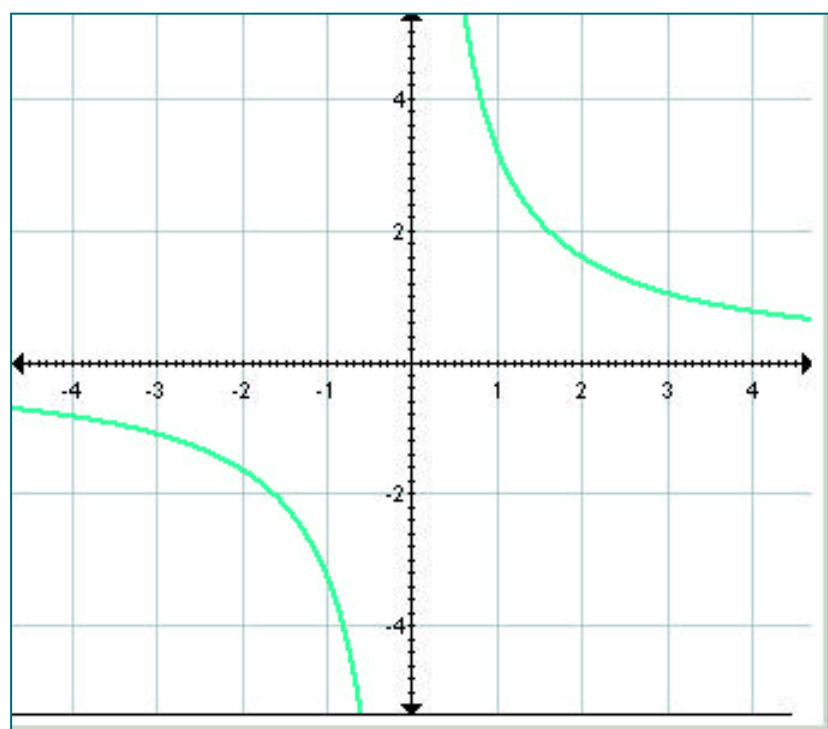
διάγραμμα 1



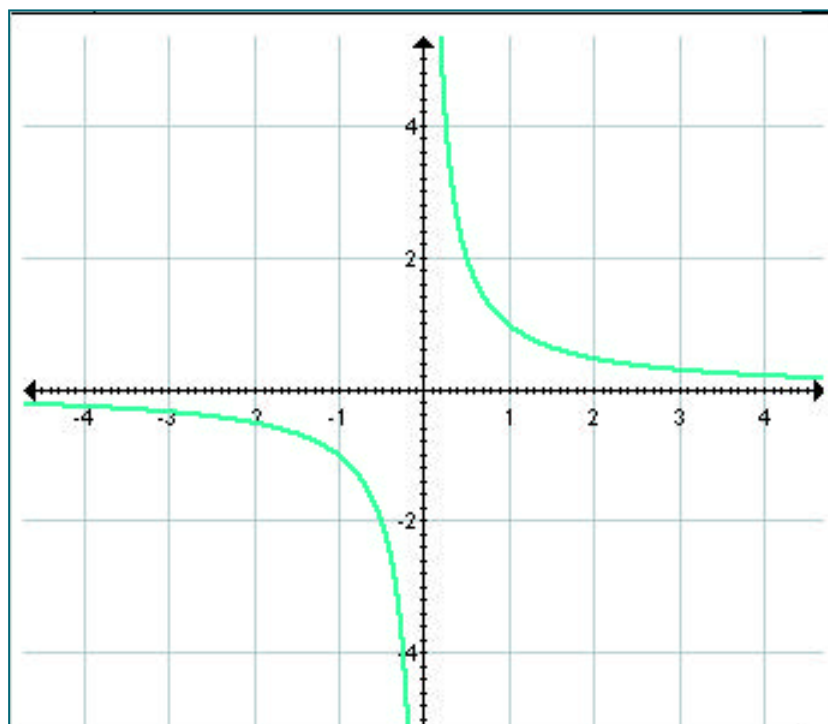
διάγραμμα 2



διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5

Πίνακας συναρτήσεων

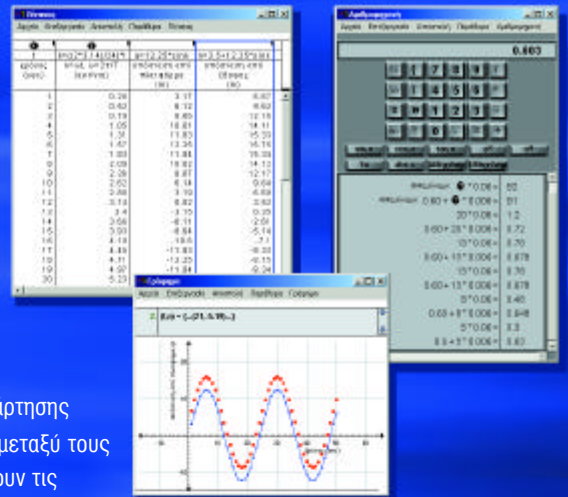
Όνομα Συνάρτησης	Συντομογραφία	Περιγραφή
τετραγωνική ρίζα	sqrt	Υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού. Η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές.
λογάριθμος	log	Το $\log_a x$ είναι το αντίστροφο του a^x .
εκθετική	exp	
ακέραιο μέρος διαίρεσης	idiv	Υπολογίζει το ακέραιο μέρος μιας διαίρεσης.
υπόλοιπο διαίρεσης	mod	Υπολογίζει το υπόλοιπο μιας διαίρεσης.
απόλυτη τιμή	abs	Υπολογίζει την απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν.
ημίτονο	sin	
συνημίτονο	cos	
εφαπτομένη	tan	$\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$
συνεφαπτομένη	cot	$\cot(x) = \cos(x)/\sin(x) = 1/\tan(x)$
τόξο ημιτόνου	arcsin	$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$
τόξο συνημιτόνου	arccos	$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$
τόξο εφαπτομένης	arctan	$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$
τόξο συνεφαπτομένης	arccot	$\arccot(x) = \cot^{-1}(x)$
υπερβολική εφαπτομένη	tanh	$\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$
υπερβολική συνεφαπτομένη	coth	$\coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x) = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$
ανάστροφο ημίτονο-τέμνουσα	sec	$\sec(x) = 1/\sin(x)$
ανάστροφο συνημίτονο-συντέμνουσα	csc	$\csc(x) = 1/\cos(x)$
τόξο τέμνουσας	asec	$\operatorname{asec}(x) = 1/\sin^{-1}(x)$
τόξο συντέμνουσας	acsc	$\operatorname{acsc}(x) = 1/\cos^{-1}(x)$
υπερβολική τέμνουσα	sech	$\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x) = 2/(e^x + e^{-x})$
υπερβολική συντέμνουσα	csch	$\operatorname{csch}(x) = 1/\sinh(x) = 2/(e^x - e^{-x})$
ακέραιο μέρος αριθμού	int	Δίνει το ακέραιο μέρος ενός αριθμού. Για παράδειγμα, $\operatorname{int}(1.1) = 1$ και $\operatorname{int}(-1.1) = -1$
στρογγυλοποίηση σε ακέραιο	round	Στρογγυλοποιεί τον αριθμό στον πλησιέστερο ακέραιο. Για παράδειγμα, $\operatorname{round}(1.5) = 2$ και $\operatorname{round}(1.4) = 1$
