Function Probe

Βιβλίο Καθηγητή

EXODUS
e.SOLUTIONS

QUEST MULTIMEDIA
Austin, TX USA

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΑ ΙΤΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΑΘΗΝΑ 2002

Function Probe

Βιβλίο Καθηγητή

EXODUS e.SOLUTIONS

QUEST MULTIMEDIA Austin, TX USA

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΑ ΙΤΥ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Πνευματικά Δικαιώματα

Φορείς Υλοποίησης του Έργου

Πρωτότυπη έκδοση
Cornell Research Foundation
Quest Math & Science Multimedia, Inc
http://www.grandecom.net/~questmsm/Home.htm

Προσαρμογή λογισμικού στην ελληνική γλώσσα
Exodus Α.Ε.
http://www.exodus.gr

Υπεύθυνοι έργου αναδόχου
Αθηνά Ζαμπάρα, Άννα Κοτζάμπαση

Παιδαγωγικός υπεύθυνος
Λητώ Λάσκου

Συγγραφή και προσαρμογή συνοδευτικού υλικού
Νικολέτα Σιδηρά-Ξένου
Ξένια Σιούτη

Μετάφραση
Ελένη Αθανασάτου

Φιλολογική επιμέλεια
Άννυ Θεοδούλου

Καλλιτεχνική επιμέλεια εντύπων
Μαρία Χατζημιχαηλίδου

Σχεδιασμός ενδεικτικής περιήγησης
Μάρη Ζονουδάκη

Γραφίστες
Ιωάννης Στύλος, Χριστίνα Κουντούρη

Προγραμματισμός λογισμικού
Διαμαντής Αστέρης, Περικλής Κουτσογιάννης

Προγραμματισμός ενδεικτικής περιήγησης
Παναγιώτης Χριστοδούλου

Υπεύθυνος ελέγχου ποιότητας
Γεώργιος Κωνσταντινίδης

Φορείς του έργου Κίρκη
Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ε.Α. ΙΤΥ), http://www.cti.gr
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (ΠΙ), http://www.pi-schools.gr

ΥΠΕΠΘ http://www.ypepth.gr
(Διευθύνσεις Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
και Κοινοτικού Πλαισίου Στήριξης)

Σύνδεσμοι παρακολούθησης του έργου
Γιώργος Ανδρουλάκης, Ε.Α. ΙΤΥ
Σταυρούλα Σκούρα-Θήριου, ΠΙ
Βίβιαν Αντωνακοπούλου, Ε.Α. ΙΤΥ

Function Probe

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το "**Βιβλίο του Καθηγητή: Εγχειρίδιο Εκπαιδευτικών Δραστηριοτήτων**" αποτελεί, μαζί με το βιβλίο του μαθητή, το απαραίτητο συνοδευτικό υλικό για την αξιοποίηση του εξελληνισμένου λογισμικού Function Probe στην εκπαιδευτική διαδικασία. Απευθύνεται στον καθηγητή των Μαθηματικών με στόχο να τον βοηθήσει στο διδακτικό του έργο παρέχοντάς του γενικές κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με την εφαρμογή των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στην τάξη του.

Στο εγχειρίδιο αυτό περιλαμβάνονται:

- Ένα εισαγωγικό σημείωμα των δημιουργών του λογισμικού
- Μια εισαγωγή των συντακτών του εγχειριδίου
- Διδακτικές Οδηγίες για κάθε προτεινόμενη δραστηριότητα

Θα ήταν σκόπιμο ο διδάσκων να μελετήσει με προσοχή την εισαγωγή που ακολουθεί στο σύνολό της πριν προχωρήσει στις διδακτικές οδηγίες, έτσι ώστε να κατανοήσει καλύτερα το παιδαγωγικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσονται οι προτεινόμενες δραστηριότητες.

Εισαγωγικό σημείωμα των δημιουργών του λογισμικού

Το λογισμικό και το συνοδευτικό του υλικό έχουν σχεδιαστεί, για να διδάξουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν και να μαθαίνουν να εργάζονται με συναρτήσεις σε ένα περιβάλλον όμοιο με τον πραγματικό κόσμο. Δεν πιστεύουμε ότι είναι καλύτερο να διδάσκει κανείς πρώτα τις τεχνικές και μετά τις εφαρμογές τους. Πολλά από τα προβλήματα χρησιμεύουν στο να γίνει η εισαγωγή των σχετικών με τις συναρτήσεις εννοιών.

Αν αυτό σας φαίνεται απίθανο, παρακαλούμε δοκιμάστε το. Πάρτε ένα πρόβλημα σαν το πρόβλημα του πέτρινου μονοπατιού και ζητήστε από τους μαθητές σας να το προσπαθήσουν, χωρίς να τους έχετε κάνει καμιά εισαγωγή για τις οικογένειες των συναρτήσεων. Αυτό που θα δείτε είναι ότι συχνά θα παράγουν αριθμητικά δεδομένα σε μορφή πινάκων. Μπορεί να γίνουν πολύ οξυδερκείς στη χρήση πινάκων. Στέλνοντας τα σύνολα των σημείων τους στο Γράφημα, είναι πιθανό να τους δείτε να αναπτύσσουν μια πολλή διαφορετική αίσθηση για τις συναρτήσεις από αυτή που εσείς έχετε διδαχτεί. Οι περισσότεροι καθηγητές χρησιμοποιούν αλγεβρικές μεθόδους, δουλεύοντας με γενικούς τύπους και βάζοντας σε δεύτερη μοίρα τις γραφικές παραστάσεις. Σπάνια δε χρησιμοποιούν τους πίνακες ή την αριθμομηχανή, για να διερευνήσουν τις συναρτήσεις. Αν είστε πρόθυμοι να επαναπροσδιορίσετε τις δικές σας γνώσεις γύρω από τα Μαθηματικά, θα ανακαλύψετε ότι το να παρακολουθεί κανείς τους μαθητές του να προσεγγίζουν αυτά τα προβλήματα από διαφορετική σκοπιά έχει μεγάλο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, μπορεί να κατασκευάσουν συναρτήσεις γεμίζοντας δύο στήλες, έτσι ώστε να συμμεταβάλλονται, χωρίς να χρησιμοποιήσουν τύπο. Η ιδέα αυτή είναι σίγουρα μέσα στα πλαίσια της έννοιας των συναρτήσεων, παρόλο που δεν είναι αυτή που έχουμε όλοι διδαχτεί.

Ανακαλύψαμε ότι πρέπει να πάψουμε να βάζουμε ετικέτες στις μεθόδους των μαθητών - σωστές ή λάθος - και αντ' αυτού, να ρωτάμε αυτή η προσέγγιση τι επιτρέπει στους μαθητές να πετύχουν και τι τους εμποδίζει να πετύχουν. Έτσι, θα μάθετε να θέτετε ερωτήσεις που θα τους εμπνέουν και θα τους ενθαρρύνουν να δουλεύουν στην κατεύθυνση που έχουν ξεκινήσει. Το να μπορεί κανείς να θέτει καλές ερωτήσεις είναι στο επίκεντρο της καλής διδασκαλίας.

Προτείνουμε να εφαρμόζετε αρκετά, αλλά όχι αποκλειστικά, την ομαδική δουλειά. Δοκιμάστε τη δουλειά σε ζευγάρια ή ομάδες των τριών ατόμων. Έχουμε παρατηρήσει ότι ομάδες των τεσσάρων ή περισσότερων δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν σωστά τον υπολογιστή. Συχνά, αυτός που χρησιμοποιεί το πληκτρολόγιο αγνοεί τους υπόλοιπους της ομάδας και αυτά που όλοι μαζί σκέφτονται, και κάνει αυτό που εκείνος πιστεύει ότι είναι το σωστό. Η Paula Fistick, μια καθηγήτρια από το Columbus στο Ohio, βρήκε έναν τρόπο, για να μοιράζονται οι ομάδες τα αποτελέσματά τους. Τους δίνει μια κόλλα χαρτί και ένα μαρκαδόρο και η κάθε ομάδα πρέπει να γράψει μια πλήρη σύνοψη της μεθόδου που χρησιμοποίησε και να την παρουσιάσει στην τάξη. Αυτός είναι ένας δυναμικός τρόπος, για να ενθαρρύνεται η επίλυση με πολλές διαφορετικές μεθόδους.

Μη φοβηθείτε να δουλέψετε και με ολόκληρη την τάξη. Πρέπει όμως να ελέγχετε τον εαυτό σας συχνά. Μήπως, αργά αλλά σταθερά, αυξάνετε το ποσοστό της δουλειάς που γίνεται από ολόκληρη την τάξη; Τότε, κάντε πίσω και αφήστε ξανά τη δουλειά να γίνεται σε ομάδες. Ως καθηγητές, πάντα θεωρούμε ότι έχουμε καλύτερη εποπτεία της τάξης, όταν δίνουμε οδηγίες που αφορούν όλους τους μαθητές. Στην πραγματικότητα, πιστεύω ότι έτσι απλώς συμβαίνουν λιγότερα πράγματα μέσα στην τάξη, γιατί οι μαθητές γίνονται παθητικοί.

Παρακαλώ, αξιοποιήστε την ευκαιρία που σας δίνεται να δείτε μαθητές που μπορούν να σταθούν στα πόδια τους, να εκφράσουν τις ιδέες τους. Επιτρέψτε σε μαθητές που έχουν νιώσει απογοήτευση εξαιτίας της ανάγκης τους να βρίσκουν νόημα στο αντικείμενό με το οποίο ασχολούνται, να νιώσουν τώρα ικανοποίηση.

Περισσότερο από όλα, ευχόμαστε να 'διασκεδάσετε' με αυτό το υλικό, όσο κι εμείς. Είμαστε σίγουροι ότι θα το τροποποιήσετε, θα το βελτιώσετε, θα αφήσετε απ' έξω κάποια τμήματά του και θα προσθέσετε κάποια άλλα. Ευχόμαστε να κάνουμε την εκμάθηση των Μαθηματικών πιο αποτελεσματική και ικανοποιητική.

Jere Confrey και Alan Maloney
email: info@questmath.com
Austin, Texas
1999

Εισαγωγή

1. Ο ρόλος του Function Probe στη διδασκαλία των συναρτήσεων

Οι διδακτικές πρακτικές που υπαγορεύονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα στρέφονται προς τη μετατροπή της παραδοσιακής σχολικής τάξης σε ένα εργαστήρι, όπου δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να συμμετέχει ενεργά στην απόκτηση της γνώσης, επιτρέποντάς του να πειραματίζεται, να διερευνά μαθηματικές έννοιες και προβλήματα συνεργαζόμενος με τους συμμαθητές του και έχοντας τον καθηγητή συνεργάτη και καθοδηγητή του.

Στο πλαίσιο αυτό, το Function Probe αποτελεί ένα εργαλείο έκφρασης, πειραματισμού και διερεύνησης στα χέρια των μαθητών για τη μελέτη των συναρτήσεων, παρέχοντάς τους τη δυνατότητα:

- να χρησιμοποιήσουν και να συνδέσουν όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (αλγεβρικό τύπο, γραφική παράσταση, πίνακα τιμών) και να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ τους
- να μετασχηματίσουν τον τύπο και τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να δουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών αυτών στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης
- να πειραματιστούν αλλάζοντας τα δεδομένα σε μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης και να παρατηρήσουν τις επιπτώσεις των αλλαγών αυτών στην άλλη, π.χ. να αλλάξουν τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα τιμών μιας συνάρτησης και να παρατηρήσουν τις μεταβολές της γραφικής της παράστασης
- να δημιουργήσουν τις δικές τους συναρτήσεις είτε με τη μορφή ενός κουμπιού στο παράθυρο ‘Αριθμομηχανή’ είτε με τη μορφή δύο εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο ‘Πίνακας’.

Με βάση τις προαναφερθείσες δυνατότητες του λογισμικού αναπτύχθηκε εκπαιδευτικό υλικό (εκπαιδευτικές δραστηριότητες), του οποίου οι στόχοι και τα χαρακτηριστικά περιγράφονται παρακάτω.

2. Γενικοί διδακτικοί και παιδαγωγικοί στόχοι των προτεινόμενων δραστηριοτήτων

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες στοχεύουν στο να ενθαρρύνουν τους μαθητές:

- να εμπλακούν σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, των οποίων η επίλυση απαιτεί την κατασκευή συναρτησιακών σχέσεων
- να αναπτύξουν δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων
- να συνδέσουν ένα φυσικό φαινόμενο με τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται σε αυτό
- να συνεργαστούν μεταξύ τους σε ομάδες και με το δάσκαλό τους συζητώντας τις ιδέες τους
- να προάγουν τη δημιουργικότητά τους
- να κάνουν εικασίες, να τις υλοποιούν και να τις ελέγχουν με στόχο να εξαγάγουν τα δικά τους συμπεράσματα

> να μαθαίνουν από τα λάθη τους
> να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει από τη θεωρητική διδασκαλία και να εκτιμήσουν έτσι την πρακτική τους αξία
> να εκφράζουν τις διαισθητικές αντιλήψεις τους και να πειραματίζονται με αυτές
> να δραστηριοποιούνται και να συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες προσφέρουν, επίσης, στον καθηγητή εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας σε ένα μαθησιακό περιβάλλον διαφορετικό από αυτό της παραδοσιακής τάξης. Στο περιβάλλον αυτό του δίνεται η δυνατότητα να ενθαρρύνει τους μαθητές να πειραματιστούν και να διερευνήσουν καταστάσεις που περικλείουν τη χρήση μαθηματικών εννοιών.

3. Το προτεινόμενο μαθησιακό περιβάλλον

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν σχεδιαστεί να διεξαχθούν στο εργαστήριο υπολογιστών, όπου οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες των 2-3 ατόμων, δουλεύουν μπροστά στον υπολογιστή, αναλαμβάνοντας διαφορετικούς ρόλους ο καθένας εκ περιτροπής (πληκτρολόγηση-διαχείριση ποντικιού, τήρηση σημειώσεων στο τετράδιο και το φύλλο εργασίας). Κάθε ομάδα συμπληρώνει τα φύλλα εργασίας και καταγράφει τη μέθοδο επίλυσης που ακολούθησε και παρουσιάζει την εργασία της στην τάξη για συζήτηση. Η παρουσίαση των διαφόρων μεθόδων επίλυσης βοηθάει από τη μια πλευρά τους μαθητές να εκφράσουν γραπτά και προφορικά τις ιδέες τους και από την άλλη συμβάλλει, μέσω της συζήτησης που αναπτύσσεται στην τάξη, στη διεύρυνση των διαφορετικών μεθόδων λύσης αντιμετώπισης ενός προβλήματος.

Το προτεινόμενο για τους μαθητές συνοδευτικό υλικό αποτελείται από τα εξής:
> Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους)
> Σχολικό βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες)
> Φύλλα εργασίας (**Βιβλίο μαθητή**), τα οποία δίνονται από τον καθηγητή, και έχουν ως στόχο να παροτρύνουν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων της δραστηριότητας
> Οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού (**Εγχειρίδιο χρήστη**)

Ο καθηγητής απευθύνεται άλλοτε σε όλες τις ομάδες και άλλοτε σε κάθε ομάδα ξεχωριστά, εξειδικεύοντας τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της διερεύνησης. Πιο συγκεκριμένα, ο ρόλος του στη μαθησιακή διαδικασία είναι κυρίως να:
> Ενθαρρύνει τους μαθητές να εφευρίσκουν και να δοκιμάζουν διάφορες στρατηγικές επίλυσης
> Θέτει κατάλληλες ερωτήσεις, που τους προτρέπουν να συνεχίσουν την προσπάθεια που ξεκίνησαν
> Χρησιμοποιεί τα λάθη των μαθητών για αναστοχασμό και ανατροφοδότηση
> Συζητά με τους μαθητές και προσπαθεί, παίζοντας το ρόλο του συνερευνητή, να εκμαιεύσει νέες ιδέες
> Προτρέπει τους μαθητές να εκφράσουν τη διαδικασία λύσης, που ακολούθησαν, προφορικώς και γραπτώς

4. Τα χαρακτηριστικά των προτεινόμενων δραστηριοτήτων

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες αφορούν στη διδασκαλία και μελέτη των συναρτήσεων καθώς και των μετασχηματισμών τους με βάση τη διδακτέα ύλη του Γυμνασίου και Λυκείου. Οι συναρτήσεις που μελετώνται είναι γραμμικές, δευτέρου βαθμού, εκθετικές, λογαριθμικές και τριγωνομετρικές. Οι δραστηριότητες αποτελούνται από:

- προβλήματα διερεύνησης της καθημερινής ζωής τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια συναρτήσεων που καλούνται οι μαθητές να κατασκευάσουν
- προβλήματα εφαρμογής και διερεύνησης μιας συγκεκριμένης συνάρτησης, η οποία δίνεται στην εκφώνηση του προβλήματος
- ασκήσεις που προτείνουν στους μαθητές μέσα από συγκεκριμένες ερωτήσεις, να διερευνήσουν τον τύπο και τις παραμέτρους μιας συνάρτησης εκτελώντας μετασχηματισμούς (μετατοπίσεις, ανοίγματα, συμμετρίες κτλ.) στη γραφική της παράσταση

Από τις 20 δραστηριότητες που προτείνονται, οι δεκατρείς είναι προσαρμογές των προτεινόμενων από τους δημιουργούς του λογισμικού και οι υπόλοιπες επτά είναι πρωτότυπες. Η προσαρμογή των ήδη υπαρχουσών δραστηριοτήτων έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν στην τάξη με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα του Γυμνασίου και του Λυκείου και να ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και στις εμπειρίες των Ελλήνων μαθητών.

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες επιδέχονται τροποποιήσεις, αλλαγές και επεκτάσεις και μπορούν να αποτελέσουν "γεννήτριες" πολλών άλλων δραστηριοτήτων ανάλογα με τους διδακτικούς και γνωστικούς στόχους του εκάστοτε διδάσκοντα.

5. Οδηγίες εφαρμογής των προτεινόμενων δραστηριοτήτων

Σε κάθε προτεινόμενη δραστηριότητα υπάρχουν οι εξής ενότητες:

1. **Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας**, όπου γίνεται συνοπτική αναφορά του περιεχομένου της και του γενικού της στόχου.
2. **Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα**, όπου προτείνεται η τάξη και η διδακτική ενότητα στην οποία μπορεί να ενταχθεί η δραστηριότητα με βάση το υπάρχον Αναλυτικό Πρόγραμμα, καθώς και **ο εκτιμώμενος χρόνος** υλοποίησής της. Η ένταξη αυτή δεν είναι δεσμευτική, αφήνοντας στην κρίση και τις ανάγκες του διδάσκοντα τον ακριβή προσδιορισμό του χρονικού σημείου υλοποίησης της δραστηριότητας.
3. **Διδακτικοί στόχοι**, όπου αναφέρονται τα επιδιωκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα της εφαρμογής της δραστηριότητας. Οι αναγραφόμενοι διδακτικοί στόχοι έχουν καθορίσει τον τρόπο που καταγράψαμε τις **παρατηρήσεις** που ακολουθούν. Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε αλλαγή της ένταξης που προαναφέρθηκε, συνοδεύεται και από την αντίστοιχη αλλαγή των διδακτικών στόχων. Για παράδειγμα, στη δραστηριότητα “Ο παραγωγός μήλων" προτείνεται η ένταξή της σαν εισαγωγή στη μέγιστη τιμή του τριωνύμου και ανάλογα έχουν προσδιοριστεί οι διδακτικοί της στόχοι. Θα μπορούσε όμως να δοθεί και σαν εφαρμογή της μέγιστης τιμής του

τριωνύμου, οπότε ανάλογα θα αναπροσαρμοστούν οι διδακτικοί στόχοι και τα αντίστοιχα ερωτήματα στο φύλλο εργασίας των μαθητών.

4. **Παρατηρήσεις**, όπου δίνονται διευκρινήσεις για την εφαρμογή της δραστηριότητας με βάση τα ερωτήματα που υπάρχουν στο βιβλίο του μαθητή στη δραστηριότητα αυτή. Για το λόγο αυτό δεν είναι δυνατή η μελέτη των παρατηρήσεων χωρίς να υπάρχουν τα αντίστοιχα ερωτήματα από το εγχειρίδιο του μαθητή. Στο τέλος των παρατηρήσεων κάθε δραστηριότητας υπάρχουν εικόνες, που δείχνουν ενδεικτικά στιγμιότυπα της οθόνης του λογισμικού μετά την υλοποίηση όλων των ερωτημάτων της.

Χρήσιμη Συμβουλή:
Πριν από την εφαρμογή μιας δραστηριότητας μέσα στην τάξη, θα πρέπει ο διδάσκων να την υλοποιήσει με το λογισμικό βήμα προς βήμα, βάζοντας τον εαυτό του στο ρόλο του μαθητή που έχει μπροστά του το αντίστοιχο φύλλο εργασίας. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να αξιολογήσει τις παρεχόμενες διδακτικές οδηγίες, να τις τροποποιήσει και να τις εξειδικεύσει ανάλογα με το επίπεδο και τις δυνατότητες των μαθητών της τάξης του.

Τέλος, εκφράζουμε την ευχή το εκπαιδευτικό αυτό υλικό να βοηθήσει αποτελεσματικά τον καθηγητή των Μαθηματικών στη διδακτική του προσέγγιση στο θέμα της μελέτης των συναρτήσεων και να αποτελέσει το εφαλτήριο για την ανάπτυξη νέων δραστηριοτήτων εκ μέρους του.

Συμβάσεις του λογισμικού Function Probe

Στο Function Probe υπάρχουν οι εξής συμβάσεις:

- Χρησιμοποιούνται οι διεθνείς ονομασίες των συναρτήσεων (για παράδειγμα cos για τη συνάρτηση του συνημιτόνου και sin για το ημίτονο). Για τη διευκόλυνση του χρήστη, σε όλα τα εγχειρίδια υπάρχει ένας πίνακας με τις αντιστοιχίες των συναρτήσεων, καθώς και μια σύντομη περιγραφή τους.
- Για την κατασκευή των δυνάμεων, θα πρέπει να χρησιμοποιείται το πλήκτρο ‘^’ (‘Shift+6’). Για περισσότερες πληροφορίες βλ. την ενότητα στη σελ. 40 του Εγχειριδίου Χρήστη.
- Σε όλα τα παράθυρα, για τη γραφή των δεκαδικών αριθμών χρησιμοποιείται η τελεία αντί της υποδιαστολής. Θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή αν από τον ‘Πίνακα Ελέγχου’ των Windows έχουν επιλεγεί οι τοπικές ρυθμίσεις για την Ελλάδα. Σε αυτήν την περίπτωση, το πλήκτρο ‘.’ του αριθμητικού πληκτρολογίου εισαγάγει την υποδιαστολή και όχι την τελεία.
- Οι μεγάλοι αριθμοί μετατρέπονται αυτόματα σε τυποποιημένη μορφή.
- Για την εισαγωγή των μεταβλητών (και των συναρτήσεων), θα πρέπει να είναι επιλεγμένο το αγγλικό πληκτρολόγιο.

Εκπαιδευτικές Δραστηριότητες

Ομάδα Α: Γραμμικές Συναρτήσεις

1. Το πρόβλημα με τις πίτσες: Εισαγωγή στο λογισμικό του Function Probe

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Αυτή η δραστηριότητα σχεδιάστηκε για να εισαγάγει τους μαθητές βήμα προς βήμα στη χρήση του Function Probe. Πρέπει επομένως να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση του λογισμικού και στο πώς αυτό διευκολύνει στην οργάνωση, στη διερεύνηση και στη λύση του προβλήματος.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Οι μαθηματικές έννοιες, που περιέχονται στο πρόβλημα αυτό (μήκος κύκλου, εμβαδό κυκλικού δίσκου), είναι ήδη γνωστές στους μαθητές από το δημοτικό. Μπορεί, επομένως, η δραστηριότητα αυτή να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Β΄ Γυμνασίου, όταν οι μαθητές επαναλαμβάνουν τις έννοιες αυτές.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Παρατηρήσεις

1. Προτείνεται να δοθεί το πρόβλημα στους μαθητές και αφού συζητηθεί στην τάξη το τι θα έκαναν για να το λύσουν, στη συνέχεια να ακολουθήσουν τα βήματα που περιγράφονται στο βιβλίο τους σχετικά με την οργάνωση και διερεύνηση του προβλήματος, απαντώντας συγχρόνως στις ερωτήσεις που υπάρχουν στο φύλλο εργασίας.
2. Θα πρέπει να δίνεται έμφαση στις δυνατότητες που προσφέρει το κάθε παράθυρο του λογισμικού. Αυτό μπορεί να γίνει με συζήτηση στο τέλος του κάθε μέρους της δραστηριότητας.
3. Η δημιουργία του κουμπιού στην Αριθμομηχανή είναι ένα πρώτο στάδιο γενίκευσης μιας διαδικασίας με την εισαγωγή μιας μεταβλητής. Για το λόγο αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί γενικότερα στην εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής και της χρήσης της στη λύση προβλημάτων.
4. Η δραστηριότητα αυτή έχει αναπτυχθεί αναλυτικά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εισαγωγή στις λειτουργίες και στις δυνατότητες του λογισμικού. Περιέχεται στη σελίδα 84 του παρόντος βιβλίου, στο κεφάλαιο “Ενδεικτική Δραστηριότητα: Το πρόβλημα με τις πίτσες”. Επίσης, εμπεριέχεται και στην ηλεκτρονική μορφή του Εγχειριδίου Χρήστη.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Μία πιτσαρία φτιάχνει στρογγυλές πίτσες σε 5 διαφορετικά μεγέθη:

> ατομική πίτσα με διάμετρο 15 cm
> πίτσα μεσαίου μεγέθους με διάμετρο 30 cm
> πίτσα μεγάλου μεγέθους με διάμετρο 45 cm
> πίτσα 'πάρτυ' με διάμετρο 60 cm
> πίτσα 'γίγας' με διάμετρο 75 cm

Ο ιδιοκτήτης της πιτσαρίας έχει καθιερώσει μια παράξενη 'οικονομική πολιτική' που σας επιτρέπει να πληρώσετε την πίτσα σας με έναν από δύο διαφορετικούς τρόπους:

1. Πληρώνετε 6 λεπτά για κάθε εκατοστό της περιφέρειάς της.
2. Πληρώνετε 0,7 λεπτά για κάθε τετραγωνικό εκατοστό του εμβαδού της.

Διαλέξτε τον τρόπο που σας συμφέρει, για να πληρώσετε την πίτσα που θα αγοράσετε.

Ερωτήσεις

1. Για ποια μεγέθη πίτσας σας συμφέρει να πληρώσετε με το μήκος της περιφέρειας; Για να απαντήσετε στην ερώτηση αυτή, παρατηρήστε προσεκτικά τα δεδομένα που έχετε συμπληρώσει στον πίνακα με τις στήλες 'διάμετρος', 'ακτίνα', 'μήκος περιφέρειας', 'εμβαδό', 'τιμή με το μήκος', 'τιμή με το εμβαδό'.
   Απάντηση: Για διαμέτρους πίτσας 45cm, 60cm και 75cm μας συμφέρει να πληρώσουμε με το μήκος της περιφέρειας.
2. Για ποια μεγέθη πίτσας σας συμφέρει να πληρώσετε με το εμβαδό;
   Απάντηση: Για διαμέτρους πίτσας 15cm και 30cm μας συμφέρει να πληρώσουμε με το εμβαδό.
3. Κατασκευάστε δύο κουμπιά στην 'Αριθμομηχανή' που να υπολογίζουν την τιμή της πίτσας με το εμβαδό και την τιμή της πίτσα με το μήκος της περιέφερειας. Τα κουμπιά που κατασκευάσατε σας λύνουν το πρόβλημα σχετικά με τον τρόπο που θα επιλέξετε να πληρώσετε την πίτσα;
   Απάντηση: Ναι υπάρχει και βρίσκεται μεταξύ των τιμών 34 και 35 και είναι το μέγεθος με τιμή διαμέτρου 34,3cm.
4. Υπάρχει ένα μέγεθος πίτσας που να κοστίζει το ίδιο με όποιον τρόπο και αν την πληρώσετε; Αν ναι, μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται; Απαντήστε παρατηρώντας το παράθυρο 'Πίνακας'.
5. Ποια είναι ακριβώς αυτή η τιμή;
   Απάντηση: Η τιμή είναι 6,47 ευρώ.
6. Στείλε τα δεδομένα των στηλών ('διάμετρος' - 'τιμή με το εμβαδό') και ('διάμετρος' - 'τιμή με το μήκος της περιφέρειας') στο παράθυρο 'Γράφημα'. Τι αντιπροσωπεύουν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο γραφικών παραστάσεων;

2. Το πρόβλημα του πέτρινου μονοπατιού

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Η δραστηριότητα αυτή δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με διαδικασίες ‘οικοδόμησης’ μιας αναδρομικής σχέσης, προκειμένου να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα κατασκευής. Η δραστηριότητα είναι δομημένη με τέτοιο τρόπο, ώστε να οδηγηθούν σταδιακά στη σχέση που θα χρησιμοποιήσουν, για να λύσουν το πρόβλημα, καθώς και σε αναπροσαρμογή της σχέσης αυτής, προκειμένου να ξεπεράσουν τα προβλήματα που δημιουργούνται από την εκάστοτε αλλαγή των δεδομένων του προβλήματος.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Είναι ένα πρόβλημα που μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα, στην ενότητα των προόδων. Μπορεί όμως να δοθεί και σε οποιαδήποτε τάξη του Γυμνασίου (εκτός της Α΄) και του Λυκείου σαν μια ανεξάρτητη εργαστηριακή δραστηριότητα στο μάθημα των Μαθηματικών.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
> Να εμπλακούν σε διαδικασίες δημιουργίας αναδρομικής σχέσης.
> Να μπορούν να αναπροσαρμόζουν τη σχέση αυτή, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος.
> Να διερευνήσουν την ορθότητα της σχέσης που δημιούργησαν.
> Να συνδέσουν ένα πρόβλημα κατασκευής με τις μαθηματικές έννοιες που το διέπουν.

Επιπροσθέτως, η ασχολία με μία τέτοια δραστηριότητα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές αφ’ ενός μεν να συνδέσουν τα μαθηματικά με την καθημερινή τους ζωή, αφ’ ετέρου δε να συνειδητοποιήσουν ότι σε ένα πρόβλημα μπορούν να υπάρξουν διαφορετικές σωστές λύσεις. Επίσης μπορούν να διαπιστώσουν τη δυνατότητα που τους παρέχεται από το λογισμικό να επιλύουν εύκολα και γρήγορα ένα πρόβλημα στην περίπτωση αναπροσαρμογής των δεδομένων του.

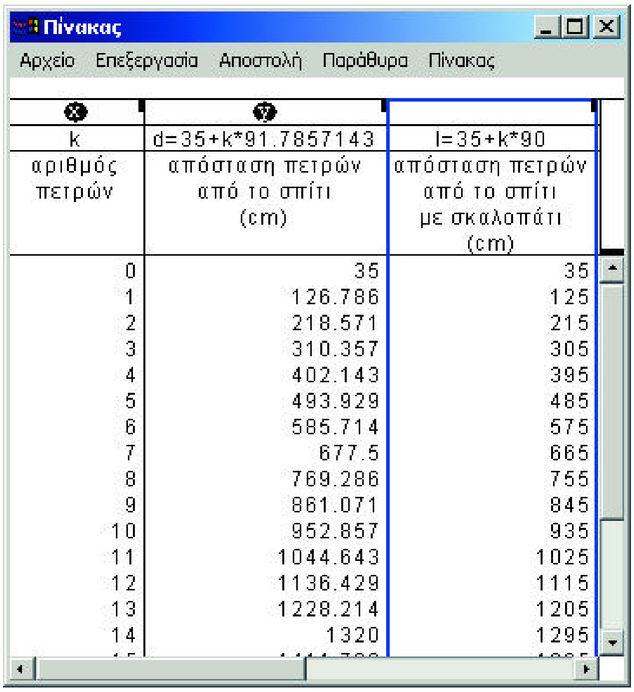
Παρατηρήσεις

1. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε, εφ’ όσον είναι δυνατόν, να συνδεθεί με μια ανάλογη κατασκευή που να μπορεί να γίνει στο χώρο του σχολείου (στην αυλή, στους αθλητικούς χώρους κτλ).
2. Το σχέδιο στο χαρτί για την τοποθέτηση των πετρών είναι μια αναγκαία ενέργεια πριν από τη χρήση του λογισμικού. Με τη βοήθεια του σχεδίου οι μαθητές θα οδηγηθούν σταδιακά στη γενίκευση της σχέσης που θα χρησιμοποιήσουν, στο παράθυρο ‘Πίνακας’ ή στην ‘Αριθμομηχανή’. Θα βοηθούσε επίσης και η κατασκευή ενός πίνακα στο τετράδιο, σαν αυτόν που φαίνεται παρακάτω. (Εδώ έχουμε πάρει την απόσταση από το σπίτι ίση με 35 cm και έχουμε συμβολίσει την απόσταση μεταξύ των πετρών με x.) Θα ήταν χρήσιμο η κάθε ομάδα να επιλέξει δική της απόσταση της πρώτης πέτρας από το σπίτι ούτως ώστε να τονιστεί η ύπαρξη διαφορετικών λύσεων σε ένα πρόβλημα.

3. Προτείνεται να δουλέψει κάθε ομάδα με τις δικές της επιλογές (απόσταση πετρών), ούτως ώστε να γίνει αντιληπτό ότι σε ένα τέτοιο πρόβλημα μπορούν να υπάρχουν πολλές διαφορετικές λύσεις.

Πέτρα	**Απόσταση πέτρας από το σπίτι**
1	35
2	35+30+x
3	35+30+x+30+x=**35+2(30+x)**
4	35+2(30+x)+30+x=**35+3(30+x)**
5	………………………………
6	………………………………
7	**35+6(30+x)**
15	**35+14(30+x)**

4. Στην εικόνα 1, φαίνεται ο πίνακας που φτιάξαμε στο Function Probe, για να απαντήσουμε στα ερωτήματα 7 και 12. Αριθμήσαμε τις πέτρες από 0-14 και φτιάξαμε τις σχέσεις 14x+30*15+35=1350 (χωρίς σκαλοπάτι) και 14x+30*15+35=1325 (με σκαλοπάτι), προκειμένου να υπολογίσουμε το x (x=61,7857143 στην πρώτη περίπτωση και το x=60 στη δεύτερη).



k αριθμός πετρών	d=35+k*91.7857143 απόσταση πετρών από το σπίτι (cm)	l=35+k*90 απόσταση πετρών από το σπίτι με σκαλοπάτι (cm)
0	35	35
1	126.786	125
2	218.571	215
3	310.357	305
4	402.143	395
5	493.929	485
6	585.714	575
7	677.5	665
8	769.286	755
9	861.071	845
10	952.857	935
11	1044.643	1025
12	1136.429	1115
13	1228.214	1205
14	1320	1295

εικόνα 1

5. Στην εικόνα 2, η τέταρτη στήλη του πίνακα φτιάχτηκε θεωρώντας την απόσταση μεταξύ των πετρών ίση με το μισό της προηγούμενης στήλης και βρήκαμε ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσει 20 πέτρες συμπληρώνοντας την πρώτη στήλη (από το 14 και κάτω), μέχρι το αντίστοιχο κελί της τέταρτης στήλης να μας δείξει την τιμή 1295.
6. Προτείνεται στο τέλος της δραστηριότητας κάθε ομάδα να παρουσιάσει την εργασία της στις άλλες ομάδες της τάξης και να συζητήσουν όλοι για την πορεία της διερεύνησης που ακολούθησαν.

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

k	d=35+k*91.7857143	l=35+k*90	m=35+k*60
αριθμός πετρών	απόσταση πετρών από το σπίτι (cm)	απόσταση πετρών από το σπίτι με σκαλοπάτι (cm)	απόσταση πετρών από το σπίτι (μισή μεταξύ πετρών)
0	35	35	35
1	126.786	125	95
2	218.571	215	155
3	310.357	305	215
4	402.143	395	275
5	493.929	485	335
6	585.714	575	395
7	677.5	665	455
8	769.286	755	515
9	861.071	845	575
10	952.857	935	635
11	1044.643	1025	695
12	1136.429	1115	755
13	1228.214	1205	815
14	1320	1295	875
15	1411.786	1385	935
16	1503.571	1475	995
17	1595.357	1565	1055
18	1687.143	1655	1115
19	1778.929	1745	1175
20	1870.714	1835	1235
21	1962.5	1925	1295

εικόνα 2

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος

Ας υποθέσουμε ότι η ηλικιωμένη γειτόνισσά σου, η κυρία Αγνή Γέρου, σου ζητάει να στρώσεις ένα μονοπάτι από πέτρες μέσα στην αυλή της, ξεκινώντας από την πίσω πόρτα του σπιτιού της και καταλήγοντας σε μια σκάφη για πουλιά, η οποία βρίσκεται 13,5 m μακρύτερα. Για το σκοπό αυτό, η ίδια έχει αγοράσει δεκαπέντε στρογγυλές πέτρες, διαμέτρου 30 cm η καθεμία. Θα ήθελε να τις τοποθετήσεις ομοιόμορφα στην αυλή, ώστε η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες να είναι παντού η ίδια και με τέτοιον τρόπο, ώστε η τελευταία πέτρα να ακουμπάει στη σκάφη για τα πουλιά. Μπορείς να καθορίσεις μόνος σου την απόσταση ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και την πόρτα του σπιτιού και δεν πειράζει να διαφέρει από την απόσταση που έχουν οι υπόλοιπες πέτρες μεταξύ τους. Πριν πας λοιπόν στο σπίτι της, για να κάνεις την δουλειά, κάνεις ένα σχέδιο με τις 15 πέτρες που ξεκινούν από το σπίτι της κυρίας Αγνής και καταλήγουν στη σκάφη για τα πουλιά.

1. Πόσο θα αφήσεις ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και την πόρτα του σπιτιού;
2. Σε ποια απόσταση θα τοποθετήσεις τη μια πέτρα μετά την άλλη, ώστε να χρησιμοποιήσεις και τις δεκαπέντε, προκειμένου να φτάσεις τη σκάφη για τα πουλιά;

3. Πόσο θα απέχει η αρχή της τρίτης πέτρας από το σπίτι;
4. Πόσο θα απέχει η αρχή της της πέμπτης πέτρας από το σπίτι;
5. Της δέκατης πέτρας; Της δέκατης τέταρτης πέτρας;
6. Περίγραψε την μέθοδο που ακολούθησες, για να απαντήσεις στις ερωτήσεις 3-5.
7. Κατασκεύασε έναν πίνακα στο Function Probe, για να δείξεις πόσο απέχει κάθε μια από τις δεκαπέντε πέτρες από το σπίτι. Η μια στήλη θα περιλαμβάνει τους αριθμούς από 1 ως 15 και η δεύτερη την απόσταση του σπιτιού από την πρώτη πέτρα, από τη δεύτερη πέτρα κτλ. Μολονότι μπορείς να πληκτρολογήσεις τις τιμές της δεύτερης στήλης μια - μια, το Function Probe έχει τρόπους να σε βοηθήσει. Μπορείς α) να γεμίσεις τη στήλη χρησιμοποιώντας την εντολή ‘Γέμισμα’ β) να πληκτρολογήσεις έναν τύπο στη σειρά μεταβλητών/τύπων γ) να δημιουργήσεις ένα κουμπί στην ‘Αριθμομηχανή’ και να χρησιμοποιήσεις την εντολή ‘Τιμή σε Πίνακα’ του μενού ‘Αποστολή’, κτλ. (Θα πάρεις επιπλέον βαθμό για κάθε νέο τρόπο που μπορείς να βρεις για να συμπληρώσεις τη στήλη).

Β’ Μέρος

Έχοντας κάνει όλους τους υπολογισμούς σου σε χαρτί, πηγαίνεις στο σπίτι της κυρίας Αγνής, για να ξεκινήσεις το στρώσιμο του μονοπατιού. Όμως, ανακαλύπτεις με έκπληξη ότι έξω από την πίσω πόρτα της γειτόνισσάς σου υπάρχει ένα τσιμεντένιο σκαλοπάτι με πλάτος 25 cm. Δεδομένου ότι θέλεις να χρησιμοποιήσεις και τις δεκαπέντε πέτρες, αντιλαμβάνεσαι ότι θα πρέπει να προσαρμόσεις την απόσταση που αρχικά υπολόγισες ότι θα έχουν οι πέτρες μεταξύ τους, αφού μειώθηκε η ολική απόσταση σπιτιού και σκάφης.

8. Πόσο θα αφήσεις ανάμεσα στην πρώτη πέτρα και το σκαλοπάτι;
9. Ποια θα είναι τώρα η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες;
10. Πόσο απέχει πλέον η αρχή της πρώτης πέτρας από το σπίτι;
11. Πόσο απέχει η αρχή της έβδομης πέτρας από το σπίτι; Της δωδέκατης;
12. Προκειμένου να διευκολυνθείς στον υπολογισμό της απόστασης οποιασδήποτε πέτρας του μονοπατιού από το σπίτι, δημιούργησε ένα κουμπί στην ‘Αριθμομηχανή’, το οποίο θα την υπολογίζει. Ή γράψε έναν τύπο που θα εκφράζει την απόσταση του σπιτιού από μια πέτρα και χρησιμοποίησέ τον για να γεμίσεις μια στήλη του πίνακα.

Γ’ Μέρος

Η κυρία Αγνή περπάτησε στο μονοπάτι που έστρωσες και θεωρεί ότι η απόσταση ανάμεσα στις πέτρες είναι πολύ μεγάλη για το διασκελισμό της. Θα ήθελε λοιπόν να προσθέσει μερικές πέτρες, ώστε να μειωθεί στο μισό η απόσταση που υπάρχει τώρα ανάμεσά τους. Περιμένει λοιπόν από σένα να υπολογίσεις πόσες πέτρες θα χρειαστούν, να τις αγοράσεις και να διορθώσεις το μονοπάτι.

13. Πόσο απέχει τώρα η πρώτη πέτρα από το σπίτι (η αρχή της);
14. Ποια θα είναι η καινούρια απόσταση ανάμεσα στις πέτρες; Πόσες επιπλέον πέτρες θα χρειαστείς;
15. Πόσο θα απέχει η αρχή της έβδομης πέτρας από το σπίτι; Της δέκατης πέτρας;
16. Δημιούργησε ένα κουμπί στην ‘Αριθμομηχανή’ με το οποίο θα εισάγεις τον αριθμό μιας πέτρας

και θα παίρνεις ως αποτέλεσμα την απόσταση αυτής της πέτρας από το σπίτι.

17. Κατάστρωσε έναν πίνακα που να δείχνει την απόσταση κάθε πέτρας από το σπίτι. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις έναν τύπο για να εισάγεις τις αποστάσεις ή το κουμπί που δημιούργησες στο προηγούμενο ερώτημα.
18. α) Εάν χρησιμοποίησες τύπο, για να γεμίσεις τον πίνακα του ερωτήματος 16, να αναγνωρίσεις τον πολλαπλασιαστή και τον προσθετέο στον τύπο σου. Όσον αφορά τις διαστάσεις του μονοπατιού, δηλαδή το πλάτος που έχουν οι πέτρες, την απόσταση ανάμεσά τους, το τσιμεντένιο σκαλοπάτι κτλ., να περιγράψεις τι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή και τι στον προσθετέο στον τύπο σου. β) Εάν χρησιμοποίησες κουμπί της ‘Αριθμομηχανής’ για να γεμίσεις τον πίνακα του ερωτήματος 16, να αναγνωρίσεις τον πολλαπλασιαστή και τον προσθετέο στην καταχωρημένη σειρά της πληκτρολόγησης που ακολούθησες για να δημιουργήσεις το κουμπί. Όσον αφορά τις διαστάσεις του μονοπατιού, δηλαδή το πλάτος που έχουν οι πέτρες, την απόσταση ανάμεσά τους, το τσιμεντένιο σκαλοπάτι κτλ., να περιγράψεις τι αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστή και τι στον προσθετέο στην πληκτρολόγησή σου.

3. Τα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Τα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα είναι ένα πρόβλημα στο οποίο δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με συναρτήσεις της μορφής $y=αx$ και $y=αx+β$, προκειμένου να επιλέξουν την πιο συμφέρουσα περίπτωση παραγωγής φωτοαντιγράφων.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ενταχθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο της Β΄ Γυμνασίου, το οποίο πραγματεύεται τις συναρτήσεις $y=αx$ και $y=αx+β$.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

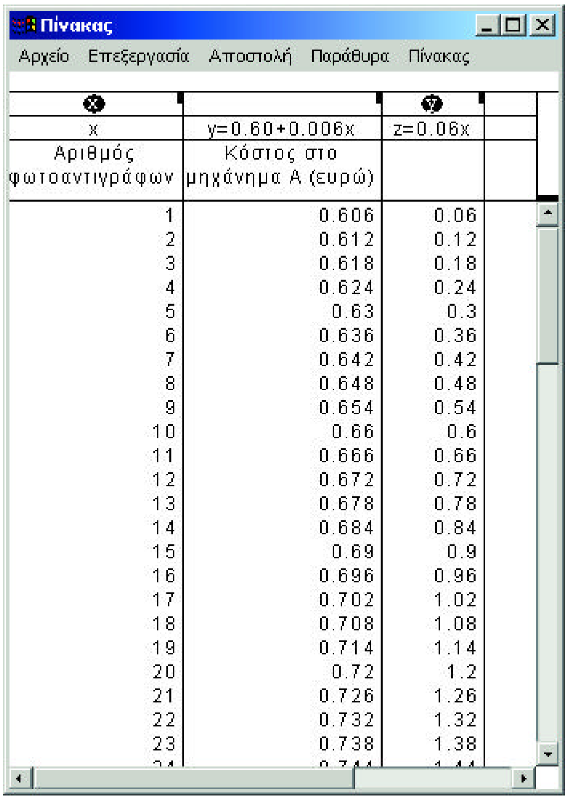
Οι μαθητές:

- Να αποφανθούν για τον τρόπο με τον οποίο συμμεταβάλλονται δύο μεγέθη και να τον αναπαραστήσουν με αλγεβρικό τύπο, πίνακα τιμών και γραφική παράσταση.
- Να αντιληφθούν τις έννοιες ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή.
- Να μπορούν να απαντήσουν σε συγκεκριμένα ερωτήματα κατόπιν σύγκρισης του συνόλου τιμών και των γραφημάτων δύο συναρτήσεων.
- Να μπορούν να δώσουν την ερμηνεία του σημείου τομής δύο γραφικών παραστάσεων.

Παρατηρήσεις

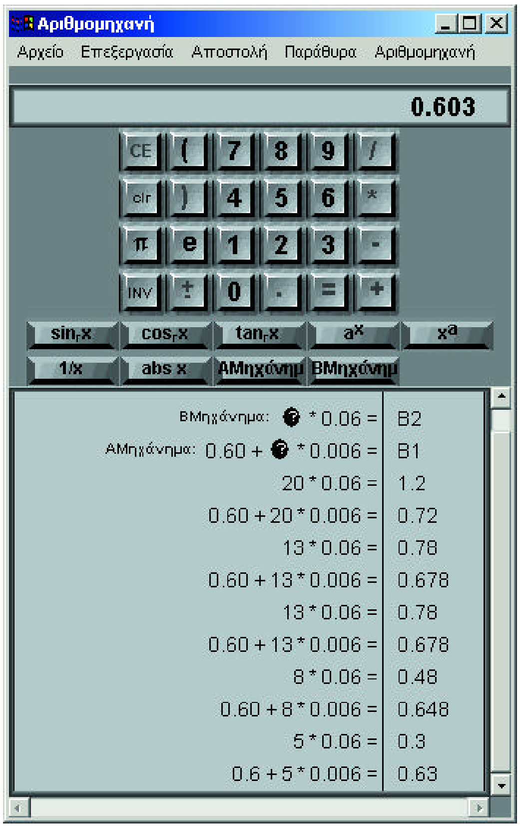
1. Στόχος του ερωτήματος 1 είναι οι μαθητές να βρουν μέσω αριθμητικών πράξεων το κόστος των ζητούμενων φωτοαντιγράφων και να παρατηρήσουν ότι άλλοτε τους συμφέρει η παραγωγή φωτοαντιγράφων στο μηχάνημα Α και άλλοτε στο μηχάνημα Β.
2. Στόχος του ερωτήματος 2 είναι μια πρώτη γενίκευση του τρόπου υπολογισμού του κόστους. Επίσης δίνεται η ευκαιρία (με τη δημιουργία του κουμπιού στην ‘Αριθμομηχανή’) να γίνει συζήτηση για τις έννοιες "ανεξάρτητη" και "εξαρτημένη" μεταβλητή (βλέπε εικόνα 2).
3. Στόχος του ερωτήματος 3 είναι να χρησιμοποιήσουν το παράθυρο ‘Πίνακας’ και να εκφράσουν το κόστος των φωτοαντιγράφων με τύπο. Επίσης με τον τρόπο αυτό θα διευκολυνθούν, συγκρίνοντας τις τιμές του πίνακα, να αποφανθούν στη συνέχεια για το ερώτημα 4 (βλέπε εικόνα 1). (Μέχρι 11 φωτοαντίγραφα συμφέρει στο μηχάνημα Β, από εκεί και πάνω στο μηχάνημα Α.)
4. Στο ερώτημα 5, προκειμένου οι μαθητές να δουν τα σημεία στο γράφημα, θα πρέπει να κάνουν ‘Αλλαγή κλίμακας’ από το μενού ‘Γράφημα’. Στο σημείο αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση για την κατάλληλη επιλογή ρυθμίσεων στην κλίμακα, προκειμένου να φαίνονται τα σημεία και τι σημαίνει αυτό.
5. Στο ερώτημα 5 θα πρέπει να δοθεί έμφαση στη μαθηματική ερμηνεία του σημείου τομής των δύο γραφημάτων (σημεία των δύο γραφημάτων με τις ίδιες συνιστώσες), καθώς επίσης και στο τι αντιπροσωπεύει το σημείο αυτό στο συγκεκριμένο πρόβλημα (ίδιο κόστος παραγωγής φωτοαντιγράφων στο μηχάνημα Α και Β).

6. Η δραστηριότητα είναι δυνατόν να επεκταθεί, ζητώντας από τους μαθητές να πληκτρολογήσουν στο παράθυρο 'Γράφημα' τους κατάλληλους τύπους συναρτήσεων που θα διέρχονται από τα σημεία που έχουν στείλει στο γράφημα και να αποφανθούν για τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο διαφορετικών γραφικών αναπαραστάσεων αλλά και από τι εξαρτάται αυτό.

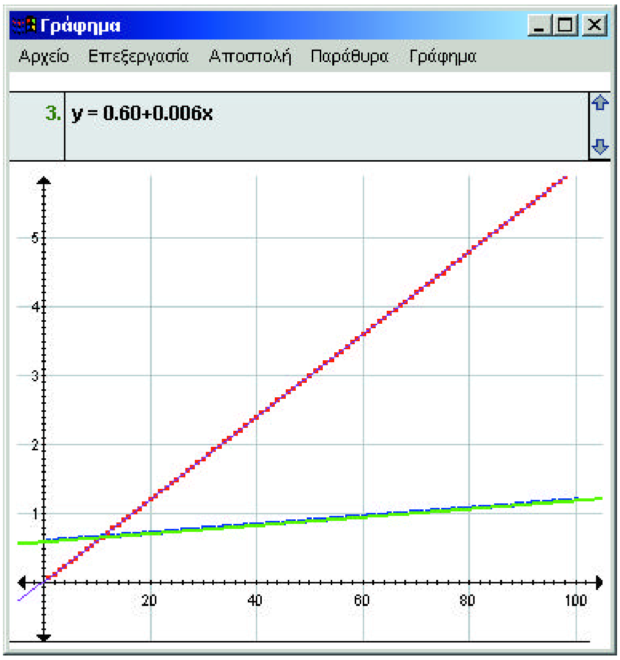


x	y=0.60+0.006x	z=0.06x
Αριθμός φωτοαντιγράφων	Κόστος στο μηχάνημα Α (ευρώ)	
1	0.606	0.06
2	0.612	0.12
3	0.618	0.18
4	0.624	0.24
5	0.63	0.3
6	0.636	0.36
7	0.642	0.42
8	0.648	0.48
9	0.654	0.54
10	0.66	0.6
11	0.666	0.66
12	0.672	0.72
13	0.678	0.78
14	0.684	0.84
15	0.69	0.9
16	0.696	0.96
17	0.702	1.02
18	0.708	1.08
19	0.714	1.14
20	0.72	1.2
21	0.726	1.26
22	0.732	1.32
23	0.738	1.38

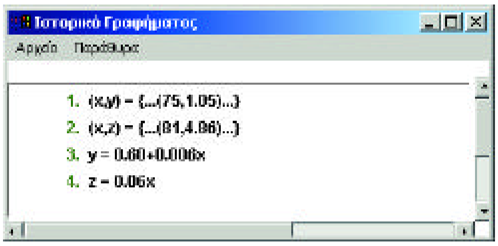
εικόνα 1



εικόνα 2



εικόνα 3



εικόνα 4

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Έχεις να επιλέξεις ανάμεσα σε δύο τύπους φωτοαντιγραφικών μηχανημάτων, για να βγάλεις αντίγραφα ενός μεγάλου εγγράφου. Το πρώτο μηχάνημα (Α) απαιτεί τη δημιουργία ενός πρωτοτύπου, το οποίο κοστίζει 60 λεπτά, ενώ κάθε επόμενο αντίγραφο κοστίζει 0,6 λεπτά. Αν χρησιμοποιήσεις το δεύτερο μηχάνημα (Β), θα πληρώσεις 6 λεπτά για κάθε αντίγραφο που θα βγάλεις. Χρησιμοποίησε το Function Probe, για να απαντήσεις στα παρακάτω:

1. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. (Μπορείς να χρησιμοποιήσεις το παράθυρο 'Αριθμομηχανή', για να κάνεις τις πράξεις.)

Αριθμός φωτοαντιγράφων	Κόστος στο μηχάνημα Α (ευρώ)	Κόστος στο μηχάνημα Β (ευρώ)	Σε ποιο μηχάνημα σε συμφέρει να βγάλεις τα φωτοαντίγραφα;
5	*0.63*	*0.3*	*B*
8	*0.648*	*0.48*	*B*
13	*0.678*	*0.78*	*A*
20	*0.72*	*1.2*	*A*

Τι παρατηρείς;

2. Δημιούργησε δύο κουμπιά στην 'Αριθμομηχανή' που το ένα θα σου δίνει το κόστος των φωτοαντιγράφων με το μηχάνημα Α και το άλλο με το μηχάνημα Β. Με τη βοήθεια αυτών των κουμπιών συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός φωτοαντιγράφων	Κόστος στο μηχάνημα Α (ευρώ)	Κόστος στο μηχάνημα Β (ευρώ)
7	*0.642*	*0.42*
11	*0.666*	*0.66*
23	*0.738*	*1.38*
32	*0.792*	*1.92*
47	*0.882*	*2.82*
51	*0.906*	*3.06*
72	*1.032*	*4.32*

3. Ο ιδιοκτήτης των μηχανημάτων θα ήθελε να έχει έναν πίνακα, στον οποίο να φαίνεται πόσα χρήματα θα εισπράξει κάθε φορά, αν βγάλει από 1 μέχρι και 100 αντίγραφα, τόσο στο μηχάνημα Α, όσο και στο Β. Μπορείς να του φτιάξεις εσύ έναν τέτοιο πίνακα; (Θα σε διευκόλυνε πολύ για τη δουλειά αυτή να χρησιμοποιήσεις το παράθυρο 'Πίνακας'.)
4. Παρατήρησε τον πίνακα που έφτιαξες και απάντησε στην ερώτηση: Πότε σε συμφέρει να χρησιμοποιήσεις (για την παραγωγή φωτοαντιγράφων) το μηχάνημα Α και πότε το Β;
5. Να κατασκευάσεις τις γραφικές παραστάσεις 'Αριθμός φωτοαντιγράφων-Κόστος με το μηχάνημα Α' και 'Αριθμός φωτοαντιγράφων-Κόστος με το μηχάνημα Β' στέλνοντας τα αντίστοιχα σημεία στο παράθυρο 'Γράφημα'. Τέμνονται αυτές οι γραφικές παραστάσεις; Αν

ναι, σε ποιο σημείο; Γιατί συμβαίνει αυτό; Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις μπορείς να αποφανθείς για το πότε σε συμφέρει η παραγωγή αντιγράφων στο μηχάνημα Α και πότε στο μηχάνημα Β;

4. Το ταξίδι

Σύντομη Περιγραφή
Για την πραγματοποίηση ενός ταξιδιού διάρκειας το πολύ μιας εβδομάδας προτείνονται δύο διαφορετικές προσφορές χρηματοδότησης. Το πρόβλημα αφορά στη διερεύνηση και εύρεση της οικονομικά πιο συμφέρουσας προσφοράς ανάλογα με την τελική διάρκεια του ταξιδιού.
Τα συνολικά κόστη του ταξιδιού και στις δύο προσφορές είναι ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού. Έτσι η διερεύνηση της συμφέρουσας λύσης έγκειται στη μελέτη δύο διαφορετικών τύπων γραμμικών συναρτήσεων της μορφής $y=αx$ και $y=αx+β$.

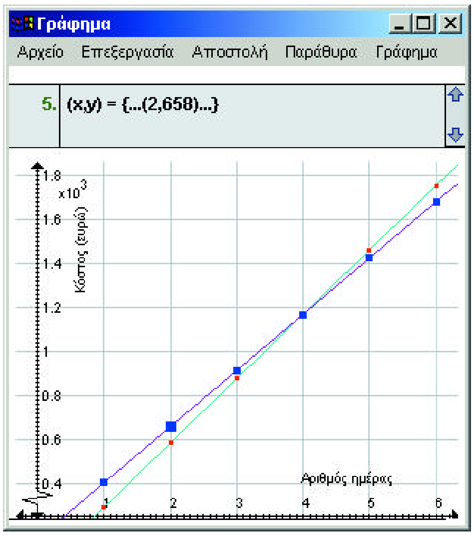
Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Μπορεί να διδαχθεί στη Γ' Γυμνασίου καθώς και στην Α΄ Λυκείου στο κεφάλαιο των γραμμικών συναρτήσεων $y=αx+β$. Το πρόβλημα στοχεύει στο να παραστήσουν τη μεταβολή δύο ποσοτήτων σε ένα πρόβλημα της καθημερινής ζωής (διάρκεια ταξιδιού και κόστος) με τη γραμμική συνάρτηση.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3-4 διδακτικές ώρες

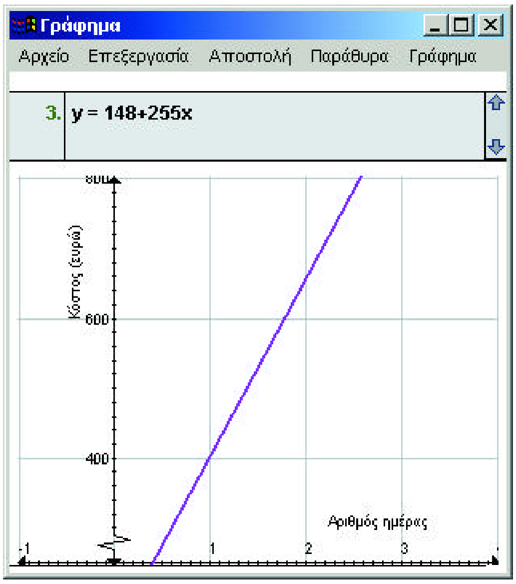
Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
- Να εκφράζουν τη μεταβολή δύο ποσοτήτων σε αλγεβρικό τύπο της μορφής $y=αx+β$.
- Να λύνουν γραφικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων α' βαθμού.
- Να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται τις επιπτώσεις της αλλαγής της κλίμακας στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Παρατηρήσεις
1. Στο ερώτημα 1 προτείνεται οι μαθητές να εκτελούν τις πράξεις τους στην 'Αριθμομηχανή'.
2. Στο ερώτημα 2 προτείνεται οι μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη τούς υπολογισμούς τους στην 'Αριθμομηχανή', να κατασκευάσουν ένα κουμπί που θα παριστάνει το κόστος σε συνάρτηση με τον αριθμό των ημερών.
3. Στο ερώτημα 3 οι μαθητές πρέπει να λάβουν υπόψη τους το κουμπί που δημιούργησαν στην 'Αριθμομηχανή' και να το χρησιμοποιήσουν, για να δημιουργήσουν μια εξαρτημένη στήλη στο παράθυρο 'Πίνακας' με βάση το κουμπί αυτό. Έτσι, στη μια στήλη θα εισαγάγουν τον αριθμό των ημερών από το 1-7 και στην εξαρτημένη θα χρησιμοποιήσουν τον τύπο που δημιούργησαν για τον υπολογισμό του κέρδους, ώστε να γεμίσει αυτόματα.
4. Το γράφημα κατασκευάζεται με αποστολή σημείων από τον 'Πίνακα' στο 'Γράφημα'. Στο ερώτημα 4 ζ) να γίνει συζήτηση στην τάξη για το ότι η αλλαγή κλίμακας έχει επιπτώσεις στο πώς 'φαίνεται' η γραφική παράσταση. Εκεί στηρίζεται πολλές φορές η ψεύτικη εντύπωση που δημιουργείται από τα διαγράμματα, τα οποία παριστάνουν τα κέρδη μιας εταιρείας. Επιλέγεται τέτοια κλίμακα που να δείχνει πάντα ότι η εταιρεία έχει κέρδη (το διάγραμμα των κερδών δηλαδή είναι αύξουσα συνάρτηση). (Βλέπε εικόνα 2 και εικόνα 3.)

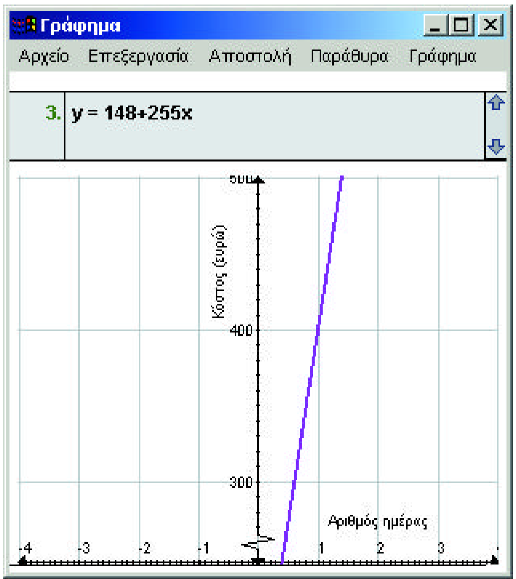
5. Η ίδια διερεύνηση γίνεται και στη Β' Πρόταση. Στο ερώτημα 4 της Β' Πρότασης ζητείται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν κατάλληλα τη γραφική παράσταση με βάση τα δεδομένα του προβλήματος (βλέπε εικόνα 1). Για να ενώσουν τα σημεία θα χρησιμοποιήσουν την εντολή 'Σύνδεση σημείων' του μενού 'Γράφημα'.
6. Στο ερώτημα 5 του Β' μέρους, αφού οι μαθητές ελέγξουν γραφικά την αλήθεια της εικασίας, να γίνει και η αλγεβρική της απόδειξη βρίσκοντας τη συναλήθευση των δύο τύπων.



εικόνα 1



εικόνα 2



εικόνα 3

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Τα οχτώ μέλη μιας αρχαιολογικής λέσχης σχεδιάζουν ένα ταξίδι μιας εβδομάδας στην Αρχαία Ολυμπία, προκειμένου να επισκεφτούν αρχαία μνημεία. Δεδομένου ότι η λέσχη έχει περιορισμένες δυνατότητες χρηματοδότησης, τα μέλη κάνουν έναν προϋπολογισμό με βάση δύο προσφορές.

Α' Προσφορά

Μπορούν να νοικιάσουν δύο μικρά αυτοκίνητα με ένα ειδικό πακέτο προσφοράς για μια εβδομάδα ή λιγότερο. Για να ισχύσει η ειδική προσφορά, θα πρέπει να δώσουν 148 ευρώ παραλαμβάνοντας το κάθε αυτοκίνητο. Η βενζίνη και τα λάδια θα κοστίζουν 15 ευρώ την ημέρα και για τα δύο μικρά αυτοκίνητα. Κατά τα άλλα, θα ξοδεύουν 30 ευρώ το άτομο την ημέρα για φαγητό σε εστιατόρια και για τις διανυκτερεύσεις τους.

1. Πόσα θα έχει ξοδέψει η λέσχη μετά από μια ημέρα (για διανυκτέρευση, φαγητό, βενζίνη, λάδια και ενοίκιο των αυτοκινήτων); Μετά από 5, 6, 7 ημέρες; Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα κάνοντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς στην 'Αριθμομηχανή':
   Απάντηση: Την πρώτη ημέρα η λέσχη θα ξοδέψει 403 ευρώ.