floor	floor	Στρογγυλοποιεί τον αριθμό προς το μικρότερο ακέραιο. Για παράδειγμα, $\operatorname{floor}(1.1) = 1$ και $\operatorname{floor}(-1.1) = -2$.
ceiling	ceil	Στρογγυλοποιεί τον αριθμό προς το μεγαλύτερο ακέραιο. Για παράδειγμα, $\operatorname{ceil}(1.1) = 2$ και $\operatorname{ceil}(-1.1) = -1$.
συνάρτηση μοναδιαίου βήματος	step	Το βήμα του x για $x < 0$ δίνει 0 και το βήμα του x για $x > 0$ δίνει 1.
πρόσημο αριθμού	sgn	Δίνει το '+' αν ο αριθμός είναι θετικός και το '-' αν ο αριθμός είναι αρνητικός.

Το λογισμικό Function Probe στη διδασκαλία των συναρτήσεων

Οι διδακτικές πρακτικές που υπαγορεύονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα στρέφονται προς τη μετατροπή της παραδοσιακής σχολικής τάξης σε ένα εργαστήριο, όπου δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να συμμετέχει ενεργά στην απόκτηση της γνώσης, επιτρέποντάς του να πειραματίζεται, να διερευνά μαθηματικές έννοιες και προβλήματα συνεργαζόμενος με τους συμμαθητές του και έχοντας τον καθηγητή συνεργάτη και καθοδηγητή του.

Στο πλαίσιο αυτό, το Function Probe αποτελεί ένα εργαλείο έκφρασης, πειραματισμού και διερεύνησης στα χέρια των μαθητών για τη μελέτη των συναρτήσεων, παρέχοντάς τους τη δυνατότητα:

- > να χρησιμοποιήσουν και να συνδέσουν όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (αλγεβρικό τύπο, γραφική παράσταση, πίνακα τιμών) και να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ τους
- > να μετασχηματίσουν τον τύπο και τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να δουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών αυτών στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης
- > να πειραματιστούν αλλάζοντας τα δεδομένα σε μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης και να παρατηρήσουν τις επιπτώσεις των αλλαγών αυτών στην άλλη, π.χ. να αλλάξουν τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα τιμών μιας συνάρτησης και να παρατηρήσουν τις μεταβολές της γραφικής της παράστασης
- > να δημιουργήσουν τις δικές τους συναρτήσεις είτε με τη μορφή ενός κουμπιού στο παράθυρο 'Αριθμομηχανή' είτε με τη μορφή δύο εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο 'Πίνακας'.