Διάρκεια ταξιδιού (Ημέρες)	**Έξοδα (ευρώ)**
5η	*1423*
6η	*1678*
7η	*1933*

2. Κατασκεύασε στην 'Αριθμομηχανή' ένα κουμπί, το οποίο θα υπολογίζει το συνολικό κόστος της εκδρομής ανάλογα με τον αριθμό των ημερών του ταξιδιού.
   Απάντηση: Ο τύπος του κουμπιού είναι $y=148+255x$.
3. Κατασκεύασε έναν πίνακα που να δείχνει το αθροιστικό συνολικό κόστος ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού (δηλαδή τον αριθμό των ημερών του ταξιδιού). Σκέψου πώς θα τον δημιουργήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο που κατασκεύασες και τη δυνατότητα που σου δίνει το πρόγραμμα για κατασκευή εξαρτημένων στηλών.
4. Η ταμίας της λέσχης ζητάει να της δοθεί ένα διάγραμμα στο Function Probe, από το οποίο θα μπορεί να διαβάζει το συνολικό κόστος ανάλογα με τη διάρκεια του ταξιδιού. Βρες έναν τρόπο να κάνεις αυτό το διάγραμμα αξιοποιώντας τις στήλες του 'Πίνακα' που έχεις κατασκευάσει. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη δυνατότητα της 'Αριθμομηχανής' για αποστολή δεδομένων στα άλλα παράθυρα του λογισμικού. Καθώς το κατασκευάζεις, να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:
   α) Τι αντιπροσωπεύει κάθε άξονας;
   β) Τι κλίμακα χρησιμοποιείς σε κάθε άξονα;
   γ) Είναι το διάγραμμά σου μια συνεχής γραμμή; Διακριτά σημεία; Κάτι άλλο; Γιατί;
   δ) Πώς εισαγάγεις τα δεδομένα σου στο διάγραμμα (με τύπο, με κουμπί της 'Αριθμομηχανής', με το μενού 'Αποστολή' του παραθύρου 'Πίνακας');
   ε) Να γράψεις τον κατάλληλο τύπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία αυτά.
   ζ) Αν άλλαζες την κλίμακα του x (διπλασίαζες τη μονάδα μέτρησης), τι θα παρατηρούσες στη γραφική παράσταση;

Β' Προσφορά

Ενόσω η ταμίας καταστρώνει τον αρχικό αυτό προϋπολογισμό, κάποιο άλλο μέλος κάνει μια νέα προσφορά, η οποία φαίνεται πιο διασκεδαστική και ενδεχομένως φθηνότερη: Μπορούν να νοικιάσουν στην τιμή των 80 ευρώ την ημέρα ένα πουλμανάκι και για τους οχτώ, το οποίο έχει ένα αρκετά μεγάλο ψυγείο. Το κόστος για το πούλμαν θα αφαιρείται αυτόματα στο τέλος κάθε ημέρας, από τον τραπεζικό λογαριασμό της λέσχης. Η βενζίνη και τα λάδια θα κοστίζουν 20 ευρώ την ημέρα. Όμως, επειδή θα μπορούν να ετοιμάζουν φαγητό και να το κρατάνε στο ψυγείο του πούλμαν, τα έξοδα της ημέρας για φαγητό και για διανυκτέρευση θα είναι μόνο 24 ευρώ το άτομο.

1. Αν νοικιάσουν το πούλμαν, πόσο θα κοστίζει στη λέσχη για μια ημέρα (για διανυκτερεύσεις, φαγητό, βενζίνη, λάδια και ενοίκιο του πούλμαν); Πόσα θα έχουν πληρώσει μετά από πέντε ημέρες; Χρησιμοποίησε την 'Αριθμομηχανή' για τους υπολογισμούς σου.
   Απάντηση: Η λέσχη θα ξοδέψει 292 ευρώ την πρώτη ημέρα για το πούλμαν. Την πέμπτη ημέρα θα έχει ξοδέψει 1460 ευρώ.
2. Κατάστρωσε έναν πίνακα που να παρουσιάζει το αθροιστικό συνολικό κόστος για κάθε μέρα του ταξιδιού ανάλογα με με τη διάρκειά του, αν νοικιάσουν το πούλμαν. Δούλεψε σε αυτό το σημείο, όπως και στην Α' Προσφορά.
3. Η ταμίας σού επιστρέφει το αρχικό σου διάγραμμα και σου ζητάει να προσθέσεις σε αυτό τα στοιχεία για το αθροιστικό κόστος της ενοικίασης του πούλμαν σύμφωνα με την Β' Προσφορά. Να γράψεις τον κατάλληλο τύπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία αυτά.
   Απάντηση: Ο τύπος είναι $y=192x$.
4. Ποιο είναι το οικονομικότερο σχέδιο για το ταξίδι της μιας εβδομάδας; Πώς μπορεί η ταμίας να το καταλάβει, κοιτώντας το διάγραμμα; Εσύ τι θα νοίκιαζες, τα δύο μικρά αυτοκίνητα ή το πούλμαν; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.
   Απάντηση: Για το ταξίδι μιας εβδομάδας συμφέρει η Α' Προσφορά.
5. Κάποιος θέτει την ιδέα ότι σε κάποια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια του ταξιδιού τα αθροιστικά έξοδα που αντιστοιχούν στις δύο προσφορές ενοικιάσεων, μπορεί να είναι ίδια. Πιστεύεις ότι αυτό αληθεύει; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου, χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Γράφημα' του Function Probe και να το αποδείξεις αλγεβρικά στο τετράδιό σου.
   Απάντηση: Η εικασία αυτή αληθεύει σε περίπτωση που το ταξίδι διαρκεί 4 ημέρες.

Ομάδα Β: Εκθετική / Λογαριθμική Συνάρτηση

5. Ο πολλαπλασιασμός των βακτηριδίων

Σύντομη Περιγραφή

Οι μαθητές καλούνται να παίξουν το ρόλο ενός βιολόγου που ενδιαφέρεται να υπολογίσει τον πληθυσμό ενός νέου είδους βακτηριδίων, τα οποία υπάρχουν σε μια καλλιέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο, έχοντας παρατηρήσει ότι ο ρυθμός αύξησής τους είναι σταθερός.

Ο πληθυσμός των βακτηριδίων ακολουθεί το νόμο της εκθετικής μεταβολής, εφόσον ο ρυθμός αύξησης των βακτηριδίων είναι σταθερός. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τον τύπο αυτό, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουν, για να υπολογίσουν τον πληθυσμό των βακτηριδίων.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί μια κλασική εφαρμογή του νόμου της εκθετικής μεταβολής που διδάσκεται στη Β΄ Λυκείου. Μπορεί να δοθεί στους μαθητές σαν εφαρμογή και περαιτέρω διερεύνηση του εκθετικού νόμου για διαφορετικές τιμές του ρυθμού αύξησης ενός πληθυσμού.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- Να εφαρμόζουν το νόμο της εκθετικής μεταβολής σε πραγματικές καταστάσεις.
- Να συνδέσουν τον πληθυσμό των βακτηριδίων με το ρυθμό αύξησής τους.
- Να δουν τι επιπτώσεις έχουν στη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης οι αλλαγές του ρυθμού αύξησης ενός πληθυσμού.
- Να προσεγγίζουν τη λύση ενός προβλήματος από τη γραφική παράσταση και να επαληθεύουν τη λύση αυτή από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.
- Να διαπιστώσουν την αναδρομικότητα του εκθετικού νόμου.

Παρατηρήσεις

1. Στο ερώτημα 1 οι μαθητές θα απαντήσουν στο τετράδιό τους βοηθούμενοι στις πράξεις τους από την ‘Αριθμομηχανή’.
2. Στο ερώτημα 2 προτείνεται να γράφουν οι μαθητές στη δεύτερη στήλη του πίνακα και τη διαδικασία των αριθμητικών πράξεων που τους οδηγεί στο αποτέλεσμα, έτσι ώστε να παρατηρήσουν την αναδρομικότητα του εκθετικού νόμου.
3. Στο ερώτημα 3 προτείνεται στους μαθητές να δημιουργήσουν τον πίνακα του ερωτήματος 2 (βλέπε εικόνα 1) στο παράθυρο ‘Πίνακας’ του λογισμικού Function Probe, έτσι ώστε να σταλούν τα σημεία στο παράθυρο ‘Γράφημα’.
4. Στο ερώτημα 4, για να είναι ορατά τα σημεία στη γραφική παράσταση να χρησιμοποιηθεί η εντολή ‘Αλλαγή κλίμακας’ στο μενού ‘Γράφημα’.
5. Στο ερώτημα 5 πρέπει να δοθεί προσοχή στο γεγονός ότι σαν μονάδα χρόνου παίρνουμε τα 10

λεπτά και όχι το ένα λεπτό. Άρα ο τύπος που συνδέει τον αριθμό βακτηριδίων στη μονάδα του χρόνου γίνεται $K=100(1+10/100)^{x/10}$.

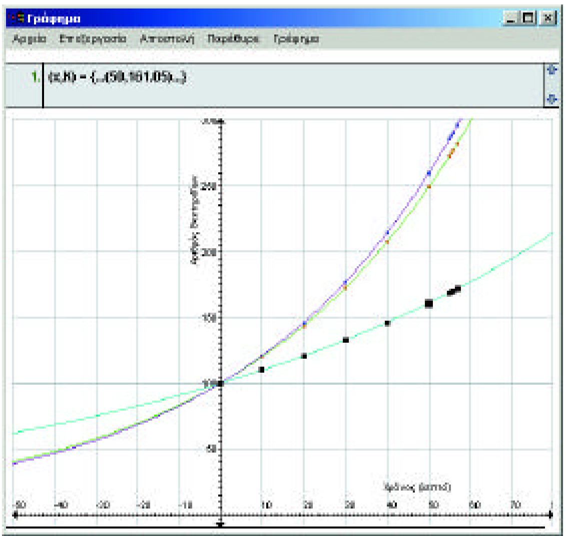
6. Στο ερώτημα 6, για να φαίνονται όλα τα σημεία, πρέπει να γίνει κατάλληλα η αρίθμηση των αξόνων. Προτείνεται οι μαθητές να εξηγήσουν γιατί η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία που προϋπήρχαν (βλέπε εικόνα 2).
7. Στο ερώτημα 7 καλούνται οι μαθητές να βρουν την απάντηση στο ερώτημα από τη γραφική παράσταση και μετά να την επαληθεύσουν από τον πίνακα. Επιλέγουν το εικονίδιο δείκτη σημείου για να δουν τις συντεταγμένες του σημείου. Με τον τρόπο αυτό συνδέουν τις δυο αναπαραστάσεις μεταξύ τους και κατανοούν ότι η γραφική επίλυση είναι προσεγγιστική, ενώ η αλγεβρική ακριβής.
8. Στο ερώτημα 8 πρέπει οι μαθητές να καταλάβουν τι αλλάζει στον τύπο που υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων. Αλλάζει η μονάδα του χρόνου, που αντί για 10 λεπτά γίνεται 5 (ο τύπος γίνεται $M=100(1+10/100)^{x/5}$). Η γραφική παράσταση του νέου τύπου έχει πιο απότομη κλίση, διότι ο εκθέτης έχει αυξηθεί.
9. Στο ερώτημα 10 οι μαθητές καλούνται να τροποποιήσουν τον αρχικό τύπο $K=100(1+10/100)^{x/10}$ σύμφωνα με το νέο ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού. Ένα στιγμιότυπο από τις τελικές οθόνες των παραθύρων ‘Πίνακας’ και ‘Γράφημα’ δίνεται στα παρακάτω σχήματα:

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	Αριθμός Βακτηριδίων	K=100(1+10/100)^(x/10) Υπολογισμός Βακτηριδίων	M=100(1+10/100)^(x/5) Υπολογισμός Βακτηριδίων	N=100(1+20/100)^(x/10) Υπολογισμός Βακτηριδίων
0	100	100	100	100
10	110	110	121	120
20	121	121	146.41	144
30	133	133.1	177.16	172.8
40	146	146.41	214.36	207.36
50	161	161.05	259.37	248.83
55		168.91	285.31	272.58
55.5		169.72	288.04	275.08
56		170.53	290.8	277.6
57		172.16	296.4	282.7

εικόνα 1



εικόνα 2

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Ένας βιολόγος ενδιαφέρεται να μελετήσει ένα νέο είδος βακτηριδίων. Όταν παρατηρεί για πρώτη φορά με το μικροσκόπιό του την καλλιέργεια των βακτηριδίων, μετράει 100 βακτηρίδια. Με προσεχτική και στενή παρακολούθηση της καλλιέργειας παρατηρεί ότι ο αριθμός των βακτηριδίων αυξάνει κατά 10% κάθε 10 λεπτά.
Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σου.

1. Ποιος είναι ο αριθμός των βακτηριδίων τα πρώτα 10 λεπτά;
   *Απάντηση: Ο αριθμός των βακτηριδίων είναι 100+0,1*100=110*
2. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Σαν χρόνο 0 θεώρησε τη χρονική στιγμή που ο βιολόγος παρατήρησε για πρώτη φορά τα βακτηρίδια.

Χρόνος σε λεπτά	**Αριθμός βακτηρίων**
0	*100*
10	*110*
20	*121*
30	*133*
40	*146*
50	*161*

3. Δημιούργησε έναν πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας', που να περιέχει δυο στήλες. Στην πρώτη, που θα την ονομάσεις 'Χρόνος', να εισαγάγεις τον αριθμό των λεπτών, ξεκινώντας από το 0 μέχρι το 50 με βήμα 10 και στη δεύτερη στήλη, που θα την ονομάσεις 'Αριθμός Βακτηριδίων', να εισαγάγεις τον αριθμό των βακτηριδίων στον αντίστοιχο χρόνο με βάση τον πίνακα που συμπλήρωσες στο προηγούμενο ερώτημα.
4. Στείλε τις δύο αυτές στήλες στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν τα σημεία δεν φαίνονται, διόρθωσε το πρόβλημα, ώστε να είναι ορατά. Τι παρατηρείς; Τι είδους μεταβολή ακολουθούν οι δύο μεταβλητές (γραμμική, εκθετική, λογαριθμική κτλ);
5. Προσπάθησε να δημιουργήσεις μια τρίτη στήλη στο παράθυρο 'Πίνακας' που να τη ονομάσεις 'Υπολογισμός Βακτηριδίων' και η οποία να γεμίζει με βάση τον τύπο που νομίζεις ότι συνδέει το χρόνο (ανά 10 λεπτά) και τον αριθμό των βακτηριδίων.
   Απάντηση: $K=100(1+10/100)^{(x/10)}$
6. Πληκτρολόγησε τον τύπο αυτό στο παράθυρο 'Γράφημα'.
7. Με βάση τη γραφική παράσταση, μετά από πόση ώρα υπήρχαν στην καλλιέργεια λιγότερα από 200 βακτηρίδια; Επίλεξε το κατάλληλο εργαλείο (Εργαλείο δείκτη σημείου) για να δεις τις συντεταγμένες του σημείου. Επαλήθευσέ το και στο παράθυρο 'Πίνακας'.
8. Αργότερα, ο βιολόγος ανακάλυψε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 5 λεπτά και όχι κάθε 10. Εντούτοις, τα βακτηρίδια εξακολουθούν να αυξάνονται κατά 10% κάθε 10 λεπτά. Να δημιουργήσεις στο παράθυρο 'Πίνακας' μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;
   Απάντηση: $K=100(1+10/100)^{(x/5)}$

9. Στο παράθυρο ‘Γράφημα’ κάνε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείς σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;
10. Αν, αντίθετα με τα προηγούμενα, ο βιολόγος ανακάλυπτε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 10 λεπτά, αλλά παράγονται 20% βακτηρίδια κάθε 10 λεπτά, να δημιουργήσεις στο παράθυρο ‘Πίνακας’ μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτή την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;
    Απάντηση: $K=100(1+20/100)^{(x/10)}$
11. Στο παράθυρο ‘Γράφημα’ κάνε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείς σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;

6. Η αύξηση του πληθυσμού

Σύντομη Περιγραφή
Οι μαθητές καλούνται, με βάση τα δεδομένα που τους δίνονται για τον παγκόσμιο πληθυσμό και τον πληθυσμό της Ασίας, να μελετήσουν το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Γης και της Ασίας αντίστοιχα, και να προβλέψουν την αύξηση του πληθυσμού τα επόμενα χρόνια.
Οι μαθητές σε αυτό το πρόβλημα δουλεύουν μόνο στο παράθυρο ‘Πίνακας’, στον οποίο δημιουργούν διάφορες εξαρτημένες στήλες τις οποίες συγκρίνουν μεταξύ τους, για να οδηγηθούν στις ιδιότητες του εκθετικού νόμου.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Το πρόβλημα αυτό προτείνεται να διδαχθεί σαν εισαγωγή στη διδασκαλία του νόμου της εκθετικής μεταβολής. Είναι έτσι σχεδιασμένο, ώστε να εστιάζει στην κατανόηση του νόμου της εκθετικής μεταβολής, που είναι ο εξής: ένα ποσό μεταβάλλεται εκθετικά, όταν αυξάνεται ή ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό. Η όλη διερεύνηση του προβλήματος στοχεύει στο να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαφορά της εκθετικής μεταβολής από άλλες μεταβολές, όπως αύξηση ή μείωση κατά σταθερή ποσότητα.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
- Να κατανοήσουν τι σημαίνει ότι ένα μέγεθος αυξάνεται εκθετικά.
- Να διακρίνουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο μιας εκθετικής συνάρτησης, όταν αλλάζει μόνο η τιμή του αρχικού πληθυσμού.
- Να κατασκευάζουν τον τύπο που εκφράζει την εκθετική μεταβολή ενός μεγέθους (πληθυσμός).
- Να κατανοήσουν τη διαφορά μεταξύ του ρυθμού αύξησης ενός μεγέθους και του ποσού της αύξησης.
- Να παρατηρήσουν ότι αν δυο μεταβλητές μεταβάλλονται εκθετικά με τον ίδιο ρυθμό, τότε και οι λόγοι των τιμών τους θα είναι ίδιοι.

Παρατηρήσεις

1. Να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη διαφορά ανάμεσα στο ρυθμό αύξησης του πληθυσμού και στο ποσό της αύξησής τους, που γίνεται φανερό με τις στήλες ‘Λόγος’ και ‘Διαφορά’ του παραθύρου ‘Πίνακας’ (βλέπε εικόνα 1). Έτσι, ενώ ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι σταθερός (και ίσος με 1.02), το ποσό αύξησης δεν είναι.
2. Στο ερώτημα 3 να δοθεί έμφαση στην αναδρομικότητα του τύπου της εκθετικής μεταβολής. Η επόμενη τιμή βρίσκεται από την προηγούμενη πολλαπλασιασμένη κατά μια σταθερή ποσότητα. Προτείνεται να γίνει χρήση της δυνατότητας να υπολογίζεται η τιμή ενός κελιού με βάση την τιμή του προηγούμενου κελιού.

3. Στο ερώτημα 6 ουσιαστικά οι μαθητές καλούνται να βρουν τον τύπο που συνδέει τον πληθυσμό της Γης με το χρόνο. Θεωρείται το 1984 σαν έτος 0 το 1985 σαν 1 κτλ., για να βοηθηθούν οι μαθητές στην κατασκευή του τύπου (ο τύπος είναι: $K=4766000000(1.02)^x$).
4. Στο ερώτημα 7 ζητείται το ανάλογο για τον πληθυσμό της Ασίας.
5. Στο ερώτημα 8 ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν τους δύο πληθυσμούς και να διαπιστώσουν ότι οι λόγοι τους είναι ίσοι (βλέπε εικόνα 2). Η σύγκριση θα γίνει με τη δημιουργία μιας νέας στήλης που θα υπολογίζει το λόγο της στήλης του παγκόσμιου πληθυσμού προς τη στήλη του πληθυσμού της Ασίας. Προτείνεται το αποτέλεσμα να αποδειχθεί και αλγεβρικά με βάση τους τύπους των δυο πληθυσμών.

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

a Πληθυσμός Γης	®a Λόγος	Δa Διαφορά	c Πληθυσμός Ασίας	®c Λόγος
4.766e+9			2.785e+9	
4.86132e+9	> 1.02	> 95320000	2.8407e+9	> 1.02
4.9585464e+9	> 1.02	> 97226400	2.89751e+9	> 1.02
5.05771732e+9	> 1.02	> 99170920	2.95546428e+9	> 1.02
5.15887167e+9	> 1.02	> 101154350	3.01457357e+9	> 1.02
5.26204911e+9	> 1.02	> 103177440	3.07486504e+9	> 1.02
5.36729009e+9	> 1.02	> 105240980	3.13633234e+9	> 1.02

εικόνα 1

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x Αριθμός ετών μετά το 1984	K=4766000000*((1.02)^x) Υπολογισμός του πληθυσμού της Γης ως το 2000	M=2785000000*(1.02)^x Υπολογισμός του πληθυσμού της Ασίας ως το 2000	L=K/M Σύγκριση των δύο πληθυσμών
0	4.766e+9	2.785e+9	1.71
1	4.86132e+9	2.8407e+9	1.71
2	4.9585464e+9	2.897514e+9	1.71
3	5.05771733e+9	2.95546428e+9	1.71
4	5.15887167e+9	3.01457357e+9	1.71
5	5.26204911e+9	3.07486504e+9	1.71
6	5.36729009e+9	3.13636234e+9	1.71
7	5.47463589e+9	3.19908958e+9	1.71
8	5.58412861e+9	3.26307138e+9	1.71
9	5.69581118e+9	3.3283328e+9	1.71
10	5.80972741e+9	3.39489946e+9	1.71
11	5.92592195e+9	3.46279745e+9	1.71
12	6.04444039e+9	3.5320534e+9	1.71
13	6.1653292e+9	3.60269447e+9	1.71
14	6.28863578e+9	3.67474836e+9	1.71
15	6.4144085e+9	3.74824332e+9	1.71
16	6.54269667e+9	3.82320819e+9	1.71

εικόνα 2

Το πρόβλημα επιδέχεται επεκτάσεις χρησιμοποιώντας και το παράθυρο ‘Γράφημα’ αλλά δεν προτείνεται, διότι χρησιμοποιούνται πολύ μεγάλα νούμερα και οι γραφικές παραστάσεις των πληθυσμών γης και Ασίας δεν παριστάνονται ικανοποιητικά. Η δραστηριότητα 20 καλύπτει αυτήν ακριβώς την έλλειψη, προτρέποντας τους μαθητές να εργαστούν στο παράθυρο ‘Γράφημα’ μετασχηματίζοντας κατάλληλα διάφορες γραφικές παραστάσεις της εκθετικής μεταβολής.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Στην έκδοση ενός αμερικάνικου περιοδικού για το 1991 παρουσιάζονται τα ακόλουθα δεδομένα για τον παγκόσμιο πληθυσμό (σε δις) μέσα σε διάστημα 7 χρόνων (1984-1990):

Έτη	Παγκόσμιος πληθυσμός
1984	4,766
1985	4,86132
1986	4,9585464
1987	5,05771733
1988	5,15887167
1989	5,26204911
1990	5,36729009

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο ‘Αριθμομηχανή’ για τις πράξεις σου.

1. Άνοιξε το παράθυρο ‘Πίνακας’. Σε μια στήλη βάλε τους πληθυσμούς που δίνονται πιο πάνω ανοίγοντάς την τόσο όσο να φαίνονται ολόκληροι οι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας την εντολή ‘Διαφορά’ στο μενού ‘Πίνακας’ βρες πόσο μεταβλήθηκε ο παγκόσμιος πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Συγκρίνοντας τις μεταβολές σε ποιο συμπέρασμα οδηγείσαι;
   Απάντηση: Οι διαφορές αυξάνουν, αλλά όχι με σταθερό ρυθμό.
2. Χρησιμοποιώντας την εντολή ‘Λόγος’ στο μενού ‘Πίνακας’ βρες με ποιο ρυθμό αυξήθηκε ο πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Τι παρατηρείς;
   Απάντηση: Ο λόγος είναι σταθερός και ίσος με 1,02.
3. Ποιος προβλέπεις να είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός το 1991; Να εξηγήσεις με ποιον τρόπο υπολόγισες την απάντησή σου και να τον αιτιολογήσεις.
   *Απάντηση: Πληθυσμός=5,36729009*1,02=5,4746358918 δισ.*

Το ίδιο περιοδικό εκδίδει ακόμα τα ακόλουθα στοιχεία για τον πληθυσμό της Ασίας την ίδια χρονική περίοδο:

Έτη	Πληθυσμός Ασίας
1984	2,785
1985	2,8407
1986	2,897514
1987	2,95546428
1988	3,01457357
1989	3,07486504
1990	3,13636234

4. Να χρησιμοποιήσεις την εντολή ‘Λόγος’ στο μενού ‘Πίνακας’, για να υπολογίσεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας, όπως έκανες για τον πληθυσμό της Ευρώπης. Να συγκρίνεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας με τον παγκόσμιο για τα χρόνια 1984-1990.

   Απάντηση: Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Ασίας είναι ίδιος με αυτόν του παγκόσμιου πληθυσμού, δηλαδή 1,02.
5. Ποιος προβλέπεις να είναι ο πληθυσμός της Ασίας το 1991; Να εξηγήσεις με ποιο τρόπο χρησιμοποίησες το Function Probe, για να δώσεις την απάντησή σου.

   Απάντηση: Ο πληθυσμός θα είναι 3,13636234*1,02= 3,19908958 δισ.
6. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Γης παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα δέκα χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακα σου δημιουργώντας άλλες δύο εξαρτημένες στήλες, όπου στην πρώτη στήλη θα εισαγάγεις τον αριθμό των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000, και στη δεύτερη στήλη θα εισαγάγεις έναν τύπο που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως 2000 συναρτήσει της πρώτης στήλης.
7. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Ασίας παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα δέκα χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακά σου δημιουργώντας άλλη μια εξαρτημένη στήλη που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως 2000 συναρτήσει του αριθμού των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000.
8. Με τα δεδομένα του έτους 1984, πόσες φορές μεγαλύτερος ήταν ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Με τις τιμές που υπολόγισες για το έτος 2000, πόσες φορές μεγαλύτερος θα είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Εξήγησε το αποτέλεσμα.

   Απάντηση: Και για τα δύο έτη, ο λόγος των δύο πληθυσμών είναι σταθερός και ίσος με 1,71.

7. Επένδυση χρημάτων

Σύντομη Περιγραφή
Δυο φίλοι κατέθεσαν το ίδιο ποσό χρημάτων στην τράπεζα αλλά διαχειρίζονται τους τόκους τους με διαφορετικό τρόπο. Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν ποιος καταθέτης έχει τα περισσότερα χρήματα μετά από 20 χρόνια και γιατί.

΄Ενταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Προτείνεται να διδαχθεί στο κεφάλαιο της εκθετικής συνάρτησης στη Β΄ Λυκείου.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
- Να κατασκευάσουν τον τύπο μιας εκθετικής μεταβολής.
- Να διακρίνουν τη διαφορά της αύξησης των τιμών ανάμεσα στην εκθετική και γραμμική συνάρτηση.
- Να βρίσκουν τη λύση ενός προβλήματος από τη γραφική παράσταση.

Παρατηρήσεις

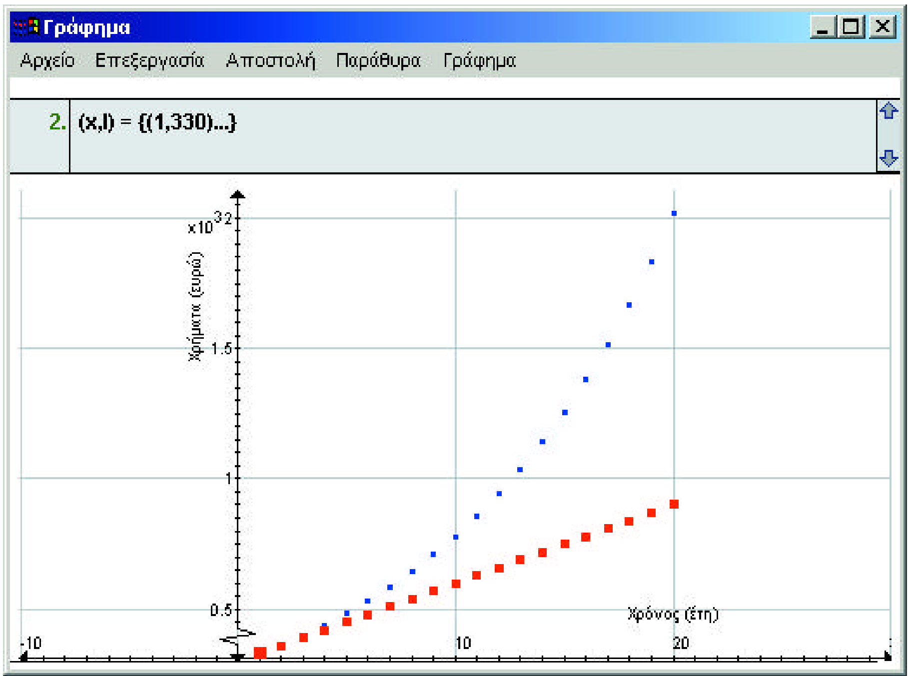
1. Τα δυο πρώτα υποερωτήματα θα απαντηθούν στο τετράδιο. Οι μαθητές μπορούν να βοηθηθούν στις πράξεις τους από την ‘Αριθμομηχανή’. Να προσεχτεί ιδιαίτερα ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται τα χρήματα των δυο καταθετών. Στον πρώτο καταθέτη τα χρήματα υπολογίζονται από μια εκθετική συνάρτηση ($k=300*(1.1)^x$) ενώ στο δεύτερο καταθέτη από τη γραμμική ($y=300+30x$).
2. Στο ερώτημα 2 να χρησιμοποιηθεί η δυνατότητα κατασκευής εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο ‘Πίνακας’ (βλέπε εικόνα 1).
3. Στο παράθυρο ‘Γράφημα’ να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στα δυο γραφήματα. Στην εκθετική συνάρτηση οι τιμές αυξάνονται πιο απότομα από ότι στη γραμμική (βλέπε εικόνα 2).
4. Στο ερώτημα 4 οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν με βάση τη γραφική παράσταση. Καλούνται να βρουν αν αληθεύει η εικασία αυτή με το εργαλείο που δίνει τις συντεταγμένες σημείων, δηλαδή το εικονίδιο δείκτη σημείου.
5. Στην τελευταία ερώτηση η απόκλιση των ποσών οφείλεται στους διαφορετικούς τύπους που ακολουθούν τα ποσά των δυο καταθετών. Να δειχτεί και γραφικά η διαφορά των δυο ποσών τη χρονιά αυτή (ποιο τμήμα στη γραφική παράσταση την παριστάνει).

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x	k=300*(1.1)^x Χρήματα Α καταθέτη (ευρώ)	l=300+30x Χρήματα Β καταθέτη (ευρώ)
1	330	330
2	363	360
3	399.3	390
4	439.23	420
5	483.15	450
6	531.47	480
7	584.62	510
8	643.08	540
9	707.38	570
10	778.12	600
11	855.94	630
12	941.53	660
13	1035.68	690
14	1139.25	720
15	1253.17	750
16	1378.49	780
17	1516.34	810
18	1667.98	840
19	1834.77	870
20	2018.25	900

εικόνα 1



εικόνα 2

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Κάποιος κατέθεσε στην τράπεζα 300 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 10% και μην έχοντας οικονομικές ανάγκες δεν έκανε καμία κίνηση των χρημάτων αυτών για 20 χρόνια. Ένας φίλος του όμως, ενώ κατέθεσε και εκείνος το ίδιο ποσό με το ίδιο επιτόκιο, έπαιρνε στο τέλος κάθε χρόνου τον τόκο που του έδινε η τράπεζα χωρίς να μετακινήσει το αρχικό του ποσό.

1. α) Ποιος ήταν ο τόκος που έδινε η τράπεζα μετά από 1, 2, 3, 4 χρόνια στον κάθε ένα από τους δυο παραπάνω καταθέτες; β) Να υπολογίσεις τα χρήματα του καθενός καταθέτη τα παραπάνω χρόνια. Υπόθεσε ότι ο δεύτερος καταθέτης κρατάει τους τόκους που παίρνει κάθε χρόνο από την τράπεζα και έτσι συνυπολόγισέ τους στα χρήματά του. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις την ‘Αριθμομηχανή’ για να κάνεις τους υπολογισμούς σου.

	Καταθέτης Α (ευρώ)		Καταθέτης Β (ευρώ)	
Χρόνια	**Τόκος**	**Χρήματα**	**Τόκος**	**Χρήματα**
1	*30*	*330*	*30*	*330*
2	*33*	*363*	*30*	*360*
3	*36,3*	*399,3*	*30*	*390*
4	*39,93*	*439,23*	*30*	*420*

2. Να κατασκευάσεις τρεις στήλες στο παράθυρο ‘Πίνακας’ που να αναπαριστούν τα χρήματα και των δυο καταθετών σε 20 χρόνια συναρτήσει του χρόνου με τη βοήθεια των κατάλληλων τύπων. Η μια στήλη θα είναι ο χρόνος σε χρόνια και οι άλλες δύο τα χρήματα των δύο καταθετών συναρτήσει του χρόνου.
3. Στείλε τις παραπάνω στήλες στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Τι παρατηρείς;
   Απάντηση: Η μία συνάρτηση είναι γραμμική και η άλλη εκθετική.
4. Ένας άλλος φίλος τους ισχυρίζεται ότι με το ρυθμό που αυξάνεται το ποσό, σύντομα τα χρήματα του πρώτου καταθέτη θα ξεπεράσουν τα 1500 ευρώ. Έλεγξε από τη γραφική παράσταση την εικασία αυτή. Ποια χρονιά θα συμβεί αυτό;
   Απάντηση: Τη 17η χρονιά.
5. Ποια θα είναι τα χρήματα του δεύτερου καταθέτη τη χρονιά αυτή; Πού οφείλεται η μεγάλη απόκλιση των ποσών;
   Απάντηση: Τη χρονιά εκείνη τα χρήματα του δεύτερου καταθέτη θα είναι 810 ευρώ. Η μεγάλη απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι ο ρυθμός αύξησης στην εκθετική συνάρτηση είναι πολύ μεγαλύτερος από το ρυθμό αύξησης στη γραμμική συνάρτηση.

8. Μετασχηματισμοί στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Σύντομη Περιγραφή

Οι μαθητές καλούνται να μετασχηματίσουν τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης δουλεύοντας στο παράθυρο ‘Γράφημα’ με στόχο τη μελέτη τους ως προς τη μονοτονία, τις συμμετρίες ως προς τους δυο άξονες και τη διαγώνιο της πρώτης γωνίας των αξόνων, καθώς και τη σχέση μεταξύ τους.
Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να επεκταθεί ανάλογα με το πού ο διδάσκοντας θέλει να δώσει έμφαση (π.χ. να προστεθούν και άλλα ερωτήματα σχετικά με τη μονοτονία κτλ.).

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται να διδαχθεί στο κεφάλαιο της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης στη Β΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα η μελέτη των δυο συναρτήσεων (μονοτονία, συμμετρίες, μετασχηματισμοί) που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του παραθύρου ‘Γράφημα’, όπως δείχνεται σε αυτή τη δραστηριότητα. Στο περιβάλλον του προγράμματος οι μαθητές μπορούν, αν εκτελέσουν οι ίδιοι τους μετασχηματισμούς της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, να δουν τις αλλαγές που επιφέρουν στον τύπο της και ύστερα να αποδείξουν αλγεβρικά τα συμπεράσματα που βρήκαν.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3-4 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν το ρόλο του ‘α’ στην εκθετική συνάρτηση α^x, τι επίπτωση έχει δηλαδή η αλλαγή του συντελεστή ‘α’ στη γραφική παράσταση της εκθετικής.
- Να δουν ότι η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφες και άρα συμμετρικές ως προς τη διαγώνιο της γωνίας των αξόνων.
- Να διακρίνουν τη μονοτονία της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης σε σχέση με το α^x (α^x, $\log_a x$).
- Να μετασχηματίσουν (μετατόπιση ως προς τους δυο άξονες, εύρεση συμμετρικού ως προς τους δυο άξονες) τη γραφική παράσταση της εκθετικής και λογαριθμικής και να μελετήσουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο της.

Παρατηρήσεις

1. Στο Α’ μέρος μελετάται η εκθετική συνάρτηση. Προτείνεται οι μαθητές να χειριστούν τη γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης ($y=2^x$) και να μελετήσουν τη μονοτονία, τη συμμετρία, την κλίση της καμπύλης και τις μετατοπίσεις της ως προς τους δυο άξονες.
2. Στο πρώτο ερώτημα προτείνεται, για τον έλεγχο της μονοτονίας και της συμμετρίας των δυο γραφικών παραστάσεων, να γίνει επιλογή μερικών σημείων και από τις δυο γραφικές παραστάσεις (με την εντολή ‘Σύνολο σημείων’ από το υπομενού ‘Δείγμα από καμπύλη’ ως προς τον άξονα των y) και να σταλούν οι συντεταγμένες τους στο παράθυρο ‘Πίνακας’. Έτσι,

είναι δυνατή η παρατήρηση των τιμών της y όταν αυξάνει η x (βλέπε εικόνα 1).

3. Στα ερωτήματα 2-5 προτείνεται οι μαθητές να εκτελούν πρώτα τους μετασχηματισμούς και μετά να εικάζουν για το ποιος θα είναι ο τύπος της μετασχηματισμένης γραφικής παράστασης. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει να ελεγχθεί αν είναι επιλεγμένη η ρύθμιση ‘Απόκρυψη όλων’ στο παράθυρο διαλόγου ‘Επιλογές παραθύρου Γραφήματος’ το οποίο ενεργοποιείται από το μενού ‘Γράφημα’. Η επιλογή ‘Εμφάνιση μετασχηματισμών’ εμφανίζει στο πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού τους τύπους των μετασχηματισμένων γραφικών παραστάσεων.
4. Στο Β’ Μέρος οι μαθητές καλούνται να βρουν τη συμμετρική γραφική παράσταση της $y=2^x$ ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων και να μελετήσουν, όπως πριν, τη νέα συνάρτηση (δηλ. τη λογαριθμική). Να τονιστεί η σχέση που έχουν οι δύο συναρτήσεις μεταξύ τους (αντίστροφες), με βάση τη γραφική τους παράσταση.

x Οριζόντια	y Κάθετα	X Οριζόντια	Y Κάθετα
-1	0.5	1	0.5
0.12	1.08	-0.12	1.08
0.74	1.67	-0.74	1.67
1.17	2.25	-1.17	2.25
1.5	2.83	-1.5	2.83
1.77	3.42	-1.77	3.42
2	4	-2	4

εικόνα 1

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α’ μέρος

1. Άνοιξε το παράθυρο ‘Γράφημα’ και να εισαγάγεις τον τύπο $y=2^x$ στο ‘Πλαίσιο Τύπων’ (πρόσεξε ότι πρέπει να πληκτρολογήσεις y=2 ^ x. Για περισσότερες οδηγίες βλέπε το Εγχειρίδιο Χρήστη στη σελίδα 44). Στο ίδιο παράθυρο να εισαγάγεις και τον τύπο $y=(1/2)^x$.
   Α) Επίλεξε μερικά σημεία ως προς τον άξονα των y και από τις δύο γραφικές παραστάσεις και στείλε τα στο παράθυρο ‘Πίνακας’. Για να επιλέξεις σημεία, ενεργοποίησε την κάθε γραφική παράσταση κάνοντας κλικ πάνω της, και στη συνέχεια επίλεξε τυχαία σημεία ως προς τον άξονα y με την εντολή ‘Σύνολο σημείων’ από το υπομενού ‘Δείγμα από καμπύλη’ του μενού ‘Γράφημα’. Τι παρατηρείς σχετικά με τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων; Επαληθεύεις το ίδιο γραφικά; Με ποιο μετασχηματισμό θα μπορούσες να ταυτίσεις τη μια γραφική παράσταση με την άλλη;
2. Απάλειψε από το παράθυρο ‘Γράφημα’ όλες τις γραφικές παραστάσεις εκτός από την $y=2^x$ (επιλέγοντας τις κατάλληλες εντολές από το μενού ‘Επεξεργασία’). Έπειτα σχημάτισε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=3^x$, $y=4^x$ και $y=5^x$ εισαγάγοντας τους αντίστοιχους τύπους. Τι παρατηρείς σχετικά με την κλίση των καμπυλών;
3. Να μετακινήσεις τη γραφική παράσταση της $y=2^x$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα των y (εργαλείο μετατόπισης). Ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;

4. Να μετακινήσεις τη γραφική παράσταση της $y=2^x$ κατά 3 μονάδες δεξιά στον άξονα των x. Ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;
5. Να κάνεις στο τετράδιό σου τη γραφική παράσταση της $y=2^{x-3}+2$. Επαλήθευσε το σχήμα σου στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Ποιους μετασχηματισμούς θα έκανες στην $y=2^x$, για να ταυτιστεί με την $y=2^{x-3}+2$; Επίλεξε το κατάλληλο εργαλείο από την εργαλειοθήκη του παραθύρου ‘Γράφημα’ ενεργοποίησέ το όσες φορές χρειαστεί.

Β΄ μέρος

1. Καθάρισε το παράθυρο ‘Γράφημα’ με τις κατάλληλες εντολές από το μενού ‘Επεξεργασία’. Σχημάτισε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2^x$ και βρες τη συμμετρική της ως προς τη διχοτόμο των αξόνων με τη χρήση του εργαλείου συμμετρίας. Ποια συνάρτηση νομίζεις ότι είναι; Τι σχέση έχουν οι δύο συναρτήσεις; Για να βοηθηθείς, ενεργοποίησε το εικονίδιο δείκτη σημείου, το οποίο δείχνει τις συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης, επίλεξε μερικά σημεία και από τις δυο γραφικές παραστάσεις, στείλε τα στο παράθυρο ‘Πίνακας’ και βρες τι σχέση έχουν. Ποια είναι η σχέση τους ως προς τη μονοτονία;
2. Με το εργαλείο μετατόπισης, μετακίνησε τη νέα συνάρτηση κατά 3 μονάδες δεξιά στον άξονα των x. Πώς θα μεταβληθεί ο τύπος της;
3. Με το εργαλείο μετατόπισης, μετακίνησε τη συνάρτηση αυτή κατά 2 μονάδες στον άξονα των y προς τα πάνω. Τι νομίζεις ότι θα αλλάξει στον τύπο της;

Ομάδα Γ: Δευτεροβάθμιες Συναρτήσεις

9. Ο Πύραυλος

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Ο Πύραυλος είναι μια δραστηριότητα που δίνει στους μαθητές την ευκαιρία: α) να αντιστοιχίσουν τους τύπους της Φυσικής, που χρησιμοποιούνται στην ελεύθερη βολή, με συναρτήσεις που πραγματεύονται στα Μαθηματικά β) να αντιληφθούν ότι η μελέτη της τροχιάς και της ταχύτητας ενός σώματος σε ελεύθερη βολή γίνεται με τη βοήθεια των αντίστοιχων συναρτήσεων της μορφής $y=αx^2+βx+γ$ και της $y=αx+β$ και γ) μέσα από τη μελέτη αυτή να αποφανθούν για τον τρόπο μεταβολής των τιμών των συναρτήσεων αυτών, καθώς και για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους στη συγκεκριμένη κατάσταση.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η δραστηριότητα μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στη διδασκαλία της συνάρτησης $y=αx^2+βx+γ$, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί στη Φυσική την ελεύθερη βολή.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

> Να μπορούν να αντιστοιχίσουν τους όρους των τύπων της ελεύθερης βολής με αυτούς των αντίστοιχων μαθηματικών συναρτήσεων.

> Να μπορούν να αποφανθούν για τον τρόπο μεταβολής των τιμών των συναρτήσεων $y=αx^2+βx+γ$ και $y=αx+β$ μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις τους (τύπος, πίνακας τιμών, γράφημα).

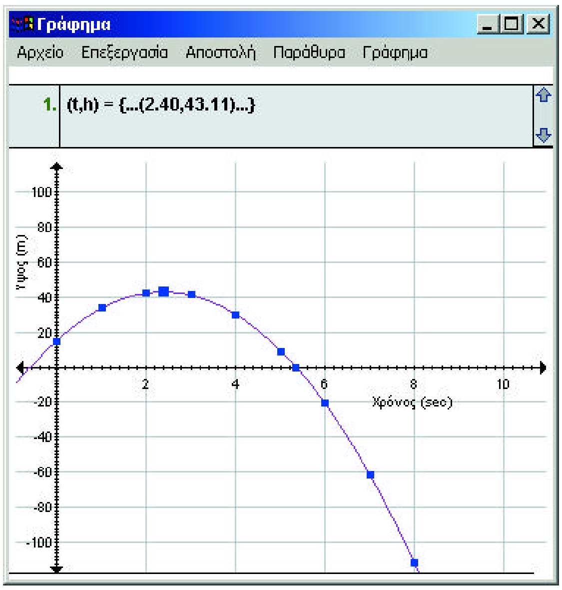
> Να αποφανθούν για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές των συναρτήσεων αυτών, καθώς και για το πότε συμβαίνουν.

> Να κατανοήσουν την αναγκαιότητα περιορισμού του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων αυτών στη συγκεκριμένη κατάσταση.

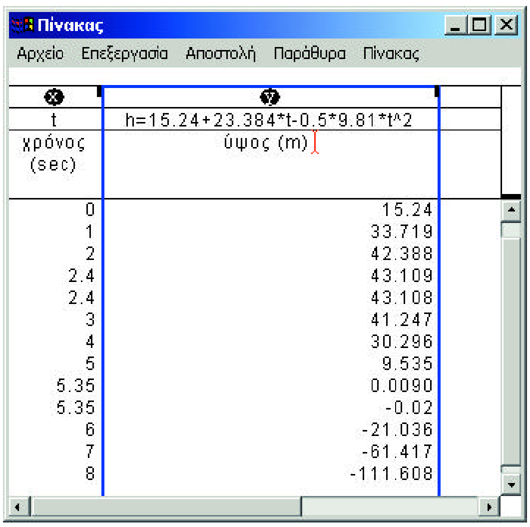
Παρατηρήσεις

1. Για τη δραστηριότητα αυτή προτείνεται η συνεργασία, εφόσον είναι δυνατή, με τον καθηγητή της Φυσικής, ώστε να υπάρξει μια πλήρης κάλυψη του θέματος. Καλό θα ήταν οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν το φαινόμενο και από την πλευρά της Φυσικής με το λογισμικό Modelus.
2. Στο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι τύποι της ελεύθερης βολής:
   α) $\mathbf{h=h_0+v_0 t-1/2gt^2}$, όπου h το ύψος του πυραύλου από το έδαφος κατά τη χρονική στιγμή t, v_0 η αρχική ταχύτητα του πυραύλου και g η επιτάχυνση της βαρύτητας ($g=9.81m/sec^2$).
   β) $\mathbf{v=v_0-gt}$, όπου v η ταχύτητα του πυραύλου κατά τη χρονική στιγμή t και v_0 η αρχική του ταχύτητα.

3. Προτείνεται να γίνει αρχικά μια συζήτηση μέσα στην τάξη για τους νόμους που διέπουν την ελεύθερη βολή, ή σε συνεννόηση με τον καθηγητή της Φυσικής, αυτό να έχει γίνει στην ώρα της Φυσικής.
4. Στα ερωτήματα 1 και 6 να δοθεί έμφαση στην αντιστοίχιση των όρων της $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τους όρους του τύπου $\mathbf{h=h_0+v_0\,t\text{-}1/2gt^2}$ (π.χ. $h_0=\gamma$, $x=t$, $v_0=\beta$ κτλ.) και της $y=\alpha x+\beta$ με τους όρους της $v=v_0\text{-}gt$.
5. Για την απάντηση του ερωτήματος 3, αρκεί οι μαθητές να εντοπίσουν ανάμεσα σε ποιες ακέραιες χρονικές στιγμές συμβαίνουν τα (α) και (β). Για το (α): ανάμεσα στο t=2 και t=3 και για το (β): ανάμεσα στο t=5 και t=6 (βλέπε εικόνα 1). Θα ήταν επίσης σκόπιμο να ζητηθεί από τους μαθητές να εξηγήσουν τι δείχνει το αρνητικό πρόσημο σε κάποιες τιμές στη στήλη του ύψους.
6. Για την απάντηση της ερώτησης 4 θα ήταν σκόπιμο οι μαθητές να ενθαρρυνθούν να χρησιμοποιήσουν την εντολή ‘Ενδιάμεσο γέμισμα’ από το μενού ‘Πίνακας’, ώστε να προσεγγίσουν σταδιακά τις απαντήσεις των ερωτήσεων (4α) και (4β). (Οι τιμές που προσεγγίζουν τις απαντήσεις φαίνονται στο παράθυρο ‘Πίνακας’ στην εικόνα 2.)
7. Στο ερώτημα 5 προτείνεται να ζητηθεί η ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Το ίδιο ισχύει και για το ερώτημα 7.
8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος 7 θα ήταν προτιμότερο να γίνει σε διαφορετικό γράφημα (όπως φαίνεται και στην εικόνα 3). Επίσης, προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να αιτιολογήσουν το αρνητικό πρόσημο που εμφανίζεται σε ορισμένες τιμές της ταχύτητας (εικόνα 4).
9. Η μέγιστη θετική ταχύτητα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t=0 και v=23,38 m/s, ενώ η μέγιστη αρνητική κατά την πρόσκρουση του πυραύλου στο έδαφος και είναι v=5,35 m/s.

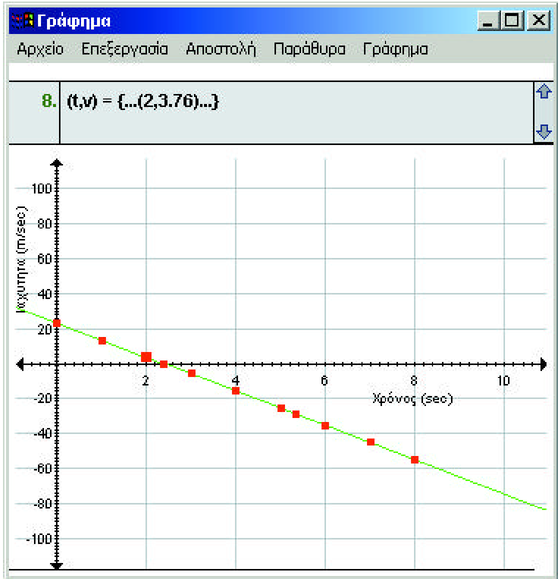


εικόνα 1

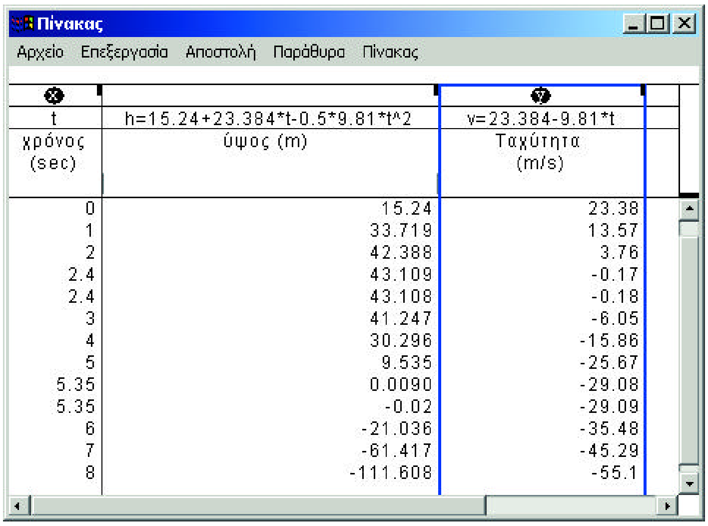

Πίνακας
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

t	h=15.24+23.384*t-0.5*9.81*t^2
χρόνος (sec)	ύψος (m)
0	15.24
1	33.719
2	42.388
2.4	43.109
2.4	43.108
3	41.247
4	30.296
5	9.535
5.35	0.0090
5.35	-0.02
6	-21.036
7	-61.417
8	-111.608

εικόνα 2



εικόνα 3



t χρόνος (sec)	h=15.24+23.384*t-0.5*9.81*t^2 ύψος (m)	v=23.384-9.81*t Ταχύτητα (m/s)
0	15.24	23.38
1	33.719	13.57
2	42.388	3.76
2.4	43.109	-0.17
2.4	43.108	-0.18
3	41.247	-6.05
4	30.296	-15.86
5	9.535	-25.67
5.35	0.0090	-29.08
5.35	-0.02	-29.09
6	-21.036	-35.48
7	-61.417	-45.29
8	-111.608	-55.1

εικόνα 4

10. Στην απόσταση h=30,48 m αντιστοιχούν 2 χρονικές στιγμές, μια κατά την άνοδο του πυραύλου και μια κατά την κάθοδό του : t=0,779 sec και t=3,989 sec. Το μέτρο της ταχύτητας και για τις δύο χρονικές στιγμές είναι v=15,74 m/s.

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων του φύλλου εργασίας έχουν ενσωματωθεί στις προηγούμενες παρατηρήσεις.)

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Ένας πρότυπος πύραυλος εκτοξεύεται από τη Γη. Τη στιγμή που σταματάει να καίει καύσιμα απέχει 15,24 m από το έδαφος και η ταχύτητά του είναι 23,384 m/sec με κατακόρυφη προς τα πάνω διεύθυνση. Εξακολουθεί να κινείται με αυτή τη διεύθυνση και στη συνέχεια, λόγω της δράσης της βαρύτητας, στρίβει και πέφτει στο έδαφος. Να χρησιμοποιήσεις το Function Probe για να μελετήσεις τη σχέση ανάμεσα στο ύψος του πυραύλου και το χρόνο, θεωρώντας ως αρχικό ύψος και αρχικό χρόνο το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο, καθώς και τη σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα του πυραύλου και το χρόνο.

1. Χρησιμοποίησε τις γνώσεις σου για τη δράση της βαρύτητας, για να γράψεις έναν τύπο που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στο ύψος (σε μέτρα) και το χρόνο (σε δευτερόλεπτα). Να θεωρήσεις ως χρόνο μηδέν το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο. Σε ποια γενική κατηγορία συναρτήσεων ανήκει ο τύπος που έγραψες; Κάνε την αντιστοίχιση των όρων του τύπου που σου δίνει το ύψος, με τους όρους του τύπου της συνάρτησης.
2. Να κατασκευάσεις έναν πίνακα στο Function Probe χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο για να γράψεις τις τιμές του ύψους που έχει ο πύραυλος για χρόνο από $t=0$ ως $t=8$.
3. Να χρησιμοποιήσεις τον πίνακα που έφτιαξες, για να απαντήσεις τις ακόλουθες ερωτήσεις:
   α) σε ποια, κατά προσέγγιση, χρονική στιγμή θα έχει ο πύραυλος αποκτήσει το μέγιστο ύψος του;
   β) σε ποια, πάλι κατά προσέγγιση, χρονική στιγμή θα προσκρούσει στο έδαφος;
4. Να εξηγήσεις πώς μπορείς να τροποποιήσεις τον πίνακά σου, ώστε να λάβεις ακριβείς απαντήσεις για τα προηγούμενα δύο ερωτήματα. Να δώσεις την απάντηση με ακρίβεια χιλιοστού του δευτερολέπτου. Μπορείς να ρυθμίσεις τα δεκαδικά ψηφία μιας στήλης από το παράθυρο διαλόγου ‘Ρυθμίσεις στήλης’ στο μενού ‘Πίνακας’.
   α) σε ποια χρονική στιγμή θα έχει ο πύραυλος αποκτήσει το μέγιστο ύψος του;
   β) σε ποια χρονική στιγμή θα προσκρούσει στο έδαφος;
5. Να κατασκευάσεις τη γραφική παράσταση της σχέσης ανάμεσα στο ύψος και το χρόνο και να εξηγήσεις με ποιόν τρόπο το έκανες (εισάγοντας έναν τύπο, στέλνοντας σημεία, κτλ.). Επιβεβαιώνονται από το διάγραμμά σου οι απαντήσεις που έδωσες για τη χρονική στιγμή που παρατηρείται το μέγιστο ύψος και η πρόσκρουση στο έδαφος;
6. Να γράψεις έναν τύπο που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο) και το χρόνο (σε δευτερόλεπτα). Να θεωρήσεις ως χρόνο μηδέν το σημείο που παύει να καίγεται το καύσιμο. Σε ποια γενική κατηγορία συναρτήσεων ανήκει ο τύπος που έγραψες; Κάνε την αντιστοίχιση των όρων του τύπου που σου δίνει το ύψος, με τους όρους του τύπου της συνάρτησης.
7. Να γράψεις στο παράθυρο ‘Πίνακας’ τον τύπο μιας συνάρτησης που να εκφράζει την ταχύτητα του πυραύλου σε συνάρτηση με το χρόνο και κατόπιν να κατασκευάσεις τη γραφική της παράσταση. Να την κατασκευάσεις σε ένα ξεχωριστό παράθυρο ‘Γράφημα’ επιλέγοντας την εντολή ‘Προσθήκη παραθύρου Γραφήματος’ από το μενού ‘Παράθυρα’.
8. Σε ποια χρονική στιγμή θα αποκτήσει ο πύραυλος τη μέγιστη θετική ταχύτητα και ποια θα είναι η τιμή της;
9. Σε ποια χρονική στιγμή θα αποκτήσει ο πύραυλος τη μέγιστη αρνητική ταχύτητα και ποια θα είναι η τιμή της;
10. Να ορίσεις την ταχύτητα του πυραύλου, όταν το ύψος του είναι 30,48 m από το έδαφος.
11. Στη γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο υπάρχει σημείο τομής της καμπύλης με τον οριζόντιο άξονα (άξονας των χρόνων); Αν υπάρχει, να εξηγήσεις τη σημασία του σημείου τομής. Αν δεν υπάρχει, να εξηγήσεις γιατί δεν υπάρχει.

10. Η πρόσκληση

Σύντομη Περιγραφή
Για το σχεδιασμό μιας πρόσκλησης θα χρησιμοποιηθεί χαρτί σε σχήμα παραλληλογράμμου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το εμβαδό του τυπωμένου υλικού της πρόσκλησης και τα περιθώρια εκτύπωσης είναι δεδομένα, ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδό του χαρτιού που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την πρόσκληση. Η πρόσκληση κατόπιν γίνεται ανακοίνωση και ζητείται να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί ώστε να ισχύουν οι ίδιες προϋποθέσεις, αλλά και ο επιπλέον περιορισμός το μήκος και το πλάτος της ανακοίνωσης να μη διαφέρουν πάνω από 3 εκατοστά.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Μπορεί να ενταχθεί σαν εφαρμογή της μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης στην Α΄ Λυκείου, όπως και στη διδασκαλία των αντιστρόφων ποσών στην Β΄ Γυμνασίου.

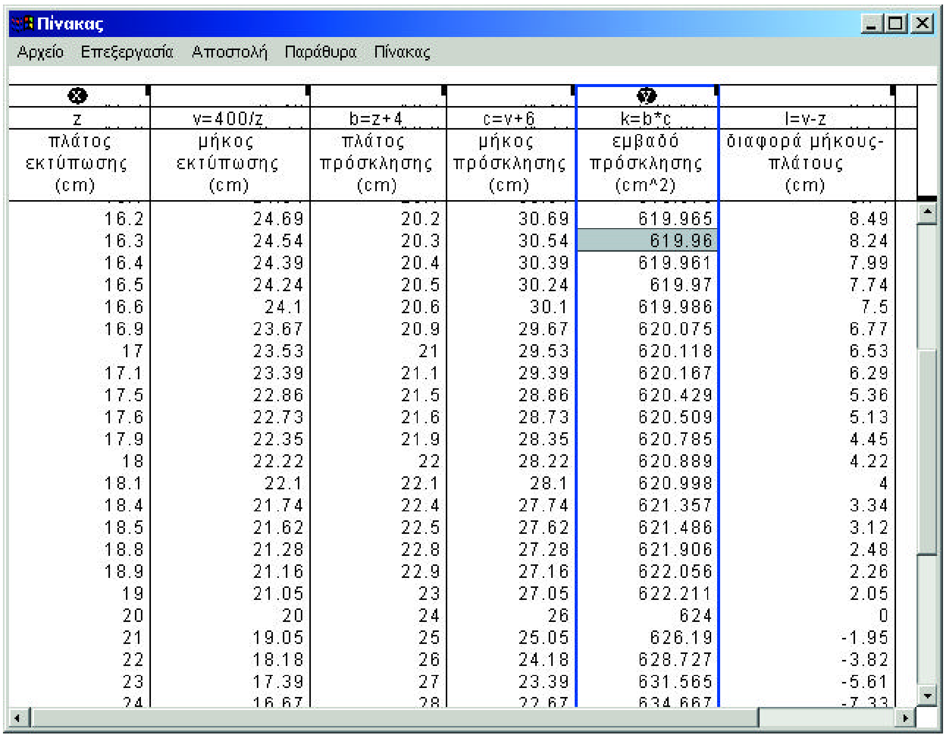
Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
> Να βρίσκουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης με βάση:
  α) τον πίνακα τιμών και
  β) τη γραφική παράσταση.
> Να χρησιμοποιήσουν τον τύπο εμβαδού παραλληλογράμμου σε προβλήματα άλγεβρας.
> Να βρίσκουν με ακρίβεια χιλιοστού τη λύση ενός προβλήματος.
> Να παρατηρήσουν και να διακρίνουν τη σχέση δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσών μεταξύ τους.
> Να παρατηρήσουν ότι όταν μια συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο, σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της έχει τοπικό μέγιστο.

Παρατηρήσεις

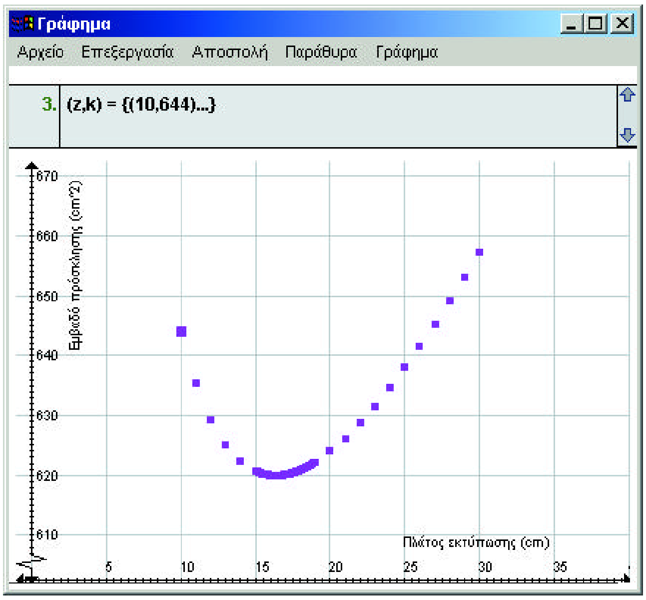
1. Σχετικά με την κατασκευή των στηλών να δοθεί έμφαση στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των παραπάνω μεγεθών και του z. Για παράδειγμα, η στήλη που αφορά το πλάτος v της ανακοίνωσης είναι εξαρτημένη στήλη με τη z με βάση τον τύπο $v=400/z$. Έτσι, όλες οι στήλες, εκτός της z, να κατασκευαστούν συναρτήσει της (βλέπε εικόνα 1).
2. Στην ερώτηση 3 να δοθεί έμφαση στη σχέση που έχουν μεταξύ τους δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Όταν αυξάνεται το ένα ελαττώνεται το άλλο.
3. Στο ερώτημα 4, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν από τον πίνακα ότι το εμβαδό ελαττώνεται, αλλά κάποια στιγμή αρχίζει να αυξάνεται, προτείνεται να χρησιμοποιήσουν την εντολή ‘Ενδιάμεσο γέμισμα’, για να μπορέσουν να υπολογίσουν την ελάχιστη τιμή. Για να δουν ποια ακριβώς τιμή του z δίνει το ελάχιστο εμβαδό θα πρέπει να ορίσουν στις ‘Ρυθμίσεις στήλης’ τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που τους επιτρέπει να βγάλουν ένα συμπέρασμα.
4. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει μέγιστη τιμή. Η ακρίβεια στις τιμές των διατάσεων του χαρτιού βρίσκεται από τον πίνακα (βλέπε εικόνα 2) και στην ‘Αριθμομηχανή’ υπολογίζεται το πόσο κοστίζει η πρόσκληση.

5. Στο ερώτημα 7 έχουμε έναν περιορισμό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης του εμβαδού. Ζητείται το μέγιστο εμβαδό της πρόσκλησης, όταν η διαφορά των στηλών πλάτος από μήκος ανακοίνωσης είναι μικρότερη του 4. Θα πρέπει να δημιουργήσουν στον ‘Πίνακα’ μια στήλη που να δείχνει τη διαφορά των δύο διαστάσεων.
Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί η διαφορά μεταξύ του τοπικού μεγίστου και ελαχίστου μιας συνάρτησης. Όταν περιορίζουμε το πεδίο ορισμού, τότε μπορούμε να βρούμε τοπικό μέγιστο, αν και η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή σε όλο το πεδίο ορισμού της.