Το λογισμικό Function Probe εξελληνίστηκε και προσαρμόστηκε στο πλαίσιο του έργου ΚΙΡΚΗ, αντικείμενο του οποίου είναι ο εξελληνισμός και η προσαρμογή στις ανάγκες του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος ώριμων και καταξιωμένων προϊόντων εκπαιδευτικού λογισμικού της διεθνούς αγοράς καθώς και η αναπαραγωγή και διανομή των προϊόντων αυτών σε 350 σχολικά εργαστήρια.



Ελληνικά
Σχολεία
στην
Κοινωνία
της
Πληροφορίας

Το έργο για το διάστημα 2000-2003 χρηματοδοτείται από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Κοινωνίας της Πληροφορίας (ΚτΠ), Γ'ΚΠΣ, Μέτρο 1.2. (Φορέας Υλοποίησης & επιβλέψης υποέργων: Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ε.Α. ΙΤΥ). Φορέας Χρηματοδότησης: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Επιβλέψη: Διεύθυνση Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και Γραφείο Κοινωνίας της Πληροφορίας του Υπ.Ε.Π.Θ.. Πιστοποίηση: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο).

Η ΚΙΡΚΗ αποτελεί συνέχεια αντίστοιχου έργου της Ενέργειας Οδύσσεια - Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία

της Πληροφορίας, το εθνικό πρόγραμμα παιδαγωγικής ένταξης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, το οποίο χρηματοδοτήθηκε για το διάστημα 1996-2001 από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης - ΕΠΕΑΕΚ, Β' ΚΠΣ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Το πρόγραμμα περιλάμβανε:

- ανάπτυξη κατάλληλης υποδομής σε 385 σχολεία εφαρμογής (εγκατάσταση σχολικών εργαστηρίων στα οποία υποστηρίζεται η διδασκαλία διαφόρων μαθημάτων, δικτύωση στο Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο, τοπική και εξ αποστάσεως τεχνική υποστήριξη),
- μεταπτυχιακή εκπαίδευση 95 επιμορφωτών (καθηγητές όλων των ειδικοτήτων) σε εξειδικευμένα ετήσια πανεπιστημιακά προγράμματα, οι οποίοι ανέλαβαν τη
- διαρκή ενδοσχολική επιμόρφωση των 5.500 εκπαιδευτικών που υπηρετούσαν στα σχολεία αυτά -και όχι μόνο- ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους
- διερευνητικό, διαθεματικό εκπαιδευτικό λογισμικό (αναπτύχθηκαν ή προσαρμόστηκαν συνολικά 72 πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού (<http://edsoft.cti.gr/>), διαφόρων μεγεθών και επιπέδου ωριμότητας, από κοινοπραξίες φορέων που συνδυάζουν τεχνική, παιδαγωγική και παραγωγική τεχνολογία (Πανεπιστήμια, Ερευνητικά Ινστιτούτα, Εταιρίες Πληροφορικής, Εκδότες).

Στην υλοποίηση του προγράμματος αυτού συμμετείχαν πάνω από 1000 επιστήμονες, παιδαγωγοί, μηχανικοί και διοικητικοί υπάλληλοι, οι οποίοι εργάστηκαν σε 57 πανεπιστημιακά τμήματα, 53 εταιρίες και 18 μουσεία, ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα.

Στο πλαίσιο της ΚΙΡΚΗΣ εξελληνίστηκαν και προσαρμόστηκαν συνολικά 22 προϊόντα εκπαιδευτικού λογισμικού τα οποία επιλέχθηκαν μέσα από δεκάδες καταξιωμένα προϊόντα της διεθνούς αγοράς (6 προϊόντα χρηματοδοτήθηκαν στο πλαίσιο του ΕΠΕΑΕΚ, Β'ΚΠΣ και άλλα 16 στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος Κοινωνίας της Πληροφορίας, Γ'ΚΠΣ). Τα πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού αποστέλλονται στα σχολεία μετά από αξιολόγηση του Γραφείου Πιστοποίησης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου ως προς την παιδαγωγική τους αρτιότητα και του Ε.Α. ΙΤΥ ως προς την τεχνολογική τους αρτιότητα.

Η δημόσια χρηματοδότηση της προσαρμογής των υποέργων της ΚΙΡΚΗΣ εξασφαλίζει ότι η τιμή πώλησης του παρόντος λογισμικού στην Ελληνική αγορά δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη στη διεθνή αγορά.

Κέντρο Πληροφόρησης Οδύσσειας: Infodesk.Odyseia@cti.gr
<http://Odyseia.cti.gr/kirki/>



ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΣΤΕΦΑΝΙ
ΕΠΙΧΡΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑ 75% ΑΠΟ
ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΤΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ



Κίρκη

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΙΕΘΝΩΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ
ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