Πίνακας
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

z πλάτος εκτύπωσης (cm)	v=400/z μήκος εκτύπωσης (cm)	b=z+4 πλάτος πρόσκλησης (cm)	c=v+6 μήκος πρόσκλησης (cm)	k=b*c εμβαδό πρόσκλησης (cm^2)	l=v-z διαφορά μήκους-πλάτους (cm)
16.2	24.69	20.2	30.69	619.965	8.49
16.3	24.54	20.3	30.54	619.96	8.24
16.4	24.39	20.4	30.39	619.961	7.99
16.5	24.24	20.5	30.24	619.97	7.74
16.6	24.1	20.6	30.1	619.986	7.5
16.9	23.67	20.9	29.67	620.075	6.77
17	23.53	21	29.53	620.118	6.53
17.1	23.39	21.1	29.39	620.167	6.29
17.5	22.86	21.5	28.86	620.429	5.36
17.6	22.73	21.6	28.73	620.509	5.13
17.9	22.35	21.9	28.35	620.785	4.45
18	22.22	22	28.22	620.889	4.22
18.1	22.1	22.1	28.1	620.998	4
18.4	21.74	22.4	27.74	621.357	3.34
18.5	21.62	22.5	27.62	621.486	3.12
18.8	21.28	22.8	27.28	621.906	2.48
18.9	21.16	22.9	27.16	622.056	2.26
19	21.05	23	27.05	622.211	2.05
20	20	24	26	624	0
21	19.05	25	25.05	626.19	-1.95
22	18.18	26	24.18	628.727	-3.82
23	17.39	27	23.39	631.565	-5.61
24	16.67	28	22.67	634.667	-7.33

εικόνα 1



εικόνα 2

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Η τάξη σου διοργανώνει μια εκδήλωση και πρέπει να ετοιμάσει προσκλήσεις. Μετά από συνέλευση της τάξης αποφασίστηκε η πρόσκληση να πληροί τις πιο κάτω προϋποθέσεις:
Η πρόσκληση να αποτελείται από 400 τετραγωνικά εκατοστά τυπωμένου υλικού, με περιθώρια 3 εκατοστών στην κορυφή και στο κάτω μέρος της σελίδας και 2 εκατοστών στα πλάγια τμήματά της. Επίσης, λόγω του κόστους του χαρτιού, οι προσκλήσεις πρέπει να τυπωθούν σε χαρτί που να έχει την ελάχιστη επιφάνεια (εμβαδό) που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις.

1. Να σχεδιάσεις στο τετράδιό σου ένα σχήμα για την πρόσκληση, ονομάζοντας το πλάτος της εκτύπωσης ‘z’. Να εκφράσεις το μήκος της εκτύπωσης σε σχέση με το ‘z’ και τέλος το μήκος και το πλάτος ολόκληρης της πρόσκλησης σε σχέση με το ‘z’.
2. Να κατασκευάσεις στο Function Probe έναν πίνακα με τις ακόλουθες στήλες:
   ‘Πλάτος εκτύπωσης’, ‘Μήκος εκτύπωσης’, ‘Πλάτος πρόσκλησης’, ‘Μήκος πρόσκλησης’, ‘Εμβαδό πρόσκλησης’. Να συμπληρώσεις τουλάχιστον 20 τιμές σε κάθε στήλη. Επίλεξε το κατάλληλο εύρος τιμών για το z.
3. Καθώς αυξάνονται οι τιμές στην στήλη του ‘z’, τι συμβαίνει στις τιμές κάθε μιας από τις άλλες στήλες;
4. Υπάρχει ελάχιστη τιμή για το εμβαδό της πρόσκλησης; Αν υπάρχει, υπολόγισέ την και εξήγησε με ποιον τρόπο το έκανες.
   Απάντηση: Η ελάχιστη τιμή προκύπτει για z=16,3 cm.
5. Υπάρχει μέγιστη τιμή για το εμβαδό της πρόσκλησης; Να στείλεις τις στήλες ‘Πλάτος εκτύπωσης’ και ‘Εμβαδό πρόσκλησης’ στο παράθυρο ‘Γράφημα’, προκειμένου να ελέγξεις την υπόθεσή σου.
   Απάντηση: Θεωρητικά όχι γιατί οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα, ωστόσο τίθονται περιορισμοί από τις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος.
6. Το κατάστημα για τις εκτυπώσεις διαθέτει ένα μηχάνημα που μπορεί να κόβει χαρτί με ακρίβεια χιλιοστού. Να βρεις τις διαστάσεις του χαρτιού με το ελάχιστο εμβαδό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγγελία. Αν το χαρτί που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί κοστίζει 1,5 λεπτό το τετραγωνικό εκατοστό, πόσο θα πληρώσει η τάξη για κάθε πρόσκληση;
   Απάντηση: Το ελάχιστο εμβαδόν είναι 619.96 cm^2 και θα κοστίσει 9,3 ευρώ.
7. Εκτός από τις προσκλήσεις, αποφασίστηκε η τάξη να κολλήσει μια μεγάλη ανακοίνωση στον πίνακα ανακοινώσεων ως διαφήμιση για να ενημερωθούν για την εκδήλωση και οι υπόλοιποι μαθητές των άλλων τάξεων. Αυτή τη φορά, όμως, θέλει να μεγιστοποιήσει το εμβαδό της, ώστε να μπορούν οι άλλοι μαθητές να τη διαβάζουν από απόσταση. (Εντούτοις, εξακολουθούν να ισχύουν οι υπόλοιποι περιορισμοί.) Ας υποθέσουμε επιπλέον πως για λόγους αισθητικής, αποφασίστηκε το μήκος και το πλάτος της ανακοίνωσης να μη διαφέρουν περισσότερο από τέσσερα εκατοστά. Χρησιμοποιώντας το παράθυρο ‘Πίνακας’ να βρεις το πλάτος και το μήκος της πρόσκλησης που μεγιστοποιούν το εμβαδό της ανακοίνωσης. Για να βοηθηθείς, με την εντολή ‘Διαφορά’ δημιούργησε μια νέα στήλη στον πίνακα που να δείχνει τη διαφορά των διαστάσεων της πρόσκλησης. Πώς ερμηνεύεις τις αρνητικές τιμές της στήλης;

11. Η εκδρομή

Σύντομη Περιγραφή

Προγραμματίζεται ένα ταξίδι με πούλμαν και η εταιρεία που διαθέτει το πούλμαν ενώ αρχικά σκόπευε να χρεώσει το εισιτήριο με ένα συγκεκριμένο ποσό, προτίθεται να μειώνει το κόστος του εισιτηρίου κατά ένα ποσό, με την προϋπόθεση οι συμμετέχοντες να ξεπερνούν τους εκατό. Ζητείται να διερευνηθεί το κέρδος της εταιρείας ανάλογα με τον αριθμό των συμμετεχόντων.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται να λυθεί σαν εισαγωγικό μάθημα στην έννοια της μέγιστης τιμής τριωνύμου στην Α' Λυκείου.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

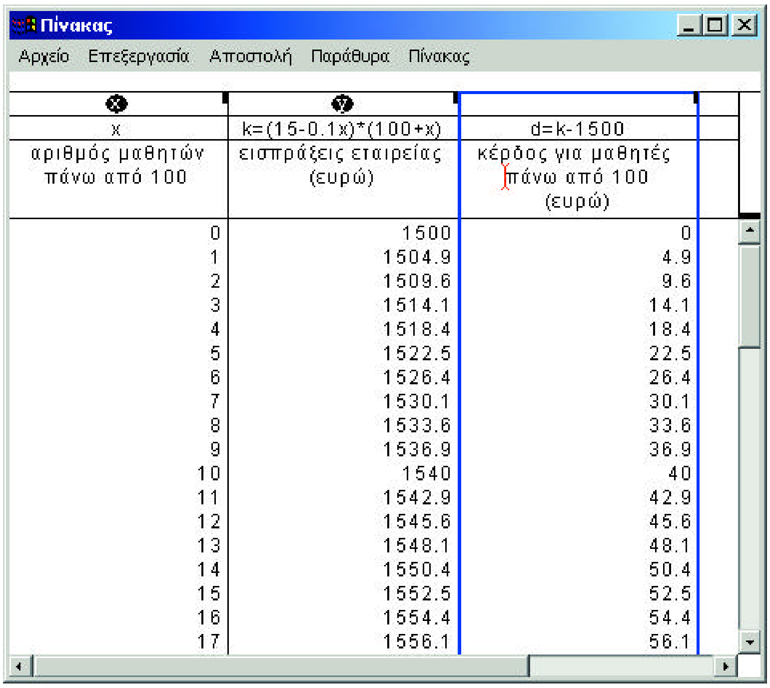
Οι μαθητές:

- Να βρίσκουν τη μέγιστη τιμή τριωνύμου από τη γραφική παράσταση.
- Να εκφράσουν το τριώνυμο στη μορφή $α(x-x_1)(x-x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του.
- Να μεταφράζουν το ζητούμενο ενός προβλήματος της καθημερινής ζωής σε διερεύνηση του κατάλληλου αλγεβρικού τύπου.
- Να ερμηνεύουν με βάση τη γραφική παράσταση τις ρίζες ενός τριωνύμου.

Παρατηρήσεις

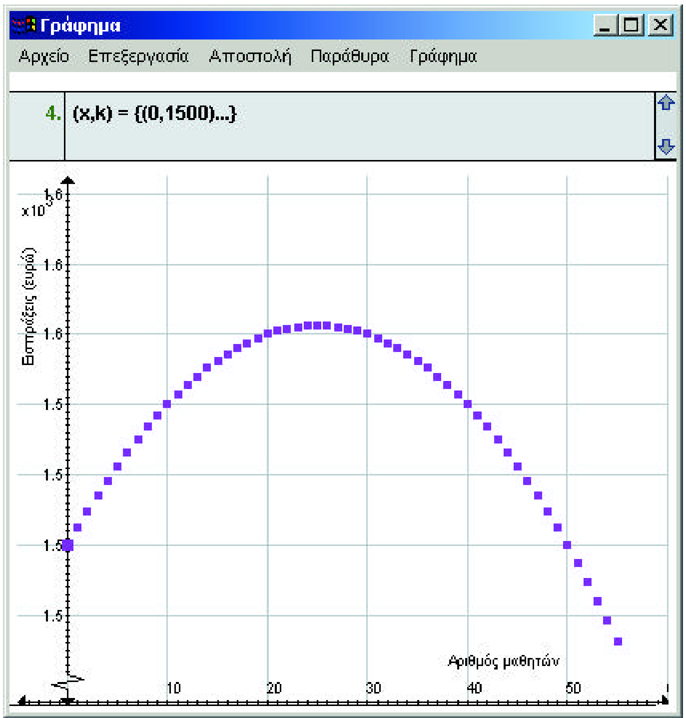
1. Στα ερωτήματα 1, 2, 3 προτείνεται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις τους.
2. Όταν οι μαθητές ολοκληρώσουν το ερώτημα 3, στο επόμενο ερώτημα καλούνται να δημιουργήσουν στο παράθυρο 'Πίνακας' του Function Probe τον πίνακα του ερωτήματος 3, βάζοντας όμως στη στήλη του κέρδους τον τύπο που συνδέει το κέρδος της εταιρείας με τον αριθμό των μαθητών που ξεπερνούν τους εκατό. Έτσι, καλούνται να δημιουργήσουν μια ανεξάρτητη στήλη (αριθμός μαθητών) και μια εξαρτημένη (κέρδος). Προτείνεται, για την κατασκευή του τύπου που θα εισάγουν στην εξαρτημένη στήλη, να δουλέψουν στην 'Αριθμομηχανή'. Να κατασκευάσουν εκεί ένα κουμπί που να υπολογίζει το κέρδος συναρτήσει του αριθμού των μαθητών [(K=(15-0,1x)*(100+x)] (βλέπε εικόνα 1).
3. Στο ερώτημα 5 πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' από το μενού 'Γράφημα'. Να δοθεί έμφαση στην αιτιολόγηση της μη εμφάνισης των σημείων στο 'Γράφημα' που έχει να κάνει με την αρίθμηση των αξόνων και τα μεγέθη που παριστάνονται σε αυτούς.
4. Στο τελευταίο ερώτημα προτείνεται να γίνει σύνδεση ανάμεσα στη ρίζα ενός τριωνύμου και στο πώς αυτή παριστάνεται στη γραφική παράσταση. Αν έρθουν 125 μαθητές επιπλέον από τους 100, το κέρδος της εταιρείας θα είναι μηδενικό και η γραφική παράσταση θα τμήσει τον άξονα των x.
5. Να δοθεί προσοχή στην εύρεση της ανεξάρτητης μεταβλητής του αλγεβρικού τύπου του κέρδους σε συνάρτηση με τον αριθμό των ατόμων.

6. Η διερεύνηση του προβλήματος μπορεί να συνεχιστεί στο παράθυρο 'Γράφημα'. Για παράδειγμα, να τονιστεί ότι το μέγιστο κέρδος είναι το ίδιο και για διαφορετικό αριθμό ατόμων (αν μετακινηθεί η γραφική παράσταση κατά 1 μονάδα δεξιά). (Βλέπε εικόνα 2.)


Πίνακας
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x αριθμός μαθητών πάνω από 100	k=(15-0.1x)*(100+x) εισπράξεις εταιρείας (ευρώ)	d=k-1500 κέρδος για μαθητές πάνω από 100 (ευρώ)
0	1500	0
1	1504.9	4.9
2	1509.6	9.6
3	1514.1	14.1
4	1518.4	18.4
5	1522.5	22.5
6	1526.4	26.4
7	1530.1	30.1
8	1533.6	33.6
9	1536.9	36.9
10	1540	40
11	1542.9	42.9
12	1545.6	45.6
13	1548.1	48.1
14	1550.4	50.4
15	1552.5	52.5
16	1554.4	54.4
17	1556.1	56.1

εικόνα 1



εικόνα 2

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Το σχολείο σου οργανώνει μια εκδρομή με πούλμαν. Απευθύνεται σε μια ιδιωτική εταιρεία με πούλμαν για να πάρει προσφορά. Η εταιρεία αρχικά σκόπευε να χρεώσει 15 ευρώ για το εισιτήριο. Δεδομένου όμως ότι εκατό μαθητές έχουν δηλώσει συμμετοχή για την εκδρομή από πριν, προτίθεται να μειώνει το κόστος όλων των εισιτηρίων κατά 10 λεπτά για κάθε επιπλέον άτομο που συμμετέχει πέρα από τους πρώτους 100.

1. Πόσα χρήματα θα εισπράξει η εταιρεία αν έρθουν στην εκδρομή 100 μαθητές;
   Απάντηση: Το εισιτήριο θα κοστίζει 15 ευρώ ανά άτομο και η εταιρεία θα εισπράξει 1500 ευρώ.
2. Αν έρθουν 110 μαθητές, ποιες θα είναι οι εισπράξεις; Ποιο θα είναι το κέρδος από την προσφορά;
   Απάντηση: Το εισιτήριο θα κοστίζει 13,5 ευρώ ανά άτομο και η εταιρεία θα εισπράξει 1540 ευρώ. Το κέρδος εξαιτίας της προσφοράς θα είναι 40 ευρώ.
3. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας το παράθυρο ‘Αριθμομηχανή’. Η πρώτη στήλη αφορά τον αριθμό των μαθητών που υπερβαίνουν τους 100.

Αριθμός μαθητών	**Εισπράξεις (ευρώ)**
0	*1500*
1	*1504.9*
2	*1509.6*
3	*1514.1*
4	*1518.4*
5	*1522.5*
6	*1526.4*

4. Δημιούργησε τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο ‘Πίνακας’ αλλά η στήλη ‘Αριθμός μαθητών’ θα παίρνει τιμές από 1-60 με βήμα 1, ενώ για τις ‘Εισπράξεις’ φτιάξε έναν τύπο ο οποίος να παίρνει σαν είσοδο τις τιμές της στήλης ‘Αριθμός μαθητών’ και να υπολογίζει τις εισπράξεις της εταιρείας ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών που ξεπερνούν τους εκατό.
   Απάντηση: $y=(15-0,1x)(100+x)$
5. Στείλε τις παραπάνω στήλες στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Αν τα σημεία δεν φαίνονται, διόρθωσε το πρόβλημα με την εντολή ‘Αλλαγή Κλίμακας’ στο μενού ‘Γράφημα’.
6. Με βάση τη γραφική παράσταση, πόσοι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν, για να έχει η εταιρεία τις μέγιστες εισπράξεις, και κατά συνέπεια το μέγιστο κέρδος;
   Απάντηση: 125 μαθητές.
7. Σε αυτή την περίπτωση, ποιες θα είναι οι μέγιστες εισπράξεις και ποιο το μέγιστο κέρδος; Επαλήθευσέ το στο παράθυρο ‘Πίνακας’. Ποιο θα είναι τότε το κόστος ενός εισιτηρίου;
   Απάντηση: Οι εισπράξεις σε αυτήν την περίπτωση είναι 1562,5 ευρώ, το κέρδος 62,5 ευρώ ενώ το κόστος του εισητηρίου είναι 12,5 ευρώ.
8. Σε ποιες περιπτώσεις το επιπλέον κέρδος της εταιρείας θα είναι μηδενικό; Επαλήθευσέ το στη γραφική παράσταση του κέρδους. Επαλήθευσε το αποτέλεσμα από το παράθυρο ‘Πίνακας’.
   Απάντηση: Για 50 επιπλέον άτομα, το κέρδος της εταιρείας από την προσφορά μηδενίζεται.
9. Συμφέρει την εταιρεία να κρατήσει την προσφορά αν οι συμμετοχές ξεπεράσουν τις 150;

12. Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Σύντομη Περιγραφή

Στη δραστηριότητα αυτή καλούνται οι μαθητές να διερευνήσουν μια σειρά ερωτημάτων σχετικά με τη μεταβολή του τύπου της $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εκτελώντας όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς (μετατοπίσεις και ως προς τους δυο άξονες, συμμετρίες, ανοίγματα κτλ.) στη γραφική της παράσταση. Η διερεύνηση στηρίζεται στη δυνατότητα που δίνει το πρόγραμμα για:

- Αυξομείωση μιας γραφικής παράστασης.
- Σχεδιασμό του συμμετρικού μιας γραφικής παράστασης ως προς τους δυο άξονες.
- Μετακίνηση μιας γραφικής παράστασης κατά τον άξονα των x και των y.

Έτσι, σε κάθε ερώτημα οι μαθητές καλούνται να κάνουν μια εικασία σχετικά με το τι θα συμβεί αν μετασχηματίσουν με κάποιο από τους παραπάνω τρόπους τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ και μετά να επαληθεύσουν την εικασία τους εκτελώντας το μετασχηματισμό στο πρόγραμμα.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται σαν εισαγωγικό μάθημα στην Α΄ Λυκείου, στο κεφάλαιο της μελέτης τριωνύμου.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- Να συνδέουν την αλλαγή (μετατόπιση και στους δύο άξονες-αυξομείωση) στη γραφική παράσταση ενός τριωνύμου με τον αλγεβρικό τύπο του.
- Να κατανοήσουν, παρατηρώντας το γραφικά, ότι κάθε τριώνυμο μετασχηματίζεται στη μορφή $\delta(x+\varepsilon)^2+\zeta$.
- Να βρίσκουν τη συμμετρική γραφική παράσταση ενός τριωνύμου ως προς τους δύο άξονες.
- Να είναι σε θέση να διακρίνουν τι είδους μετασχηματισμούς πρέπει να κάνουν στη συνάρτηση $y=\alpha x^2$, για να παραστήσουν γραφικά την $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Παρατηρήσεις

1. Στο ερώτημα 1 να γίνει χρήση της εντολής ‘Γέμισμα’ του παραθύρου ‘Πίνακας’.
2. Στο ερώτημα 2 να συζητηθεί γιατί τα σημεία δεν μπορούν να ενωθούν με ευθύγραμμα τμήματα αλλά με βάση τον τύπο $y=x^2$.
3. Στο ερώτημα 3 προτείνεται να δοθεί έμφαση στη συμμετρία των τιμών της δευτεροβάθμιας συνάρτησης. Αυτό γίνεται φανερό από τον πίνακα τιμών αλλά και από τη γραφική παράσταση παίρνοντας το συμμετρικό της $y=x^2$ ως προς τον άξονα των y.
4. Στα ερωτήματα 4, 5 οι μαθητές καλούνται να εικάσουν την απάντηση και μετά να την επαληθεύσουν γραφικά εκτελώντας το μετασχηματισμό και βλέποντας την αλλαγή στον τύπο της αρχικής συνάρτησης.
5. Στο ερώτημα 7 ζητείται από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο της συμμετρίας ως προς τον άξονα των x.

6. Στα ερωτήματα 8, 9, 10, 11 οι μαθητές καλούνται να μετατοπίσουν τη γραφική παράσταση της x^2 κατά τους δύο άξονες και να παρατηρήσουν τη μεταβολή που παρουσιάζεται κάθε φορά στον τύπο της. Προτείνεται να διατυπώσουν κανόνες σχετικά με τα αποτελέσματα που βρήκαν. Για παράδειγμα, αν μετακινήσω τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης κατά τον άξονα των x , αλλάζει η μεταβλητή x στον τύπο (κατά + ή - μονάδες).
7. Στο Β' μέρος δίνεται πρώτα ο τύπος της συνάρτησης και μετά ζητείται από τους μαθητές να βρουν τι είδους μετασχηματισμούς πρέπει να κάνουν σε μια αρχική συνάρτηση, για να προκύψει η δοθείσα.
8. Στο ερώτημα 3 του Β' μέρους να γίνει πρώτα αλγεβρικά η ανάλυση του τριωνύμου στη μορφή $δ(x+ε)^2+ζ$ και μετά να επαληθευτεί το αποτέλεσμα γραφικά.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' κατασκεύασε έναν πίνακα με δύο στήλες. Την πρώτη θα την ονομάσεις x και θα παίρνει τις τιμές -2,5, -2, -1,5, -1, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5 και τη δεύτερη θα την ονομάσεις y και θα γεμίζει αυτόματα με βάση τον τύπο $y=x^2$. Τι παρατηρείς σχετικά με τις τιμές της συνάρτησης $y=x^2$;
2. Στείλε τις τιμές των στηλών αυτών στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν θέλουμε να ενώσουμε τα σημεία που φαίνονται, με ποιο τρόπο θα το έκανες; Επαλήθευσέ το γραφικά.
3. Με ποιο μετασχηματισμό της γραφικής παράστασης μπορείς να δείξεις ότι οι τιμές της συνάρτησης για x=-2,5, -2, -1,5, -1 είναι ίσες με τις τιμές της συνάρτησης για x=2,5, 2, 1,5, 1;
4. Αν ανοίγαμε με οριζόντια αυξομείωση (εργαλείο αυξομείωσης) τη γραφική παράσταση κατά 2 μονάδες, τι φαντάζεσαι ότι θα άλλαζε στον τύπο της; Επαλήθευσε την εικασία σου γραφικά.
5. Αν κλείναμε με οριζόντια αυξομείωση τη γραφική παράσταση κατά μισή μονάδα, τι αλλαγές θα παρατηρούσες στον τύπο της; Επαλήθευσε και πάλι την εικασία σου γραφικά.
6. Αν αλλάζαμε τον τύπο της συνάρτησης σε $y=-x^2$, τι αλλαγή θα παρατηρούσες στη γραφική της παράσταση; Επαλήθευσε και πάλι την εικασία σου γραφικά.
7. Σκέψου με ποιο μετασχηματισμό (μετατόπιση, συμμετρικό ή αυξομείωση) θα μπορούσες να ταυτίσεις τη γραφική παράσταση της $y=x^2$ με την $y=-x^2$; Απόδειξε την εικασία σου και αλγεβρικά.
8. Μετακίνησε την αρχική σου γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα δεξιά. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;
9. Μετακίνησε την αρχική σου γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα αριστερά. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;
10. Μετακίνησε τη γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;
11. Μετακίνησε τη γραφική παράσταση $y=x^2$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω. Τι αλλαγές παρατηρείς στον τύπο της;

Β' Μέρος

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' να κάνεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2x^2$. Έπειτα να κάνεις τη γραφική παράσταση της $y=2(x-3)^2+1$. Μετασχημάτισε κατάλληλα την πρώτη γραφική παράσταση, ώστε να ταυτιστεί με τη δεύτερη. Τι μετασχηματισμούς έκανες και κατά πόσες μονάδες;
2. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' (με τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία') και κάνε τη γραφική παράσταση του τύπου $y=-5(x+1)^2-4$. Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση θα επέλεγες να μετασχηματίσεις κατάλληλα, ώστε να ταυτιστεί με αυτή τη γραφική παράσταση; Επαλήθευσε την απάντησή σου γραφικά.
3. Κάποιος υποστηρίζει ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\delta(x+\varepsilon)^2+\zeta$,οπότε η γραφική παράσταση κάθε τριωνύμου βρίσκεται με κατάλληλη μετατόπιση της συνάρτησης αx^2. Επαλήθευσέ το για τη συνάρτηση $y=x^2-6x+8$, φέρνοντάς την πρώτα στη μορφή $y=\delta(x+\varepsilon)^2+\zeta$.

13. Ο παραγωγός μήλων

Σύντομη Περιγραφή

Ένας παραγωγός μήλων αντιμετωπίζει το εξής δίλημμα: αν μαζέψει νωρίς τα μήλα του, θα τα πουλήσει μεν σε υψηλή τιμή αλλά θα έχει μικρή παραγωγή, ενώ αν τα μαζέψει αργότερα (μέσα σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα), θα έχει μικρότερη παραγωγή αλλά θα τα πουλήσει ακριβότερα. Ζητείται από τους μαθητές να διερευνήσουν ποια χρονική στιγμή τον συμφέρει να πουλήσει τα μήλα του.

Η επίλυση και διερεύνηση του προβλήματος εμπλέκει τις έννοιες μέγιστη τιμή τριωνύμου και μελέτη της μεταβολής του τύπου μιας δευτεροβάθμιας συνάρτησης, όταν μετατοπίζεται η γραφική της παράσταση κατά τον άξονα των x.

Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις τρεις αναπαραστάσεις της δευτεροβάθμιας συνάρτησης (πίνακας, γραφική παράσταση, τύπος) συσχετίζοντάς τες κάθε φορά με τα δεδομένα του προβλήματος.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται να δοθεί στους μαθητές της Α' Λυκείου σαν εισαγωγή στις έννοιες μέγιστη τιμή τριωνύμου και μετασχηματισμοί τριωνύμου.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

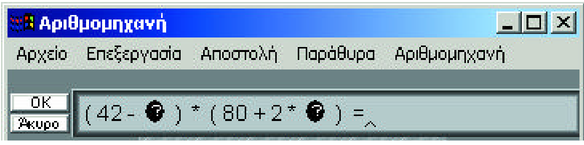
Γενικός στόχος είναι οι μαθητές να γνωρίσουν τις έννοιες αυτές μέσα από τη χρήση τους σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, όπου οι έννοιες αυτές έχουν ένα συγκεκριμένο νόημα. Για παράδειγμα, η μέγιστη τιμή του τριωνύμου που χρησιμοποιείται στο πρόβλημα, αφορά το μέγιστο κέρδος του παραγωγού, ενώ η μετατόπιση της γραφικής του παράστασης προς τα δεξιά κατά τον άξονα των x, αφορά την αντίστοιχη μετατόπιση της εβδομάδας που τον συμφέρει να πουλήσει την παραγωγή του. Ειδικότερα, στόχος είναι οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια του μεγίστου μιας συνάρτησης.
- Να διακρίνουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο ενός τριωνύμου, μετατοπίζοντας τη γραφική του παράσταση προς τα δεξιά κατά τον άξονα των x.
- Να είναι σε θέση να αλλάζουν κατάλληλα την αρίθμηση των αξόνων στο παράθυρο 'Γράφημα', για να αναπαριστούν σωστά μια συνάρτηση.
- Να κατασκευάσουν τον τύπο που συνδέει δύο εξαρτημένες μεταξύ τους μεταβλητές (κέρδος, αριθμός εβδομάδων).

Παρατηρήσεις

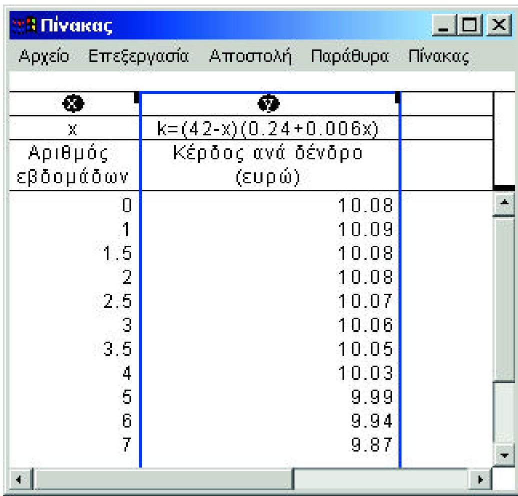
1. Προτείνεται στην αρχή της δραστηριότητας, προτού οι μαθητές εμπλακούν με τα ερωτήματα του προβλήματος, να γίνει συζήτηση στην τάξη σχετικά με την κατανόηση του προβλήματος. Να ερωτηθούν, για παράδειγμα, οι μαθητές γιατί ο παραγωγός βρίσκεται σε δίλημμα, από ποιες παραμέτρους εξαρτάται το κέρδος του κτλ.
2. Στα ερωτήματα 1, 2, 3 προτείνεται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις τους.

3. Όταν οι μαθητές ολοκληρώσουν το ερώτημα 3, στο επόμενο ερώτημα καλούνται να δημιουργήσουν στον 'Πίνακα' του Function Probe τον πίνακα του ερωτήματος 3, βάζοντας όμως στη στήλη του κέρδους τον τύπο που συνδέει το κέρδος του παραγωγού με τον αριθμό των εβδομάδων. Έτσι, καλούνται να δημιουργήσουν μια ανεξάρτητη στήλη (αριθμός εβδομάδων) και μια εξαρτημένη (κέρδος). Προτείνεται, για την κατασκευή του τύπου που θα εισαγάγουν στην εξαρτημένη στήλη, να δουλέψουν στην 'Αριθμομηχανή'. Να κατασκευάσουν εκεί ένα κουμπί που να υπολογίζει το κέρδος συναρτήσει της εβδομάδας (βλέπε εικόνα 1).



εικόνα 1

4. Στο ερώτημα 5 πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' από το μενού 'Πίνακας'. Να δοθεί έμφαση στην αιτιολόγηση της μη εμφάνισης των σημείων στο παράθυρο 'Γράφημα', πράγμα που έχει να κάνει με την αρίθμηση των αξόνων και τα μεγέθη που παριστάνονται σε αυτούς.
5. Στο ερώτημα 6 οι μαθητές καλούνται να βρουν το κέρδος στα μισά της δεύτερης εβδομάδας ενώνοντας τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Η λύση είναι προσεγγιστική και αυτό γίνεται φανερό, αν υπολογίσουν το ακριβές αυτό κέρδος στο παράθυρο 'Πίνακας', εισάγοντας κατάλληλα ανάμεσα στο 2 και στο 3 την τιμή 2.5 (βλέπε εικόνα 2).
Να δοθεί επίσης έμφαση στη διαφορά ανάμεσα στο 'ενώνω τα σημεία που ανήκουν σε μια γραφική παράσταση με τυχαίο τρόπο' ή 'με μια συγκεκριμένη καμπύλη'. Συχνά οι μαθητές αγνοούν ότι τα διακριτά σημεία μιας γραφικής παράστασης αποτελούν σημεία του γραφήματος μιας συνάρτησης.



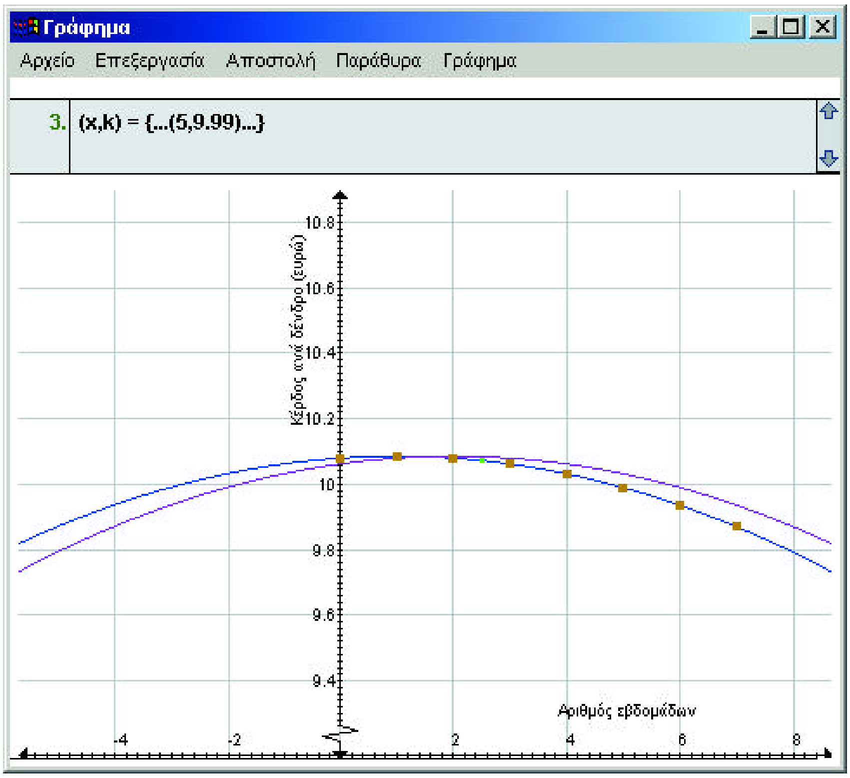
x	k=(42-x)(0.24+0.006x)
Αριθμός εβδομάδων	Κέρδος ανά δένδρο (ευρώ)
0	10.08
1	10.09
1.5	10.08
2	10.08
2.5	10.07
3	10.06
3.5	10.05
4	10.03
5	9.99
6	9.94
7	9.87

εικόνα 2

6. Στο ερώτημα 8, εισάγοντας οι μαθητές τον τύπο αυτό στο παράθυρο 'Γράφημα', παρατηρούν ότι η καμπύλη έχει μέγιστη τιμή. Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τι παριστάνει στο πρόβλημα η μέγιστη αυτή τιμή (το μέγιστο κέρδος). Να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση της γραφικής παράστασης για την απάντηση μιας ερώτησης. Προτείνεται οι μαθητές να

ενθαρρύνονται να δίνουν προσεγγιστικές απαντήσεις σε μια ερώτηση μέσα από τη γραφική παράσταση και μετά να επαληθεύουν την απάντησή τους μέσα από τον πίνακα τιμών.

7. Στο ερώτημα 9 ζητείται από τους μαθητές να μετακινήσουν (χρησιμοποιώντας το κατάλληλο εργαλείο) τη γραφική παράσταση στο ‘Γράφημα’ οριζόντια και δεξιά κατά 1 μονάδα και να αποφανθούν τι αλλάζει (εβδομάδα) και τι μένει σταθερό (κέρδος). Παρατηρούν δηλαδή ότι το κέρδος μένει σταθερό, ενώ η εβδομάδα που έχει το μέγιστο κέρδος είναι αυτή τη φορά η δεύτερη αντί της πρώτης (βλέπε εικόνα 3).
8. Στο ερώτημα 10 ζητείται να παρατηρήσουν τι πρέπει να αλλάξουν στον τρόπο που αρίθμησαν τις εβδομάδες, για να βρίσκουν το κέρδος του παραγωγού με βάση τη νέα γραφική παράσταση. Η αρίθμηση τώρα δεν θα αρχίζει από το 0 αλλά από το 1. Ο κανόνας που τους ζητείται να βρουν (αν μετακινήσουν δεξιά κατά μια μονάδα τη γραφική παράσταση, τότε στο νέο τύπο της το x γίνεται x-1), προτείνεται να βρεθεί παρατηρώντας το νέο τύπο στο ‘Πλαίσιο Τύπων’ και να ερμηνευτεί μέσα από το μετασχηματισμό που έκαναν.



εικόνα 3

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Ένας παραγωγός μήλων διαπίστωσε ότι τα μήλα στο κτήμα του ωρίμασαν και πρέπει να τα μαζέψει το αργότερο μέσα σε έξι εβδομάδες. Αντιμετωπίζει όμως το εξής πρόβλημα: Αν τα μαζέψει σήμερα, κάθε δέντρο θα του αποδώσει 42 κιλά κατά μέσο όρο. Για κάθε εβδομάδα που περνάει, εκτιμά ότι η απόδοση κάθε δέντρου θα μειώνεται κατά 1 κιλό (από πέσιμο μήλων στο έδαφος, κτλ.), ενώ η τιμή πώλησης θα αυξάνεται κατά 0,6 λεπτά το κιλό. Η σημερινή τιμή πώλησης είναι 24 λεπτά το κιλό. Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε την ‘Αριθμομηχανή’ για τις πράξεις σου.

1. Ποιο είναι το κέρδος του παραγωγού ανά δένδρο, αν πουλήσει σήμερα τα μήλα του;
   Απάντηση: Ο παραγωγός θα εισπράξει 10,08 ευρώ ανά δένδρο.
2. Στην αρχή της άλλης εβδομάδας πόσα κιλά θα είναι τα μήλα, πόσα ευρώ θα κοστίζουν το κιλό και ποιο θα είναι το κέρδος του παραγωγού;
   Απάντηση: Κάθε δένδρο θα αποδίδει 41 κιλά μήλα, ένα κιλό μήλα θα κοστίζει 24,006 λεπτά και ο παραγωγός θα εισπράξει 10,09 ευρώ ανά δένδρο.
3. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα. Σαν εβδομάδα 0 θεώρησε την τρέχουσα εβδομάδα.

Αριθμός εβδομάδων	**Κέρδος ανά δένδρο (ευρώ)**
0	*10,08*
1	*10,09*
2	*10,08*
3	*10,06*
4	*10,03*
5	*9,99*
6	*9,94*

4. Δημιούργησε τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο ‘Πίνακας’ αλλά για τη στήλη ‘Εισπράξεις’ φτιάξε έναν τύπο, ο οποίος θα παίρνει σαν είσοδο τις τιμές της στήλης ‘Αριθμός εβδομάδων’ και θα υπολογίζει το κέρδος κάθε εβδομάδας ανά δένδρο.
   Απάντηση: $k=(42-x)(0.24+0.006x)$
5. Στείλε τα σημεία αυτά στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Μπορείς να διακρίνεις τα σημεία; Αν όχι, δικαιολόγησε γιατί και διόρθωσε το πρόβλημα.
6. Με την εντολή ‘Σύνδεση σημείων’ ένωσε τα σημεία αυτά. Μπορείς από τη γραφική παράσταση να υπολογίσεις το κέρδος του παραγωγού, αν πουλούσε τα μήλα του στα μισά της δεύτερης εβδομάδας, χρησιμοποιώντας το εργαλείο ‘Δείκτη σημείου’; Επαλήθευσε την απάντησή σου χρησιμοποιώντας τον ‘Πίνακα’. Εξήγησε τη διαφορά των αποτελεσμάτων. Χρησιμοποίησε το εικονίδιο μεγέθυνσης για να δεις καλύτερα τις γραφικές παραστάσεις.
7. Ποιον τύπο πρέπει να εισαγάγεις στην περιοχή εγγραφής τύπου, έτσι ώστε η γραφική του παράσταση να περνάει από τα σημεία που φαίνονται;
8. Με το εργαλείο ‘Δείκτη σημείου’ να υπολογίσεις από τη γραφική παράσταση ποια είναι η κατάλληλη εβδομάδα, για να πουλήσει τα μήλα του. Επαλήθευσέ το στο παράθυρο ‘Πίνακας’.
   Απάντηση: Η πιο κατάλληλη εβδομάδα για να πουλήσει τα μήλα είναι η πρώτη.
9. Μετατόπισε τη γραφική παράσταση οριζόντια προς τα δεξιά κατά τον άξονα των x κατά μια μονάδα. Τι έχει αλλάξει ως προς το μέγιστο κέρδος και ως προς την εβδομάδα που πρέπει να πουλήσει τα μήλα του;
   Απάντηση: Το μέγιστο κέρδος είναι το ίδιο και η εβδομάδα στην οποία συμβαίνει είναι η 2η.
10. Από πού θα άρχιζες την αρίθμηση των εβδομάδων, ώστε να μπορείς από το νέο τύπο της μετατοπισμένης γραφικής παράστασης να βρεις τα ίδια αποτελέσματα;
    Απάντηση: Για $x=1$.
11. Παρατήρησε τον τύπο της μετατοπισμένης γραφικής παράστασης και βρες τη διαφορά με τον τύπο της αρχικής. Διατύπωσε σε μορφή κανόνα πώς μεταβάλλεται ο τύπος μιας συνάρτησης, όταν η γραφική της παράσταση μετακινηθεί κατά τον άξονα των x προς τα δεξιά.

Ομάδα Δ: Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

14. Ο Τροχός του Λούνα Παρκ

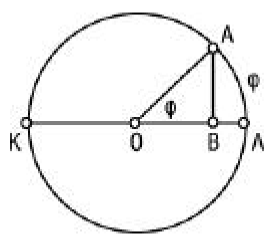
Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Ο Τροχός του Λούνα Παρκ είναι ένα πρόβλημα που η επίλυσή του στηρίζεται στη δυνατότητα προσδιορισμού της απόστασης του κινητού από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου κατά την ομαλή κυκλική κίνηση σε κάθε χρονική στιγμή με τη χρήση της συνάρτησης του ημιτόνου. Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν τη θέση του κινητού (επιβάτης του τροχού) από ένα δεδομένο άξονα αναφοράς (έδαφος, πλατφόρμα) κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης του τροχού και κάτω από διαφορετικές τιμές της ταχύτητας περιστροφής του.

΄Ενταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα, στη διδασκαλία της συνάρτησης y=ημx, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί στη Φυσική την κυκλική κίνηση.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2-3 διδακτικές ώρες

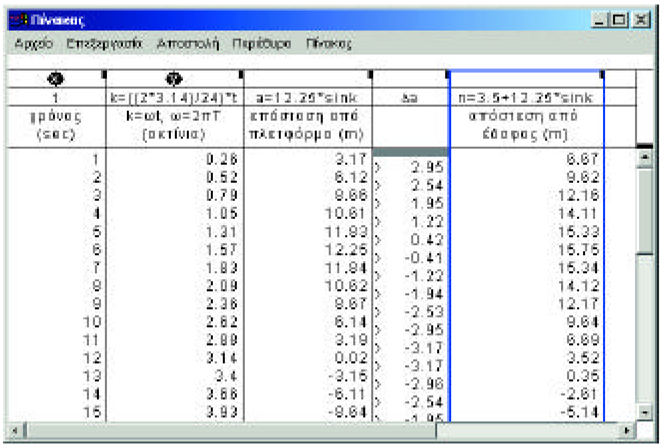
Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
> Να χρησιμοποιήσουν το ημίτονο γωνίας για να εκφράσουν τις μεταβολές του ύψους του κινητού κατά την κυκλική κίνηση.
> Να μελετήσουν τη συνάρτηση y=ημx μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της (τύπος, πίνακας τιμών, γράφημα).
> Να μετασχηματίσουν γραφικά τη συνάρτηση y=ημx και να μελετήσουν τις συνέπειες των μετασχηματισμών στον τύπο της.
> Να κατανοήσουν την αναγκαιότητα περιορισμού του πεδίου ορισμού της συνάρτησης y=ημx με βάση τα δεδομένα του προβλήματος.

Παρατηρήσεις
1. Προτείνεται να γίνει αρχικά μία συζήτηση μέσα στην τάξη για τους νόμους που διέπουν την κυκλική κίνηση ή σε συνεννόηση με τον καθηγητή της Φυσικής αυτό να έχει γίνει στην ώρα της Φυσικής.
2. Στο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι τύποι της κυκλικής κίνησης:
   α) **φ=ωt**, όπου φ το τόξο που διαγράφει το κινητό (σε ακτίνια), ω η γωνιακή ταχύτητα και t ο χρόνος περιστροφής
   β) **ω=2π/Τ**, όπου Τ η περίοδος περιστροφής.
3. Προτείνεται, προτού οι μαθητές εμπλακούν με τα ερωτήματα του προβλήματος, να σχεδιάσουν στο τετράδιό τους ένα σχήμα (βλ. εικόνα 1) που αναπαριστά τις συνθήκες του προβλήματος και στο οποίο θα φαίνεται η απόσταση του σημείου Α (επιβάτης του τροχού) από την πλατφόρμα (ΚΛ).



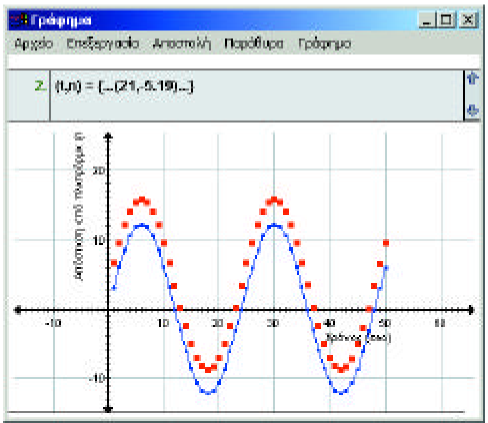
εικόνα 1

4. Τα ερωτήματα 1, 2 μπορούν να απαντηθούν δουλεύοντας οι μαθητές στο τετράδιό τους και χρησιμοποιώντας την ‘Αριθμομηχανή’, για να κάνουν πράξεις. Στην ερώτηση 2 όμως μπορούμε να επανέλθουμε, αφού οι μαθητές έχουν κατασκευάσει τον πίνακα του ερωτήματος 4, με την παρότρυνση να δημιουργήσουν μια στήλη με τη χρήση της εντολής ‘Διαφορά’ από το μενού ‘Πίνακας’ όπως φαίνεται στην εικόνα 2.
5. Στο ερώτημα 2 προτείνεται να αιτιολογηθούν τα αρνητικά πρόσημα.
6. Στο ερώτημα 3 να αξιοποιηθεί η δυνατότητα χρήσης τύπων για τη δημιουργία εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο ‘Πίνακας’. Σαν ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμοποιούμε το χρόνο και εκφράζουμε τη γωνιακή ταχύτητα και την απόσταση από την πλατφόρμα συναρτήσει του χρόνου. Προτεινόμενη κλίμακα φαίνεται στην εικόνα 2 (άξονας x’x : -20 έως 20 και βήμα 10, άξονας y’y: -20 έως 20 και βήμα 10).
7. Στο ερώτημα 5, προκειμένου να φανούν τα σημεία στη γραφική παράσταση, πρέπει να γίνει ‘Αλλαγή κλίμακας’ από το μενού ‘Γράφημα’.
8. Για το ερώτημα 6 οι μαθητές θα πρέπει να προσεγγίσουν τα σημεία που έστειλαν στο ‘Γράφημα’ μετασχηματίζοντας την καμπύλη y=ημx με αυξομειώσεις, έτσι ώστε να περνάει από τα σημεία, και να περιγράψουν πώς το έκαναν.
9. Στο ερώτημα 7 έχουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους την απόσταση από το έδαφος, τη διαφορετική γωνιακή ταχύτητα και τη διαφορετική διάμετρο του τροχού.
10. Στο ερώτημα 8 θα πρέπει να διαπιστώσουν ότι, παρότι αλλάζει το πεδίο ορισμού (από 0-300), το σύνολο των τιμών παραμένει το ίδιο λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης του ημιτόνου.


Πίνακες
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Περιβάλλον Πίνακας

t	k=((2*3.14)/24)*t	a=12.25*sink	Δa	n=3.5+12.25*sink
χρόνος (sec)	k=ωt, ω=2πT (ακτίνια)	απόσταση από πλατφόρμα (m)		απόσταση από έδαφος (m)
1	0.26	3.17	2.95	6.67
2	0.52	6.12	2.54	9.62
3	0.79	8.66	1.95	12.16
4	1.05	10.61	1.22	14.11
5	1.31	11.83	0.42	15.33
6	1.57	12.25	-0.41	15.75
7	1.83	11.84	-1.22	15.34
8	2.09	10.62	-1.94	14.12
9	2.36	8.67	-2.53	12.17
10	2.62	6.14	-2.95	9.64
11	2.88	3.19	-3.17	6.69
12	3.14	0.02	-3.17	3.52
13	3.4	-3.15	-2.98	0.35
14	3.66	-6.11	-2.54	-2.61
15	3.93	-8.64	-1.95	-5.14

εικόνα 2



εικόνα 3

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Φαντάσου πως είσαι ανεβασμένος στον τροχό του Λούνα Παρκ ο οποίος περιστρέφεται. Θεωρούμε αυτού του είδους την κίνηση κυκλική, αφού το σώμα μας ακολουθεί την κυκλική κίνηση του τροχού.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο τροχός έχει διάμετρο 24,5 m και εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 δευτερόλεπτα, ενώ στρέφεται με φορά αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο τροχός είναι κατασκευασμένος με τέτοιον τρόπο, ώστε η χαμηλότερη θέση του να απέχει από το έδαφος 3,5 m. Η πλατφόρμα από την οποία ανεβαίνεις βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το κέντρο του τροχού. Ξεκινώντας λοιπόν το γύρο με τον τροχό, η θέση σου βρίσκεται στο ύψος του κέντρου του.

Πριν ξεκινήσεις, σχεδίασε ένα σχήμα για να βοηθηθείς.

1. Πόσο απέχεις από την πλατφόρμα μετά από 3 sec; (Να στρογγυλοποιήσεις την απάντησή σου στο πλησιέστερο εκατοστό). Σε πόση ώρα θα βρεθείς στο υψηλότερο σημείο του γύρου;
   Απάντηση: Απόσταση=8,66m. Σε 6 sec.
2. Πόσο απέχεις από την πλατφόρμα μετά από 9 sec; Μετά από 12, 15, 36 sec;
   Απάντηση: 8,67m, 0,02m, -8,64m, 0m
3. Να κατασκευάσεις έναν πίνακα στο Function Probe, για να εκφράσεις τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο και το ύψος πάνω ή κάτω από την πλατφόρμα, για δύο τουλάχιστον πλήρεις περιστροφές του τροχού (με βήμα 1). Να εξηγήσεις πώς προέκυψαν οι τιμές του πίνακα.
4. Ανεβαίνεις περισσότερο τα πρώτα 3 sec ή τα 3 επόμενα; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου. Για να διευκολυνθείς στην απάντησή σου μπορείς να δημιουργήσεις μία στήλη ’διαφορών’ ως εξής: κάνεις κλικ με το αριστερό πλήκτρο στη στήλη που δείχνει την απόσταση από την πλατφόρμα για να την ενεργοποιήσεις, και επιλέγεις την εντολή ’Διαφορά’ από το μενού ’Πίνακας’.
5. Να στείλεις τις τιμές των κατάλληλων στηλών από το παράθυρο ‘Πίνακας’ στο παράθυρο ‘Γράφημα’, για να δημιουργήσεις τη γραφική παράσταση του ύψους από την πλατφόρμα συναρτήσει του χρόνου. Στο παράθυρο ‘Γράφημα’ να πληκτρολογήσεις τον τύπο της συνάρτησης που μας δίνει την απόσταση από την πλατφόρμα. Τι παρατηρείς;
6. Να δημιουργήσεις το διάγραμμα της y=ημx. Να δείξεις με ποιον τρόπο μπορείς να χρησιμοποιήσεις μετασχηματισμούς στη γραφική παράσταση του y=ημx, για να παραγάγεις το διάγραμμα που αντιστοιχεί στον τροχό του Λούνα Παρκ.
   Απάντηση: Πρώτα γίνεται μία οριζόντια αυξομείωση κατά 12,25 και κατόπιν μία κάθετη αυξομείωση κατά 3 μέχρι να συμπέσει η καμπύλη με σημεία που έχουν σταλεί από τον πίνακα.
7. Πώς θα άλλαζε ο πίνακας, το γράφημα και ο τύπος σου αν:
   > Σε ενδιέφερε να μάθεις το ύψος από το έδαφος και όχι από την πλατφόρμα;
   > Ο τροχός περιστρεφόταν με τη διπλάσια ταχύτητα; Ή με τη μισή της αρχικής, ταχύτητα;
   > Η διάμετρος του τροχού ήταν 23 m;
   > Η πλατφόρμα ήταν τοποθετημένη στο κάτω μέρος του τροχού;
8. Αν η βόλτα με τον τροχό του Λούνα Πάρκ διαρκεί πέντε λεπτά, ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το πεδίο τιμών της συνάρτησης που αντιστοιχεί σε αυτά τα δεδομένα;

15. Πρόβλεψη θερμοκρασιών

Σύντομη Περιγραφή

Οι μαθητές καλούνται να βρουν την κατάλληλη συνάρτηση που μοντελοποιεί ένα δείγμα τιμών που αφορούν τη θερμοκρασία σε ένα τόπο. Για να βρουν την κατάλληλη συνάρτηση, θα πρέπει να μετασχηματίσουν κατάλληλα τη συνάρτηση του συνημιτόνου, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της τελικής συνάρτησης να περνάει από τα σημεία που αντιστοιχούν στις δεδομένες τιμές θερμοκρασίας.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται να διδαχθεί στο κεφάλαιο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη Β΄ Λυκείου.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

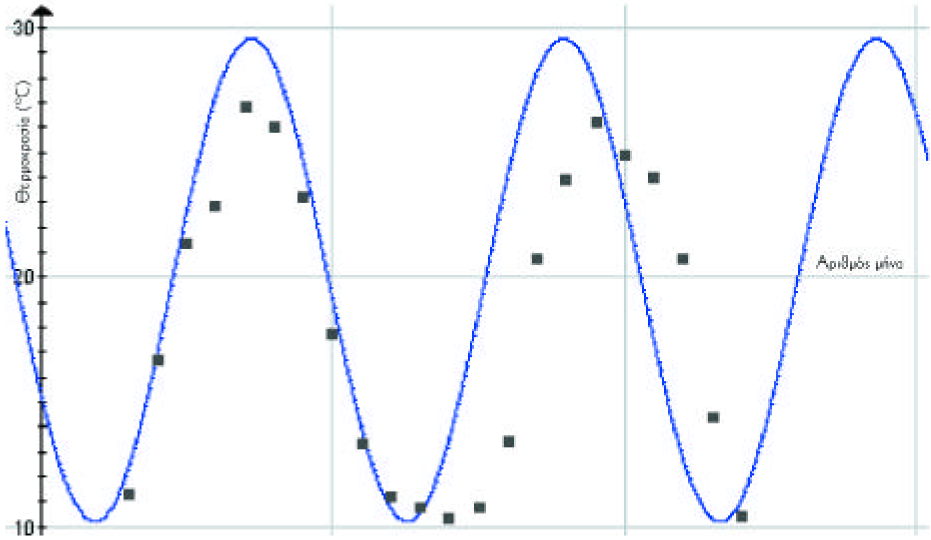
Οι μαθητές:

- Να μετασχηματίζουν κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του συνημιτόνου, ώστε να περνάει από δοσμένο σύνολο σημείων.
- Να βρίσκουν από το σύνολο τιμών της συνάρτησης του συνημιτόνου την περίοδό της.
- Να συνδέουν κατάλληλα τον τύπο της συνάρτησης του συνημιτόνου με τον οποιοδήποτε μετασχηματισμό της γραφικής του παράστασης.

Παρατηρήσεις

1. Στο ερώτημα 1 να γίνει χρήση της εντολής ‘Γέμισμα’ για τη συμπλήρωση της πρώτης στήλης των μηνών. Σχετικά με τα στατιστικά στοιχεία που ζητούνται, να γίνει χρήση της αντίστοιχης εντολής ‘Εμφάνιση στατιστικών’ από το μενού ‘Πίνακας’.
2. Στο ερώτημα 2 οι μαθητές θα πρέπει να αλλάξουν κατάλληλα την κλίμακα για να δουν τα σημεία. Θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουν ότι οι τιμές της θερμοκρασίας δεν μεταβάλλονται τυχαία αλλά υπάρχει αύξηση σε ένα συγκεκριμένο διάστημα (6 μηνών) και μείωση στο επόμενο διάστημα 6 μηνών.
3. Προτείνεται οι μαθητές να σχηματίσουν στο ίδιο παράθυρο ‘Γράφημα’ τη γραφική παράσταση του συνημιτόνου και να προσπαθήσουν με οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις και αυξομειώσεις να βρουν την κατάλληλη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση να προσεγγίζει τα δοθέντα σημεία. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί πως η μοντελοποίηση δεν σημαίνει να βρουν μια συνάρτηση που να περνάει ακριβώς από όλα τα σημεία, αλλά από τα περισσότερα. Έτσι, οι απαντήσεις που δίνονται με βάση ένα μοντέλο είναι πάντα προσεγγιστικές. Οι μαθητές για κάθε μετασχηματισμό που θα κάνουν θα εξηγούν γραπτά γιατί τον έκαναν. Καλό είναι να μην χρησιμοποιήσουν την επιλογή ‘Εμφάνιση μετασχηματισμών’ από το παράθυρο διαλόγου ‘Επιλογές Γραφήματος’, γιατί πολλές φορές ο τύπος που εμφανίζεται είναι πολύπλοκος.
4. Στο ερώτημα 4 θα πρέπει οι μαθητές να διακρίνουν τι σημαίνει ένα φαινόμενο να είναι περιοδικό.

5. Μια μορφή της τελικής οθόνης φαίνεται στην εικόνα 1.
6. Στο τέλος της δραστηριότητας προτείνεται να συζητηθούν στην τάξη τα διάφορα μοντέλα που βρήκαν οι μαθητές για να προσεγγίσουν το φαινόμενο.



εικόνα 1

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Σας δίνετε ο παρακάτω πίνακας τιμών μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας (βαθμοί Κελσίου) Αθηνών (Ιανουάριος 1983-Δεκέμβριος1984).

Μήνας	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Θερμοκρασία (^{0}C)	8.8	7.5	11.3	16.7	21.4	22.9	26.8	26	23.2	17.7	13.3	11.2
Μήνας	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Θερμοκρασία (^{0}C)	10.8	10.3	10.8	13.4	20.7	23.9	26.2	24.9	24	20.7	14.4	10.4

1. Να δημιουργήσεις τον παραπάνω πίνακα στο παράθυρο ‘Πίνακας’ που θα αποτελείται από 2 στήλες: τη στήλη ‘Μήνας’ που παίρνει τιμές από 1-24, και τη στήλη ‘Θερμοκρασία’. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή, η μέγιστη τιμή και το εύρος των τιμών του παραπάνω δείγματος; Επίλεξε την εντολή ‘Εμφάνιση στατιστικών’ στο μενού ‘Πίνακας’ για να απαντήσεις στο ερώτημα.
2. Στείλε τα σημεία στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Τι παρατηρείς σχετικά με την αύξηση και μείωση των τιμών της θερμοκρασίας;
3. Κάποιος ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση του συνημιτόνου με κατάλληλους μετασχηματισμούς ‘μοντελοποιεί’ τη θερμοκρασία στην περίοδο αυτή. Στο ίδιο γράφημα κάνε τη γραφική παράσταση του συνx και προσπάθησε με κατάλληλους μετασχηματισμούς (μετατόπιση, αυξομείωση) της συνάρτησης αυτής να προσεγγίσεις τα σημεία που φαίνονται. Γράψε στο φύλλο εργασίες τι είδους μετασχηματισμό κάνεις κάθε φορά καθώς και το πώς γίνεται κάθε φορά ο τύπος της συνάρτησης συνx, όταν εκτελεστεί ο αντίστοιχος μετασχηματισμός.
4. Αν η θερμοκρασία είναι φαινόμενο περιοδικό, μπορείς να προβλέψεις από τη γραφική παράσταση τις θερμοκρασίες για τους επόμενους δύο μήνες του 1985;
5. Ποια είναι η περίοδος στο παραπάνω δείγμα;

16. Μελέτη των συναρτήσεων y=ημx, y=συνx και των μετασχηματισμών τους

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Στη δραστηριότητα αυτή καλούνται οι μαθητές να μελετήσουν τις συναρτήσεις ημίτονο (y=ημx) και συνημίτονο (y=συνx) μέσα από τις γραφικές τους παραστάσεις, καθώς και τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών (μετατοπίσεις, αυξομειώσεις, συμμετρία) στους τύπους και στις γραφικές τους παραστάσεις.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να ενταχθεί στην αντίστοιχη ενότητα της Α' Λυκείου, όπου οι μαθητές διδάσκονται τις συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
> Να μελετήσουν τα ακρότατα των συναρτήσεων y=ημx και y=συνx, τις ρίζες τους και την περίοδό τους μέσα από τις γραφικές τους παραστάσεις, καθώς και τα αντίστοιχα στοιχεία των συναρτήσεων που προέρχονται από τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων αυτών.
> Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών (μετατοπίσεις, αυξομειώσεις, συμμετρία) στους τύπους και στις γραφικές τους παραστάσεις.
> Να μπορούν να προβλέπουν την αλλαγή των τύπων των προαναφερθεισών συναρτήσεων μετά από κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό των γραφικών τους παραστάσεων.
> Να μπορούν να προβλέπουν τη θέση των γραφημάτων μετά από κάποια αλλαγή στους τύπους των συναρτήσεων y=ημx και y=συνx.

Παρατηρήσεις
1. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χωριστεί σε δύο ανεξάρτητες δραστηριότητες. Η μία για τη μελέτη του ημιτόνου και η άλλη για τη μελέτη του συνημιτόνου. Άλλωστε και το φύλλο εργασίας του μαθητή είναι δομημένο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνει το διαχωρισμό αυτό.
2. Προτείνεται η ερώτηση 7 να αποτελέσει αντικείμενο διεξοδικής συζήτησης σε όλη την τάξη, έτσι ώστε να διατυπωθούν οι αντίστοιχοι κανόνες για το ρόλο των Α, Β, Γ, και Δ.
2. Προτείνεται κάθε ομάδα στο τέλος της δραστηριότητας να γράψει τα συμπεράσματά της στο τετράδιο, ξεχωριστά για το ημίτονο και το συνημίτονο. Τα συμπεράσματα να παρουσιαστούν προς συζήτηση μέσα στην τάξη.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος

1. Να κατασκευάσεις στο Function Probe τη γραφική παράσταση της y=ημx. Στον οριζόντιο άξονα να ορίσεις κλίμακα από το -4π ως το 4π (-4 ως 4) με βήμα 0.5π (0.5) και στον κατακόρυφο άξονα από το -5π ως το 5π (-5 ως 5) με βήμα 1π (1).
   Να μελετήσεις τη γραφική παράσταση και να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:
   α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
   β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
   γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
   δ) Ποια είναι η περίοδος;
2. Να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία μετασχηματισμών από την 'Εργαλειοθήκη', για να εκτελέσεις την ακόλουθη διερεύνηση:
   α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
   β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
   γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
   δ) Ποια είναι η περίοδος;
   ε) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;
   σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   > Έχοντας επιλεγμένη τη γραφική παράσταση της y=ημx, να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μετατόπισης, για να μεταφέρεις το διάγραμμα κατά τρεις μονάδες, κατακόρυφα.
   > Κάνε κλικ στη γραφική παράσταση της y=ημx, για να την επιλέξεις ξανά. Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο αυξομείωσης, για να 'ανοίξεις' το διάγραμμα κατακόρυφα κατά τρεις μονάδες.
   > Να καθαρίσεις το παράθυρο 'Γράφημα' από όλες τις γραφικές παραστάσεις (μενού 'Επεξεργασία') και να αφήσεις μόνο το διάγραμμα της y=ημx. Κάνε κλικ πάνω σε αυτό, για να το επιλέξεις. Χρησιμοποίησε το εργαλείο συμμετρίας, για να δημιουργήσεις το συμμετρικό του ως προς τον άξονα των xx΄.
3. Να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία μετασχηματισμών από την 'Εργαλειοθήκη', για να εκτελέσεις την ακόλουθη διερεύνηση:
   α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
   β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
   γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
   δ) Ποια είναι η περίοδος;
   ε) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;
   σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   > Έχοντας επιλεγμένη την γραφική παράσταση της y=ημx να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μετατόπισης, για να μεταφέρεις το διάγραμμα κατά τρεις μονάδες οριζόντια.
   > Κάνε κλικ στη γραφική παράσταση της y=ημx, για να την επιλέξεις ξανά. Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο αυξομείωσης, για να ανοίξεις το διάγραμμα οριζόντια κατά τρεις μονάδες.
   > Να καθαρίσεις το παράθυρο 'Γράφημα' από όλες τις γραφικές παραστάσεις (μενού

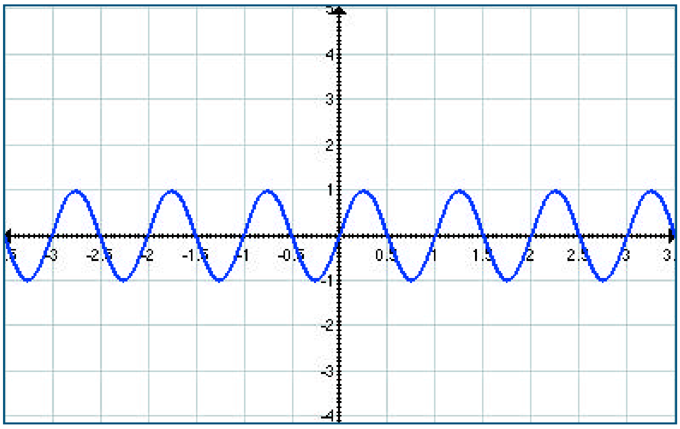
‘Επεξεργασία’) και να αφήσεις μόνο το διάγραμμα της y=ημx. Κάνε κλικ πάνω σε αυτό, για να το επιλέξεις. Χρησιμοποίησε το εργαλείο συμμετρίας, για να δημιουργήσεις το συμμετρικό του ως προς τον άξονα των yy΄.

4. Να καθαρίσεις το παράθυρο ‘Γράφημα’ και να κατασκευάσεις τη γραφική παράσταση του y=συνx και να επαναλάβεις τα βήματα 1, 2 και 3 για τη συνάρτηση αυτή.
5. Να περιγράψεις τι συμβαίνει στη γραφική παράσταση και στον τύπο των συναρτήσεων y=ημx και y=συνx όταν:
   α) το διάγραμμα μεταφέρεται οριζόντια
   β) το διάγραμμα μεταφέρεται κατακόρυφα
   γ) το διάγραμμα ανοίγει κατακόρυφα
   δ) το διάγραμμα ανοίγει οριζόντια
   ε) πάρουμε το συμμετρικό του διαγράμματος ως προς τον άξονα των x
   στ) πάρουμε το συμμετρικό του διαγράμματος ως προς τον άξονα των y
6. Για κάθε σύνολο τύπων, αρχικά να προβλέψεις ποια από τα διαγράμματα θα μοιάζουν και στη συνέχεια κατασκευάσέ τα στο ίδιο σύστημα αξόνων.
   α) y=ημ(x), y=4ημ(x), y=ημ(4x)
   β) y=συν(x), y =ημ(x)+6,28, y = συν(x+2π)
   γ) y=ημ(x), y=0,5ημ(x-2π)
   δ) y=συν(x), y=-2συν(0,5x)
7. Γενικά, σε σύγκριση με την y=ημx, ποια είναι η επίδραση των Α, Β, Γ, Δ στη γραφική παράσταση της y=A*ημ(Bx+Γ)+Δ;

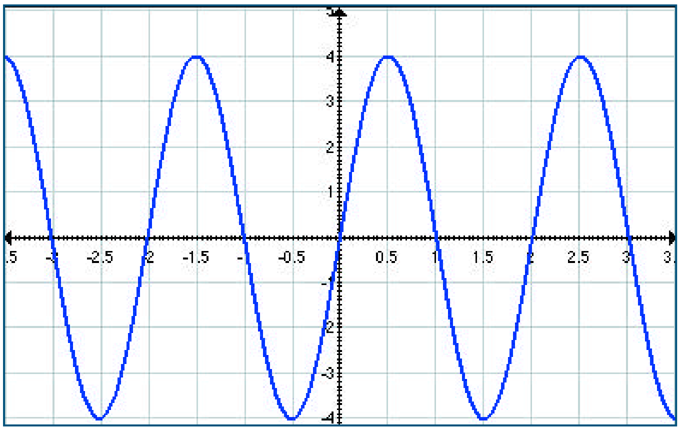
Β’ Μέρος

1. Για κάθε ένα από τα έξι διαγράμματα στις επόμενες σελίδες, να βρεις τον τύπο της συνάρτησης ταιριάζοντας ένα διάγραμμα στην οθόνη με αυτό που υπάρχει στο χαρτί. (Να ξεκινήσεις κάνοντας το παράθυρο ‘Γράφημα’ στην οθόνη το ίδιο μέγεθος με αυτό που έχουν τα διαγράμματα στο βιβλίο σου και ρύθμισε την κλίμακα ανάλογα. Να δώσεις ιδιαίτερη προσοχή στη διαδικασία (οριζόντια ή κατακόρυφη αυξομείωση, μετατόπιση κτλ.) που χρησιμοποιείς κάθε φορά, για να επιτύχεις το επιθυμητό αποτέλεσμα.

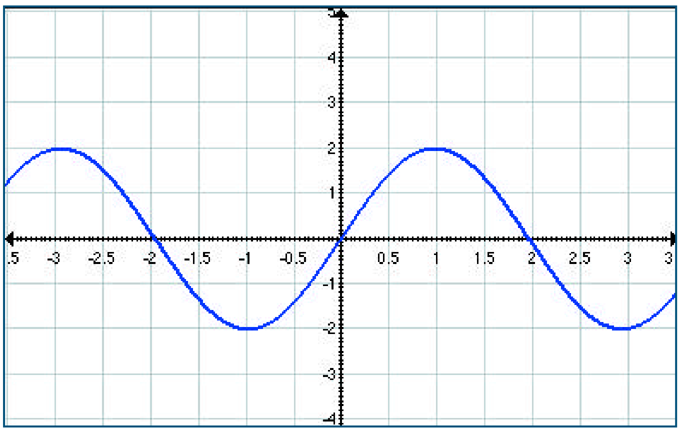
   ***Ενδεικτικές** απαντήσεις:*
   Διάγραμμα 1 Απάντηση: y=sin(6,25x)
   Διάγραμμα 2 Απάντηση: y=4sin(3,23x)
   Διάγραμμα 3 Απάντηση: y=sin(1,61x)
   Διάγραμμα 4 Απάντηση: y=2cos(3,13x)
   Διάγραμμα 5 Απάντηση: y=3cos(x-1)-3
   Διάγραμμα 6 Απάντηση: y=2cosx+3



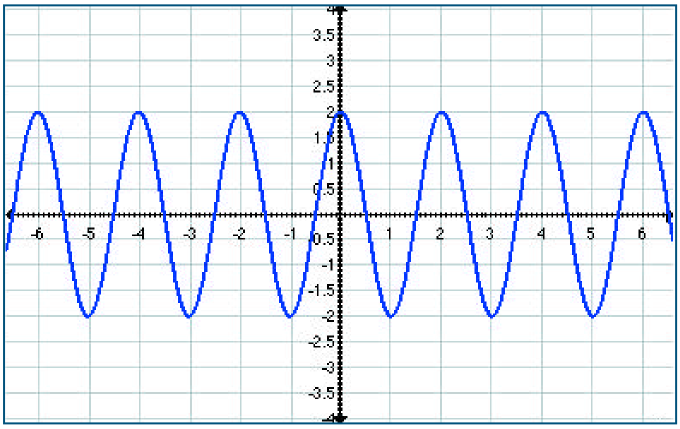
διάγραμμα 1



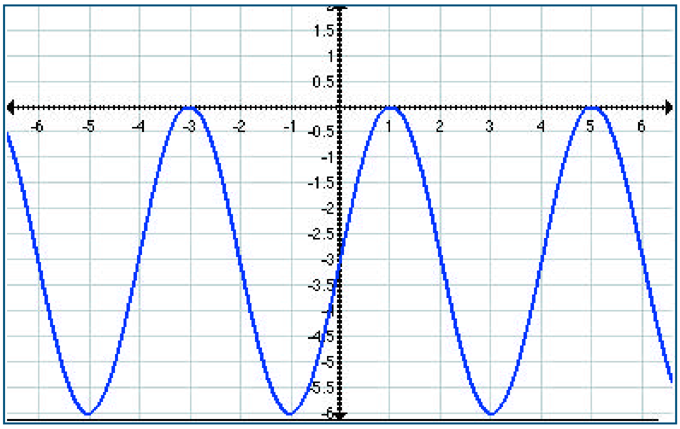
διάγραμμα 2



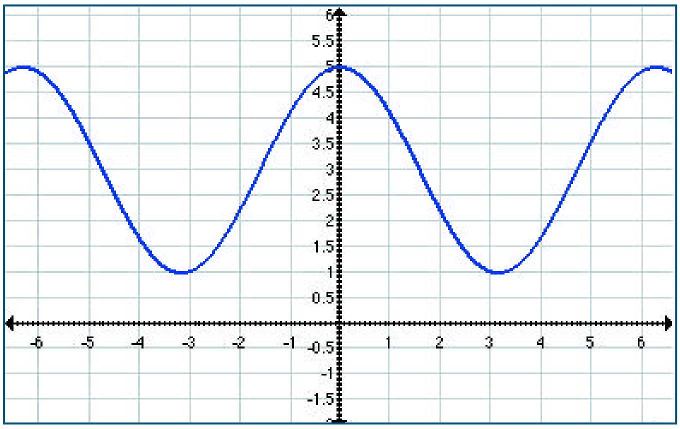
διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5



διάγραμμα 6

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΑ: Αν τελείωσες και έχεις όρεξη για λίγη ακόμα δουλειά, τότε δοκίμασε να ξανακάνεις τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις, αντικαθιστώντας όμως αυτή τη φορά τα συνημίτονα με τα ημίτονα και αντίστροφα.

17. Μελέτη των συναρτήσεων y=εφx, y=σφx και των μετασχηματισμών τους

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Στη δραστηριότητα αυτή καλούνται οι μαθητές να μελετήσουν τις συναρτήσεις εφαπτομένη (y=εφx) και συνεφαπτομένη (y=σφx) μέσα από τις γραφικές τους παραστάσεις, καθώς και τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών (μετατοπίσεις, αυξομειώσεις, συμμετρία) στους τύπους και στις γραφικές τους παραστάσεις.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να ενταχθεί στην αντίστοιχη ενότητα της Α' Λυκείου, όπου οι μαθητές διδάσκονται τις συναρτήσεις εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- Να μελετήσουν τα ακρότατα των συναρτήσεων y=εφx και y=σφx, τις ρίζες τους και την περίοδό τους μέσα από τις γραφικές τους παραστάσεις, καθώς και τα αντίστοιχα στοιχεία των συναρτήσεων που προέρχονται από τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων αυτών.
- Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών (μετατοπίσεις, αυξομειώσεις, συμμετρία) στους τύπους και στις γραφικές τους παραστάσεις.
- Να μπορούν να προβλέπουν την αλλαγή των τύπων των προαναφερθεισών συναρτήσεων μετά από κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό των γραφικών τους παραστάσεων.
- Να μπορούν να προβλέπουν τη θέση των γραφημάτων μετά από κάποια αλλαγή στους τύπους των συναρτήσεων y=εφx και y=σφx.

Παρατηρήσεις

1. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χωριστεί σε δύο ανεξάρτητες δραστηριότητες. Η μία για τη μελέτη της εφαπτομένης και η άλλη για τη μελέτη της συνεφαπτομένης. Άλλωστε και το φύλλο εργασίας του μαθητή είναι δομημένο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνει το διαχωρισμό αυτό.
2. Προτείνεται κάθε ομάδα στο τέλος της δραστηριότητας, να γράψει τα συμπεράσματά της στο τετράδιο, ξεχωριστά για την εφαπτομένη και τη συνεφαπτομένη. Τα συμπεράσματα να παρουσιαστούν προς συζήτηση μέσα στην τάξη.

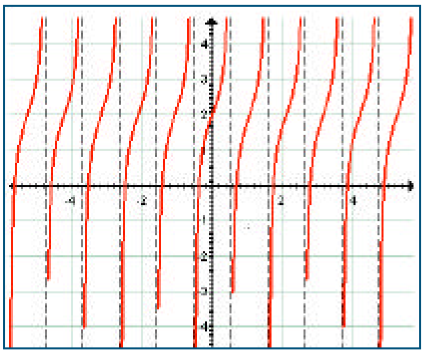
Φύλλο εργασίας για το μαθητή

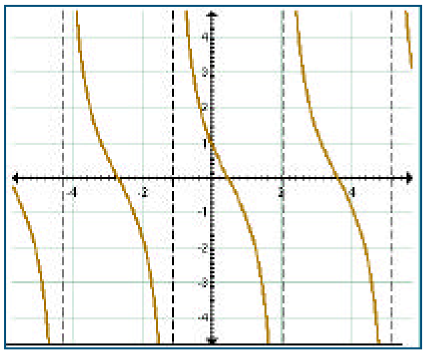
Α' Μέρος

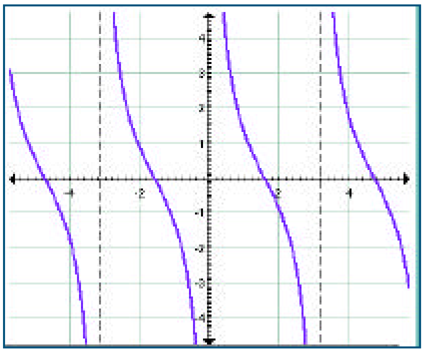
1. Να κατασκευάσεις στο Function Probe τη γραφική παράσταση της y=εφx. Στον οριζόντιο άξονα να ορίσεις κλίμακα από το -5π ως το 5π (-5 ως 5) με βήμα 0.5π (0.5) και στον κατακόρυφο άξονα από το -5π ως το 5π (-5 ως 5) με βήμα 0.5π (1).
   Να μελετήσεις τη γραφική παράσταση και να απαντήσεις στις ακόλουθες ερωτήσεις:
   α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
   β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
   γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
   δ) Ποια είναι η περίοδος;
2. Να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία μετασχηματισμών από την 'Εργαλειοθήκη' πάνω από το παράθυρο 'Γράφημα', για να εκτελέσεις την ακόλουθη διερεύνηση:
   α) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης;
   β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;
   γ) Ποιες είναι οι ρίζες;
   δ) Ποια είναι η περίοδος;
   ε) Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;
   σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   > Έχοντας επιλεγμένη τη γραφική παράσταση της y=εφx να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο μετατόπισης, για να μεταφέρεις το διάγραμμα κατά τρεις μονάδες, κατακόρυφα (οριζόντια).
   > Κάνε κλικ στη γραφική παράσταση της y=εφx, για να την επιλέξεις ξανά. Να χρησιμοποιήσεις το εργαλείο αυξομείωσης, για να 'ανοίξεις' το διάγραμμα κατακόρυφα (οριζόντια) κατά τρεις μονάδες.
   > Να καθαρίσεις το παράθυρο 'Γράφημα' από όλες τις γραφικές παραστάσεις και να αφήσεις μόνο το διάγραμμα της y=εφx. Κάνε κλικ πάνω σε αυτό, για να το επιλέξεις. Χρησιμοποίησε το εργαλείο συμμετρίας, για να δημιουργήσεις το συμμετρικό του ως προς τον άξονα των xx΄ (yy΄).
3. Να επαναλάβεις τα βήματα 1, 2 και 3 για τη συνάρτηση y=σφx.
4. Για κάθε σύνολο τύπων, αρχικά να προβλέψεις ποια από τα διαγράμματα θα μοιάζουν και στη συνέχεια κατασκεύασέ τα στο ίδιο σύστημα αξόνων.
   α) y=εφx, y=4εφx, y=εφ(4x)
   β) y=σφx, y=σφx+4,5, y=σφ(x+2π)
   γ) y= εφx, y=1,5εφ(x-π)
   δ) y= εφx, y=-2εφ(0,5x)

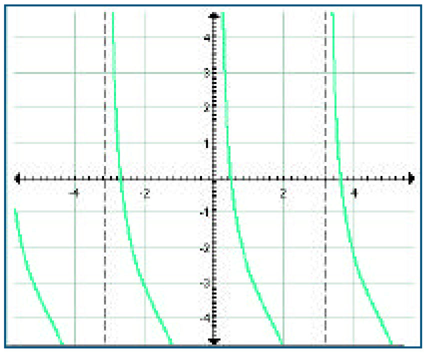
Β' Μέρος

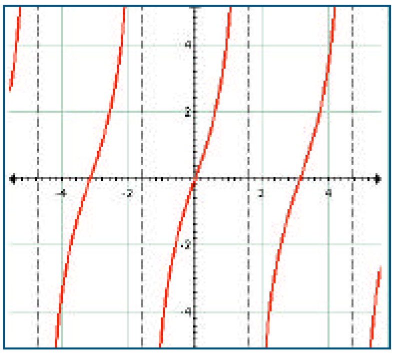
1. Για κάθε ένα από τα διαγράμματα στις επόμενες σελίδες, να βρεις τον τύπο της συνάρτησης ταιριάζοντας ένα διάγραμμα στην οθόνη με αυτό που υπάρχει στο χαρτί. (Να ξεκινήσεις κάνοντας το παράθυρο 'Γράφημα' στην οθόνη στο ίδιο μέγεθος με αυτό που έχουν τα διαγράμματα στο βιβλίο σου και ρύθμισε την κλίμακα ανάλογα. Να δώσεις ιδιαίτερη προσοχή στη διαδικασία (άνοιγμα οριζόντιο ή κατακόρυφο, μετατόπιση κτλ.) που χρησιμοποιείς κάθε φορά, για να επιτύχεις το επιθυμητό αποτέλεσμα.

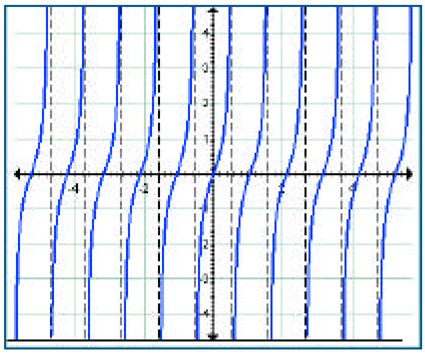

διάγραμμα 1


διάγραμμα 2


διάγραμμα 3


διάγραμμα 4


διάγραμμα 5


διάγραμμα 6

Ενδεικτικές *απαντήσεις:*

Διάγραμμα 1 Απάντηση: y=tan2x +2

Διάγραμμα 2 Απάντηση: y=cot(1,75x+0,79)

Διάγραμμα 3 Απάντηση: y= cotx

Διάγραμμα 4 Απάντηση: y=1,84cot(x-2,25)

Διάγραμμα 5 Απάντηση: y=tan1,54x

Διάγραμμα 6 Απάντηση: y=tan3,13x

Ομάδα Ε: Άλλες Συναρτήσεις

18. Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση της απόλυτης τιμής

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Στη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιείται η συνάρτηση της απόλυτης τιμής για την εισαγωγή των μαθητών στους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων (οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση, οριζόντια και κατακόρυφη αυξομείωση, συμμετρία). Οι μετασχηματισμοί μπορεί αρχικά να δημιουργούν σύγχυση, όταν όμως οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εργαστούν με ένα πίνακα τιμών και εργαλεία που 'οπτικοποιούν' τους μετασχηματισμούς αυτούς, ενισχύονται οι διαισθητικές τους αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και των μετασχηματισμών της.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να ενταχθεί στην αντίστοιχη ενότητα της Α' Λυκείου, όπου οι μαθητές διδάσκονται τη συνάρτηση της απόλυτης τιμής.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
- Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών στον τύπο και στο γράφημα της συνάρτησης y=abs(x).
- Να μπορούν να προβλέπουν την αλλαγή του τύπου της συνάρτησης μετά από κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό του γραφήματος της y=abs(x).
- Να μπορούν να προβλέπουν τη θέση του γραφήματος μετά από κάποια αλλαγή στον τύπο της συνάρτησης y=abs(x).

Παρατηρήσεις
1. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καθοδηγούνται στη διερεύνηση των μετασχηματισμών και των επιπτώσεών τους στο γράφημα και στον τύπο της y=abs(x) βήμα προς βήμα. Είναι χωρισμένη σε 5 μέρη, όπου το κάθε μέρος αποτελεί και μια διαφορετική ενότητα. Το πρώτο μέρος αφορά σε διαπιστώσεις που θα γίνουν στον πίνακα τιμών και στη γραφική παράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης y=abs(x). Το δεύτερο μέρος αφορά σε οριζόντιες και κατακόρυφες μετακινήσεις (μετατοπίσεις) των προηγούμενων σημείων, ενώ το τρίτο μέρος αφορά σε αυξομειώσεις τους (άνοιγμα και κλείσιμο). Το τέταρτο μέρος αφορά στην πρόβλεψη των γραφημάτων από τους τύπους της συνάρτησης και τέλος το πέμπτο μέρος αφορά στην περιγραφή των μετασχηματισμών από τις γραφικές παραστάσεις τους. Προτείνεται κάθε ομάδα, στο τέλος κάθε μέρους της δραστηριότητας, να γράφει στο τετράδιο τα συμπεράσματά της, τα οποία να συζητούνται με όλη την τάξη.
2. Προτείνεται η ερώτηση 2 του τέταρτου μέρους να αποτελέσει αντικείμενο διεξοδικής συζήτησης σε όλη την τάξη, έτσι ώστε να διατυπωθούν οι αντίστοιχοι κανόνες για το ρόλο των Α, Β, Γ και Δ.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος: Γραφική αναπαράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης 'Απόλυτη τιμή'

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' του Function Probe κατασκευάσε μια στήλη με τιμές του 'x' από -12 έως 12. Να κατασκευάσεις μια δεύτερη στήλη εισάγοντας y=abs(x). Περίγραψε τις συσχετίσεις που βλέπεις σε αυτή τη στήλη. Χρησιμοποίησε τις εντολές 'Διαφορά' και 'Λόγος', για να ανακαλύψεις και άλλες σχέσεις.
2. Επίλεξε την εντολή 'Σημεία σε Γράφημα' από το μενού 'Αποστολή' και άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα', για να δεις τη σχέση ανάμεσα στα x και y. (Έχε το παράθυρο ανοιχτό σε πλήρες μέγεθος για αυτή την άσκηση). Κάνε μια περιγραφή του διαγράμματος, συμπεριλαμβάνοντας τη θέση του κατώτατου σημείου και τη γωνία που σχηματίζει γραφική παράσταση με τον άξονα των x. Πώς φαίνονται στο διάγραμμα οι σχέσεις που βρήκες στον πίνακα;

Β' Μέρος: Μετατοπίσεις

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' μετάφερε τα σημεία στη γραφική παράσταση της y=abs(x) κατά έξι μονάδες, κατακόρυφα. Για να το πετύχεις αυτό, κάνε κλικ στο εικονίδιο μετατόπισης και από το παράθυρο διαλόγου επίλεξε το βέλος της κατακόρυφης μετατόπισης. Στη συνέχεια, σύρε τα σημεία της y=abs(x), κατά έξι μονάδες κατακόρυφα. Περίγραψε το νέο διάγραμμα: Τι έχει αλλάξει; Τι έμεινε ίδιο;
2. Να προβλέψεις τι επίδραση έχει η μετατόπιση στον πίνακα με τις τιμές (που έχεις κατασκευάσει) και στη συνέχεια να στείλεις τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας', επιλέγοντας την εντολή 'Σημεία σε Πίνακα' από το μενού 'Αποστολή'. (Θα εμφανιστούν δύο μηνύματα τα οποία θα σε προειδοποιούν ότι οι αρχικές στήλες για τα x και y θα απενεργοποιηθούν. Κάθε φορά θα κάνεις κλικ στο κουμπί 'ΟΚ' για να συνεχίσεις.) Δύο νέες στήλες θα εμφανιστούν στην οθόνη και θα αντιπροσωπεύουν τα μετατοπισμένα σημεία. Επαληθεύουν τα νέα σημεία τις προβλέψεις σου; Τι επίδραση έχει μια κατακόρυφη μετατόπιση στο παράθυρο 'Πίνακας';
3. Να προβλέψεις την επίδραση που έχει η μετατόπιση στον τύπο της y=abs(x). Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, γράψε τον τύπο σου στο παράθυρο 'Γράφημα', ως συνάρτηση προς σχεδίαση. Διέρχεται από τα νέα σημεία; Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου στο παράθυρο 'Πίνακας', μπορείς να στείλεις τον τύπο σου από το παράθυρο 'Γράφημα', επιλέγοντας την εντολή 'Ορισμός αντικειμένου' στο παράθυρο 'Γράφημα' και γράφοντας 'z=g1(x)' στο παράθυρο 'Πίνακας'. Τα σημεία από τη g1(x) ταυτίζονται με τα μετατοπισμένα σημεία; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης μετατόπισης στον τύπο;
4. Τι επίδραση θα είχε μια κατακόρυφη μετατόπιση 11 μονάδων προς τα κάτω, στον πίνακα, στο διάγραμμα και στον τύπο;
5. Πραγματοποίησε τώρα αντίστοιχες οριζόντιες μετατοπίσεις στην αρχική συνάρτηση y=abs(x): α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στις τιμές του πίνακα; β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στον τύπο; γ) Ποια θα ήταν η επίδραση, αν η μετατόπιση γινόταν προς τα αριστερά;

Γ' Μέρος: Αυξομειώσεις

1. Καθάρισε τον πίνακα από όλες τις στήλες, εκτός της αρχικής x (-12<x<12) και της y=abs(x). Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' από όλα τα διαγράμματα, εκτός από τα σημεία της y=abs(x). Άνοιξε τη γραφική παράσταση κατακόρυφα με συντελεστή 2, χρησιμοποιώντας το εργαλείο αυξομείωσης. (Κάνε κλικ στο εικονίδιο αυξομείωσης και επίλεξε την κατακόρυφη αυξομείωση). Πάτησε το πλήκτρο 'Enter', για να τοποθετήσεις τη Γραμμή Άγκυρας στο y=0. Σύρε το διάγραμμα κατακόρυφα, μέχρι να διαβάζεις στο συντελεστή για το άνοιγμα το '2'. Να συγκρίνεις τα παλιά με τα νέα σημεία. Τι έχει αλλάξει; Τι έχει παραμείνει το ίδιο;
2. α) Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον πίνακα τιμών: Πώς θα αλλάξει κάθε σημείο; Στη συνέχεια στείλε τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας'. β) Ήταν σωστή η πρόβλεψη σου; γ) Ποια είναι η επίδραση ενός ανοίγματος με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
3. Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον τύπο της y=abs(x). Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου χρησιμοποιώντας είτε το παράθυρο 'Γράφημα' είτε το παράθυρο Πίνακας. Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
4. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία για μια κατακόρυφη αυξομείωση με συντελεστή το ½ (γνωστό και ως συρρίκνωση). Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το ½ στις τιμές του πίνακα; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με παράγοντα το ½ στον τύπο της συνάρτησης;
5. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία τώρα για μια οριζόντια αυξομείωση.
   α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
   β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το ½ στις τιμές του πίνακα;
   γ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
   δ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το ½ στον τύπο της συνάρτησης;

Δ' Μέρος: Πρόβλεψη γραφημάτων από τους τύπους των συναρτήσεων

1. Να προβλέψεις τη μορφή της γραφικής παράστασης του y=abs(2x+8). Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, δημιουργώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποιες είναι οι μεταφορές και/ή οι αυξομειώσεις που σχετίζονται με αυτή την συνάρτηση; Να σχεδιάσεις την y=2abs(x+4). Ποια είναι η σχέση της με τη γραφική παράσταση της y=abs(2x+8);
2. Τι μπορείς να πεις για τη θέση του κατώτερου σημείου και την κλίση των κλάδων στη γραφική παράσταση της y= Aabs(Bx+Γ)+Δ;
3. Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε χαρτί και έλεγξε τα σχέδιά σου δημιουργώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα με το Function Probe. Να αναφέρεις τους μετασχηματισμούς (κατακόρυφη ή οριζόντια μετατόπιση, κατακόρυφη ή οριζόντια αυξομείωση, συμμετρική) που μπορούν να πραγματοποιηθούν στην y=abs(x), για να προκύψουν τα νέα διαγράμματα. Έλεγξέ το στο Function Probe.

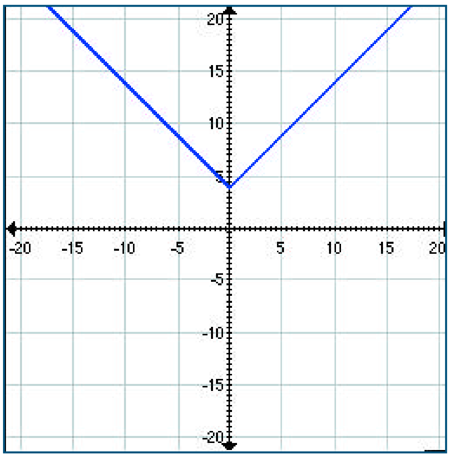
y = abs(x)-5
y = -2abs(x)-5
y = abs(x+8)
y = abs(2x+8)
y = -abs(2x +8)
y = -2abs(2x +8)-5

Ε' Μέρος: Περιγραφή μετασχηματισμών από τις γραφικές αναπαραστάσεις τους.

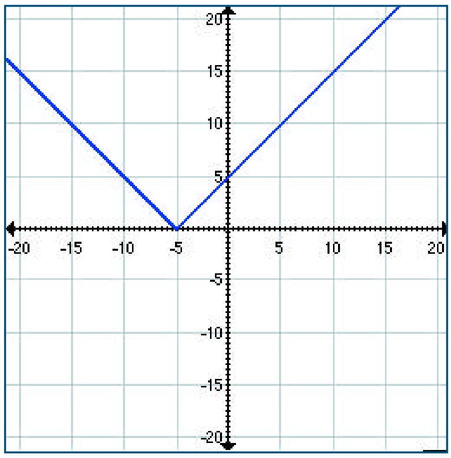
Για κάθε διάγραμμα της επόμενης σελίδας;

i. Να αναφέρεις με ποιον τρόπο η γραφική παράσταση της y=abs(x) μετασχηματίστηκε στο δοθέν διάγραμμα.
ii. Να γράψεις τον τύπο της συνάρτησης, στην οποία αντιστοιχεί το διάγραμμα χρησιμοποιώντας το Function Probe, για να ελέγξεις την απάντησή σου.

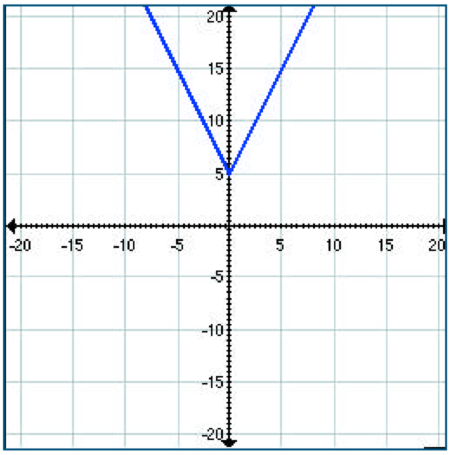
Ενδεικτικές *απαντήσεις:*
Διάγραμμα 1 Απάντηση: y=absx+4
Διάγραμμα 2 Απάντηση: y=abs(x+5)
Διάγραμμα 3 Απάντηση: y= 1,5(abs(x)+5)
Διάγραμμα 4 Απάντηση: y= 2abs(x-7)
Διάγραμμα 5 Απάντηση: y= -abs(x)+10
Διάγραμμα 6 Απάντηση: y=abs(x+5,23)-10,58



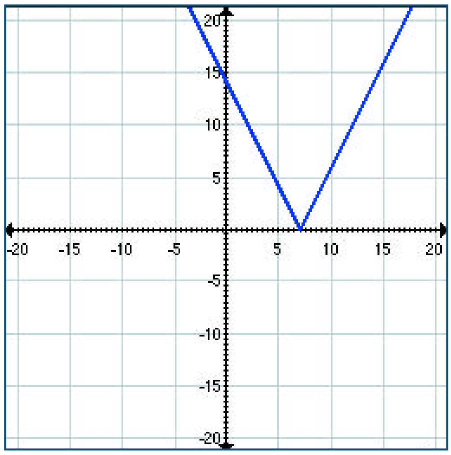
διάγραμμα 1



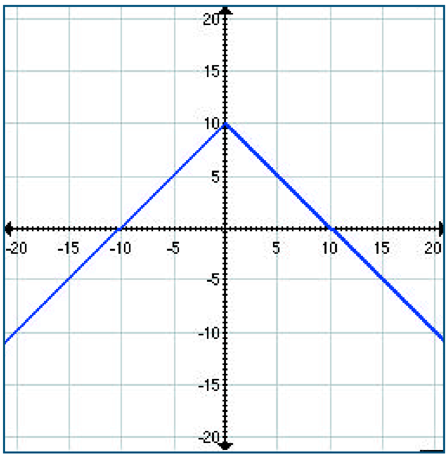
διάγραμμα 2



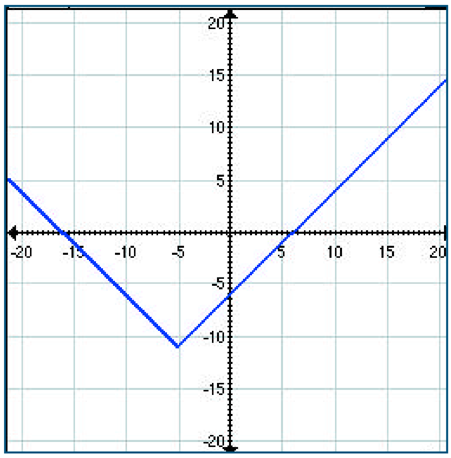
διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5



διάγραμμα 6

19. Το πρόβλημα του χώρου στάθμευσης

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Στο Πρόβλημα του χώρου στάθμευσης δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν α) με τις κλιμακωτές συναρτήσεις (συναρτήσεις σταθερές κατά διαστήματα) και β) με τη συνάρτηση ακέραιο μέρος αριθμού y=[x] (y=int(x)), στις οποίες δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση μέσα από το Αναλυτικό Πρόγραμμα, παρά τη χρησιμότητά τους στη μοντελοποίηση και επίλυση διαφόρων πραγματικών προβλημάτων.
Στο πρόβλημα αυτό καλούνται οι μαθητές να επιλέξουν μεταξύ τεσσάρων διαφορετικών εκδοχών την πιο συμφέρουσα, βάζοντας τον εαυτό τους σε δύο διαφορετικούς ρόλους (αυτού που πληρώνει και αυτού που εισπράττει).

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή της Α' ή Β' Λυκείου σε κεφάλαια μελέτης συναρτήσεων.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
> Να μελετήσουν τη συνάρτηση y=[x] μέσα από τον τύπο της, τον πίνακα τιμών και τη γραφική της παράσταση.
> Να χρησιμοποιήσουν τη συνάρτηση y=[x] για να μοντελοποιήσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.
> Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών της y=[x] στον τύπο και στο γράφημά της.

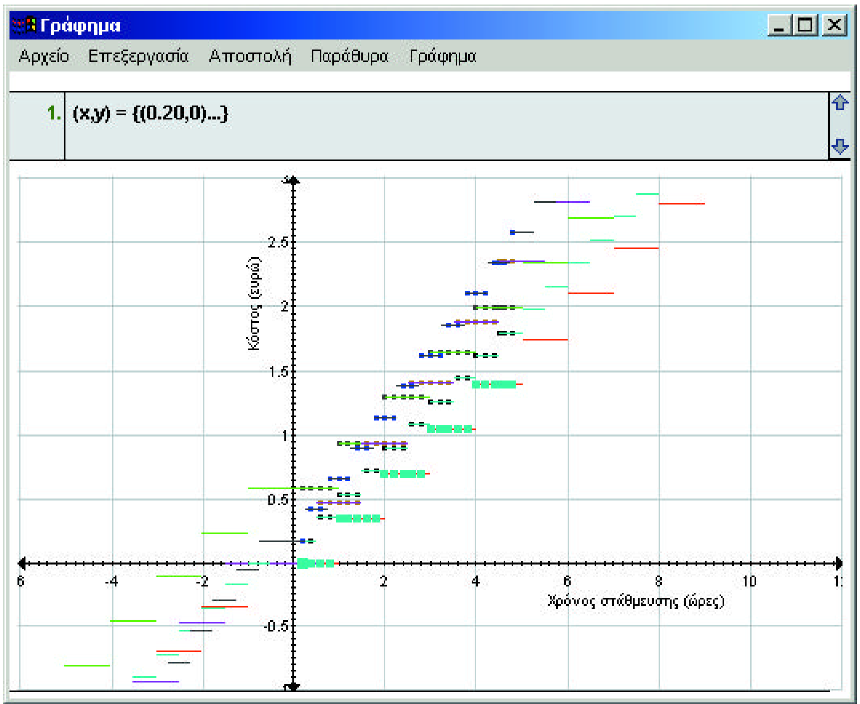
Παρατηρήσεις
1. Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τον πίνακα χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση 'ακέραιο μέρος αριθμού' y=int(x) σε διαφορετική μορφή κάθε φορά. Επειδή οι μαθητές δεν γνωρίζουν - κατά κανόνα - τη συνάρτηση αυτή, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές, πριν να τους δοθεί το πρόβλημα, να φτιάξουν τον πίνακα τιμών της (π.χ. για τις τιμές από -20 ως 20) καθώς και τη γραφική της παράσταση (είτε στέλνοντας τα σημεία του πίνακα στο παράθυρο 'Γράφημα' ή πληκτρολογώντας στο 'Γράφημα' τη συνάρτηση αυτή) και να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις τους.
2. Στο ερώτημα 1 θα πρέπει να βρουν τους τύπους των συναρτήσεων που μοντελοποιούν κάθε μια από τις τέσσερις εκδοχές, για να μπορέσουν να φτιάξουν τον πίνακα που τους ζητείται. Εμείς κατασκευάσαμε τον πίνακα που φαίνεται στην εικόνα 1.
3. Όταν οι μαθητές στείλουν τα σημεία κάθε εκδοχής στο παράθυρο 'Γράφημα', θα πρέπει να κάνουν 'Αλλαγή κλίμακας' από το μενού 'Γράφημα', για να μπορέσουν να δουν τα σημεία (βλέπε εικόνα 2).

Πίνακας

Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

x Χρόνος στάθμευσης (ώρες)	y=0.35*int(x) Εκδοχή Α Κόστος (ευρώ)	z=0.59+0.35*int(x) Εκδοχή Β Κόστος (ευρώ)	k=0.47*int(x+0.5) Εκδοχή Γ Κόστος (ευρώ)	l=0.18+0.18*int(2x) Εκδοχή Δ Κόστος (ευρώ)	m=0.18+0.24*int(2x+0.5) Εκδοχή Ε Κόστος (ευρώ)
0.2	0	0.59	0	0.18	0.18
0.4	0	0.59	0	0.18	0.42
0.6	0	0.59	0.47	0.36	0.42
0.8	0	0.59	0.47	0.36	0.66
1	0.35	0.94	0.47	0.54	0.66
1.2	0.35	0.94	0.47	0.54	0.66
1.4	0.35	0.94	0.47	0.54	0.9
1.6	0.35	0.94	0.94	0.72	0.9
1.8	0.35	0.94	0.94	0.72	1.14
2	0.7	1.29	0.94	0.9	1.14
2.2	0.7	1.29	0.94	0.9	1.14
2.4	0.7	1.29	0.94	0.9	1.38
2.6	0.7	1.29	1.41	1.08	1.38
2.8	0.7	1.29	1.41	1.08	1.62
3	1.05	1.64	1.41	1.26	1.62
3.2	1.05	1.64	1.41	1.26	1.62
3.4	1.05	1.64	1.41	1.26	1.86
3.6	1.05	1.64	1.88	1.44	1.86
3.8	1.05	1.64	1.88	1.44	2.1
4	1.4	1.99	1.88	1.62	2.1
4.2	1.4	1.99	1.88	1.62	2.1
4.4	1.4	1.99	1.88	1.62	2.34
4.6	1.4	1.99	2.35	1.8	2.34
4.8	1.4	1.99	2.35	1.8	2.34

εικόνα 1



εικόνα 2

4. Θα ήταν καλό επίσης να πληκτρολογήσουν και τις αντίστοιχες συναρτήσεις στο παράθυρο 'Γράφημα', προκειμένου να τις δουν να περνούν από τα σημεία που έστειλαν από το παράθυρο 'Πίνακας'.
5. Οι απαντήσεις των ερωτήσεων 10 και 11 θα πρέπει να τεκμηριωθούν από κάθε ομάδα ξεχωριστά και να γίνουν αντικείμενο συζήτησης σε όλη την τάξη.
6. Προτείνεται οι μετασχηματισμοί που ζητούνται στο τέλος της δραστηριότητας να γίνουν με βάση την y=int(x), να μελετήσουν δηλ. τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών στον τύπο και το γράφημα της συνάρτησης. Αυτό μπορεί να γίνει ζητώντας τους να περιγράψουν το είδος των μετασχηματισμών που απαιτούνται στο γράφημα και τον τύπο της y=int(x), έτσι ώστε να πάρουν τις εκδοχές Α, Β, Γ, Δ και Ε αντιστοίχως.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Το Συμβούλιο του εμπορικού κέντρου 'Ιθάκη' εξετάζει πέντε διαφορετικούς τρόπους χρέωσης για τη χρήση του χώρου στάθμευσης του εμπορικού κέντρου. Το συμβούλιο θα ήθελε φυσικά να κερδίσει όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα, χωρίς όμως να χάσει τους πελάτες του εμπορικού κέντρου. Προκειμένου δε να εξασφαλιστεί ότι ο χώρος στάθμευσης θα είναι ελεύθερος, για να χρησιμοποιείται από τους ιδιοκτήτες των καταστημάτων και όχι από τους ανθρώπους που εργάζονται στην πόλη, το συμβούλιο όρισε ως μέγιστο χρόνο παραμονής στο χώρο για οποιονδήποτε πελάτη του εμπορικού κέντρου, τις πέντε ώρες.

εκδοχή Α

λιγότερο από μια ώρα	δωρεάν
περισσότερο από μια αλλά λιγότερο από δύο ώρες	35 λεπτά
περισσότερες από δύο αλλά λιγότερες από τρεις ώρες	70 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Β

λιγότερο από μια ώρα	59 λεπτά
περισσότερο από μια αλλά λιγότερο από δύο ώρες	94 λεπτά
περισσότερες από δύο αλλά λιγότερες από τρεις ώρες	130 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Γ

λιγότερο από μισή ώρα	δωρεάν
περισσότερο από μισή αλλά λιγότερο από 1,5 ώρες	47 λεπτά
περισσότερο από 1,5 αλλά λιγότερο από 2,5 ώρες	94 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Δ

λιγότερο από μισή ώρα	18 λεπτά
περισσότερο από μισή αλλά λιγότερο από μια ώρα	35 λεπτά
περισσότερο από μια αλλά λιγότερο από 1,5 ώρες	53 λεπτά
κτλ.	

εκδοχή Ε

λιγότερο από 0,25 της ώρας	18 λεπτά
περισσότερο από 0,25 αλλά λιγότερο από 0,75 της ώρας	41 λεπτά
περισσότερο από 0,75 αλλά λιγότερο από 1,25 της ώρας	65 λεπτά

κτλ.

1. Προκειμένου το Συμβούλιο να μπορέσει να αποφασίσει ποια από τις πέντε εκδοχές είναι προτιμότερο να εφαρμοστεί, σου ζητάει να ετοιμάσεις έναν πίνακα με τον οποίο θα είναι δυνατή η αριθμητική σύγκρισή τους. Η στήλη στην οποία θα φαίνεται ο χρόνος, μπορεί να ξεκινάει από το 0,2 της ώρας και να φτάνει στις 4,8 ώρες με βήμα 0,2 της ώρας. Εξήγησε πώς έφτιαξες την κάθε στήλη του πίνακα. Ποιο είναι το κόστος της στάθμευσης για 4,5 ώρες για κάθε μια εκδοχή;

Χρόνος (ώρες)	**Εκδοχή Α**	**Εκδοχή Β**	**Εκδοχή Γ**	**Εκδοχή Δ**	**Εκδοχή Ε**
4,5 ώρες	*1,4*	*1.99*	*2,35*	*1,8*	*2,34*

2. Τι συσχετίσεις παρατηρείς σε κάθε στήλη του πίνακα; Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις τιμές που έχουν οι στήλες που αντιστοιχούν στις εκδοχές Α και Β;
3. Ετοιμάζοντας την πρότασή σου για το συμβούλιο, αποφασίζεις να ετοιμάσεις γραφικές παραστάσεις για κάποιες από τις τέσσερις εκδοχές. Στείλε τα δεδομένα σημεία για την Α εκδοχή στο παράθυρο ‘Γράφημα’ και άλλαξε την κλίμακα, για να δεις ολόκληρο το σύνολο των σημείων. Περίγραψε τη σχέση που εμφανίζεται. Αποτελεί αυτό το διάγραμμα γραφική παράσταση συναρτήσεως; Στείλε τα δεδομένα σημεία για τη Β εκδοχή στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Ως προς τι μοιάζουν τα δύο διαγράμματα; Σε τι διαφέρουν;
4. Τι είδος συνάρτησης (γραμμική, δευτέρου βαθμού, λογαριθμική...) μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να μοντελοποιηθούν οι δύο εκδοχές; Χρησιμοποίησε τα διαγράμματα και τον πίνακα, για να γράψεις τύπους συναρτήσεων, που εκφράζουν τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο παραμονής στο χώρο στάθμευσης και το πληρωτέο αντίτιμο, σύμφωνα με τις εκδοχές Α και Β. Να καθορίσεις το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών για κάθε συνάρτηση. Δημιούργησε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων που έγραψες ως τύπους στο παράθυρο ‘Γράφημα’ και βεβαιώσου ότι οι τύποι σου ταυτίζονται με τα σημεία του πίνακα.
5. Στείλε τα δεδομένα σημεία της εκδοχής Γ στο παράθυρο ‘Γράφημα’ και σύγκρινε την καμπύλη που προκύπτει με την αντίστοιχη της εκδοχής Α. (Θα είναι μάλλον πιο βολικό, αν σβήσεις την καμπύλη που αντιστοιχεί στην εκδοχή Β.) Ως προς τι διαφέρει το διάγραμμα της εκδοχής Γ από αυτό της Α;
6. Γράψε τον τύπο μιας συνάρτησης που να εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στον χρόνο παραμονής στο χώρο στάθμευσης και το πληρωτέο αντίτιμο, σύμφωνα με την εκδοχή Γ. Σε τι διαφέρουν οι τύποι για τις εκδοχές Α και Γ;
7. Γράψε τον τύπο για την εκδοχή Δ και Ε. Εξήγησε πώς τους κατάστρωσες και με ποιον τρόπο τους έλεγξες χρησιμοποιώντας το Function Probe.
8. Αν ήσουν μέλος του Συμβουλίου, ποια εκδοχή θα υποστήριζες και γιατί;
9. Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι καταστηματάρχες του εμπορικού κέντρου έκαναν μια σφυγμομέτρηση στους πελάτες τους και κατέληξαν στα εξής: εάν οι υποψήφιοι πελάτες

υποχρεωθούν να πληρώσουν περισσότερα από 2,35 ευρώ, για να παρκάρουν το αυτοκίνητό τους, είτε θα το αφήνουν αλλού και θα πηγαίνουν περπατώντας, είτε θα κάνουν τα ψώνια τους σε άλλο εμπορικό κέντρο. Με αυτά τα δεδομένα, ποια εκδοχή θα υποστήριζες; Γιατί;

10. Σαν πελάτης του εμπορικού κέντρου, ποια εκδοχή θα προτιμούσες να επιλέξει το συμβούλιο; Γιατί;

Μετασχηματισμοί

11. Τι είδους αλλαγή στο σύστημα χρέωσης για τη στάθμευση σχετίζεται με κατακόρυφη μετατόπιση μιας συνάρτησης;
12. Τι είδους αλλαγή σχετίζεται με κατακόρυφη αυξομείωση;
13. Τι είδους αλλαγή σχετίζεται με οριζόντια μετατόπιση;
14. Τι είδους αλλαγή σχετίζεται με οριζόντια αυξομείωση;

20. Μελέτη της συνάρτησης y=α/x και των μετασχηματισμών της

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Στη δραστηριότητα αυτή καλούνται οι μαθητές να μελετήσουν τη συνάρτηση y=α/x μέσα από τον πίνακα τιμών της και τη γραφική της παράσταση, καθώς και τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών (μετατοπίσεις, αυξομειώσεις, συμμετρία) στον τύπο της και στη γραφική της παράσταση.

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα
Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να ενταχθεί στην αντίστοιχη ενότητα της Α' Λυκείου όπου οι μαθητές διδάσκονται τη συνάρτηση y=α/x.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι
Οι μαθητές:
> Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών στον τύπο και στο γράφημα της συνάρτησης y=α/x.
> Να μπορούν να προβλέπουν την αλλαγή του τύπου της συνάρτησης μετά από κάποιο συγκεκριμένο μετασχηματισμό του γραφήματος της y=α/x.
> Να μπορούν να προβλέπουν τη θέση του γραφήματος μετά από κάποια αλλαγή στον τύπο της συνάρτησης y=α/x.

Παρατηρήσεις

1. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καθοδηγούνται στη διερεύνηση των μετασχηματισμών και των επιπτώσεών τους στο γράφημα και στον τύπο της y=α/x βήμα προς βήμα. Είναι χωρισμένη σε 5 μέρη, όπου το κάθε μέρος αποτελεί και μια διαφορετική ενότητα. Το πρώτο μέρος αφορά σε διαπιστώσεις που θα γίνουν στον πίνακα τιμών και στη γραφική παράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης y=α/x. Το δεύτερο μέρος αφορά σε οριζόντιες και κατακόρυφες μετακινήσεις (μετατοπίσεις) των προηγούμενων σημείων, ενώ το τρίτο μέρος αφορά σε αυξομειώσεις τους (άνοιγμα και κλείσιμο). Το τέταρτο μέρος αφορά στην πρόβλεψη των γραφημάτων από τους τύπους της συνάρτησης και τέλος το πέμπτο μέρος αφορά στην περιγραφή των μετασχηματισμών από τις γραφικές παραστάσεις τους. Προτείνεται κάθε ομάδα, στο τέλος κάθε μέρους της δραστηριότητας, να γράφει στο τετράδιο τα συμπεράσματά της, τα οποία να συζητούνται με όλη την τάξη.
2. Προτείνεται η ερώτηση 14 να αποτελέσει αντικείμενο διεξοδικής συζήτησης σε όλη την τάξη, έτσι ώστε να διατυπωθούν οι αντίστοιχοι κανόνες για το ρόλο των Α, Β, και Γ.

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' Μέρος: Γραφική αναπαράσταση μερικών σημείων της συνάρτησης y=1/x

1. Στο παράθυρο 'Πίνακας' του Function Probe κατασκεύασε μια στήλη με τιμές του 'x' από -4 έως 4 και με βήμα 0.2. Κατασκεύασε μια δεύτερη στήλη πληκτρολογώντας στη σειρά των μεταβλητών και εξισώσεων την y=1/x. Περίγραψε τις συσχετίσεις που βλέπεις μεταξύ των αριθμών αυτής της στήλης.
2. Επίλεξε την εντολή 'Σημεία σε Γράφημα' από το μενού 'Αποστολή' και άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα', για να δεις τη σχέση ανάμεσα στα x και y. (Έχε το παράθυρο ανοιχτό σε πλήρες μέγεθος για αυτή την άσκηση). Κάνε μια περιγραφή του διαγράμματος. Πώς φαίνονται στο διάγραμμα οι συσχετίσεις που βρήκες στον πίνακα;

Β' Μέρος: Μετατοπίσεις

1. Στο παράθυρο 'Γράφημα' μετάφερε τα σημεία της γραφικής παράστασης της y=1/x κατά 2 μονάδες κατακόρυφα. Για να το πετύχεις αυτό, κάνε κλικ στο εικονίδιο μετατόπισης και από το παράθυρο διαλόγου 'Μετατόπιση' επίλεξε το βέλος της κατακόρυφης μετατόπισης. Περίγραψε το νέο διάγραμμα: Τι έχει αλλάξει; Τι έμεινε ίδιο;
2. Να προβλέψεις τι επίδραση έχει η μετατόπιση, στον πίνακα με τις τιμές (που έχεις κατασκευάσει) και στη συνέχεια να στείλεις τα νέα σημεία στο παράθυρο 'Πίνακας', επιλέγοντας την εντολή 'Σημεία σε Πίνακα' από το μενού 'Αποστολή'. (Θα εμφανιστούν δύο μηνύματα τα οποία θα σε προειδοποιούν ότι οι αρχικές στήλες για τα x και y θα απενεργοποιηθούν. Κάθε φορά θα κάνεις κλικ στο κουμπί 'OK' για να συνεχίσεις.) Δύο νέες στήλες θα εμφανιστούν στην οθόνη και θα αντιπροσωπεύουν τα μετατοπισμένα σημεία. Επαληθεύουν τα νέα σημεία τις προβλέψεις σου; Τι επίδραση έχει μια κατακόρυφη μετατόπιση στον πίνακα;
3. Να προβλέψεις την επίδραση που έχει η μετατόπιση στον τύπο της y=1/x. Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, γράψε τον τύπο σου στο παράθυρο 'Γράφημα' ως συνάρτηση προς σχεδίαση. Διέρχεται από τα νέα σημεία; Για να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου στο παράθυρο 'Πίνακας', μπορείς να στείλεις τον τύπο σου από το παράθυρο 'Γράφημα', επιλέγοντας την εντολή 'Ορισμός τύπου' στο παράθυρο 'Γράφημα' και γράφοντας 'z=g1(x)' στο παράθυρο 'Πίνακας'. Τα σημεία από την g1(x) ταυτίζονται με τα μετατοπισμένα σημεία; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης μετατόπισης στον τύπο;
4. Τι επίδραση θα είχε μια κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδων προς τα κάτω, στον πίνακα, στο διάγραμμα και στον τύπο;
5. Πραγματοποίησε τώρα αντίστοιχες οριζόντιες μετατοπίσεις στην αρχική συνάρτηση y=1/x: α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στις τιμές του πίνακα; β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας μετατόπισης προς τα δεξιά, στον τύπο; γ) Ποια θα ήταν η επίδραση, αν η μετατόπιση γινόταν προς τα αριστερά;

Γ' Μέρος: Αυξομειώσεις

1. Καθάρισε τον πίνακα από όλες τις στήλες, εκτός της αρχικής χ (-4<x<4) και της y=1/x. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' από όλα τα διαγράμματα, εκτός από τα σημεία της y=1/x. Άνοιξε τη γραφική παράσταση κατακόρυφα με συντελεστή 2, χρησιμοποιώντας το εργαλείο αυξομείωσης. (Κάνε κλικ στο εικονίδιο αυξομείωσης και επίλεξε την κατακόρυφη Ά αυξομείωση). Πάτησε το πλήκτρο 'Enter', για να τοποθετήσεις τη Γραμμή Άγκυρας

στο y=0. Σύρε το διάγραμμα κατακόρυφα, μέχρι να διαβάζεις στο συντελεστή για το άνοιγμα το ‘2’. Να συγκρίνεις τα παλιά με τα νέα σημεία. Τι έχει αλλάξει; Τι έχει παραμείνει το ίδιο;

2. α) Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον πίνακα τιμών: Πώς θα αλλάξει κάθε σημείο; Στη συνέχεια, στείλε τα νέα σημεία στο παράθυρο ‘Πίνακας’.
   β) Ήταν σωστή η πρόβλεψη σου;
   γ) Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
3. Να προβλέψεις την επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης στον τύπο της y=1/x. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου χρησιμοποιώντας είτε το παράθυρο ‘Γράφημα’ είτε το παράθυρο ‘Πίνακας’. Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
4. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία για μια κατακόρυφη αυξομείωση με συντελεστή το ½ (γνωστό και ως συρρίκνωση). Ποια είναι η επίδραση μιας αυξομείωσης με συντελεστή το ½ στις τιμές του πίνακα; Ποια είναι η επίδραση μιας κατακόρυφης αυξομείωσης με παράγοντα το ½ στον τύπο της συνάρτησης;
5. Να επαναλάβεις την ίδια διαδικασία, αυτή τη φορά για μια οριζόντια αυξομείωση.
   α) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με συντελεστή το 2 στις τιμές του πίνακα;
   β) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το ½ στις τιμές του πίνακα;
   γ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το 2 στον τύπο της συνάρτησης;
   δ) Ποια είναι η επίδραση μιας οριζόντιας αυξομείωσης με παράγοντα το ½ στον τύπο της συνάρτησης;

Δ’ Μέρος: Πρόβλεψη γραφημάτων από τους τύπους των συναρτήσεων

1. Να προβλέψεις τη μορφή της γραφικής παράστασης του y=2/3x - 5. Να επαληθεύσεις την πρόβλεψή σου, δημιουργώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποιες είναι οι μεταφορές και/ή τα ανοίγματα που σχετίζονται με αυτή την συνάρτηση σε σχέση με την y=1/x; Να σχεδιάσεις την y=2/(3x-5). Ποια είναι η σχέση της με τη γραφική παράσταση της y=2/3x - 5;
2. Τι μπορείς να πεις για τη θέση του κατώτερου σημείου και την κλίση των κλάδων στην γραφική παράσταση της y=Α/Βx-Γ;
3. Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους σχεδίασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε χαρτί και έλεγξε τα σχέδιά σου δημιουργώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα με το Function Probe. Να αναφέρεις τους μετασχηματισμούς (κατακόρυφη ή οριζόντια μετατόπιση, κατακόρυφο ή οριζόντιο άνοιγμα, συμμετρική) που μπορούν να πραγματοποιηθούν στην y=1/x, για να προκύψουν τα νέα διαγράμματα. Έλεγξέ το στο Function Probe.

   y= 3/x - 2
   y= 3/(x-2)
   y= -5/x - 1
   y= 5/x-1
   y= -4/3x + 2
   y= -4/(3x+2)

Ε' Μέρος: Περιγραφή μετασχηματισμών από τις γραφικές αναπαραστάσεις τους.

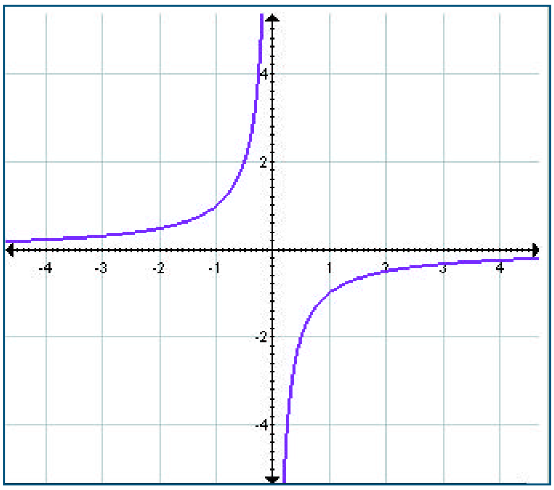
Για κάθε ένα από το επόμενα διαγράμματα:

i. Να αναφέρεις με ποιον τρόπο η γραφική παράσταση της y=1/x μετασχηματίστηκε στο δοθέν διάγραμμα.

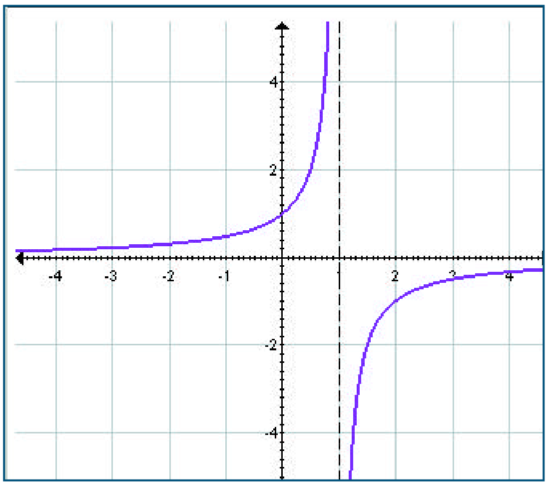
ii. Να γράψεις τον τύπο της συνάρτησης, στην οποία αντιστοιχεί το διάγραμμα χρησιμοποιώντας το Function Probe, για να ελέγξεις την απάντησή σου.

Ενδεικιτκές απαντήσεις:

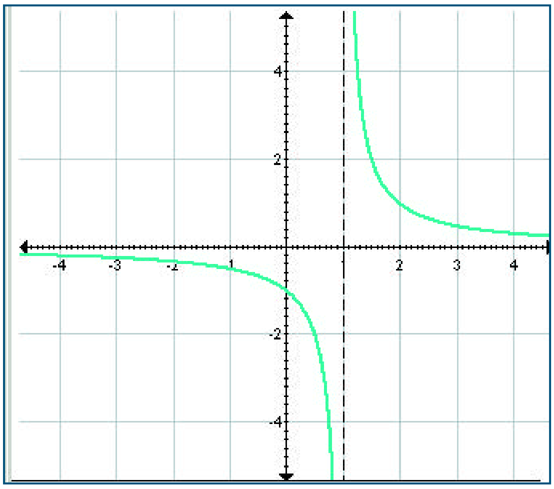
Διάγραμμα 1 Απάντηση: y= -0,6/x
Διάγραμμα 2 Απάντηση: y= -1/(x-1)
Διάγραμμα 3 Απάντηση: y= 1/(x-1)
Διάγραμμα 4 Απάντηση: y= 1/0,33x
Διάγραμμα 5 Απάντηση: y= 1/x



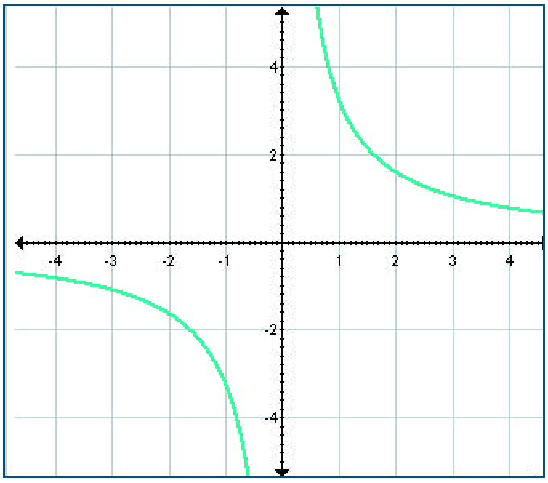
διάγραμμα 1



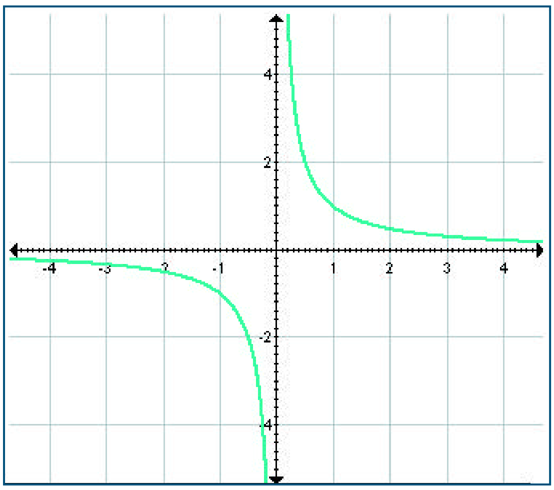
διάγραμμα 2



διάγραμμα 3



διάγραμμα 4



διάγραμμα 5

Ενδεικτική δραστηριότητα

Το πρόβλημα με τις πίτσες

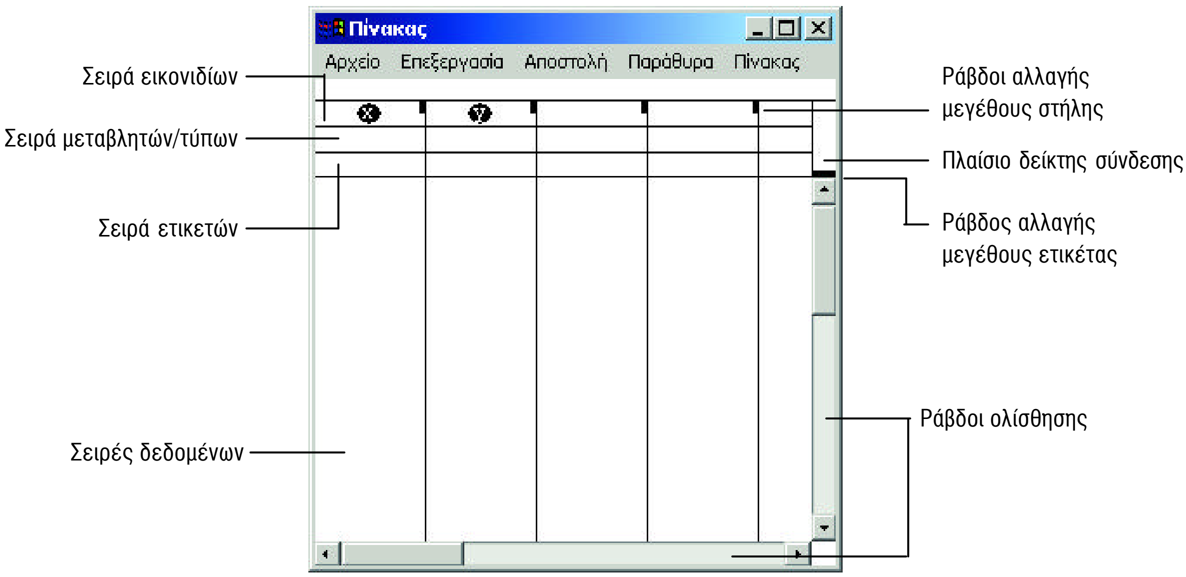
Μία πιτσαρία φτιάχνει στρογγυλές πίτσες σε 5 διαφορετικά μεγέθη:
> ατομική πίτσα με διάμετρο 15 cm
> πίτσα μεσαίου μεγέθους με διάμετρο 30 cm
> πίτσα μεγάλου μεγέθους με διάμετρο 45 cm
> πίτσα ‘πάρτυ’ με διάμετρο 60 cm
> πίτσα ‘γίγας’ με διάμετρο 75 cm

Ο ιδιοκτήτης της πιτσαρίας έχει καθιερώσει μια παράξενη ‘οικονομική πολιτική’ που σας επιτρέπει να πληρώσετε την πίτσα σας με δύο διαφορετικούς τρόπους:
1. Πληρώνετε 6 λεπτά για κάθε εκατοστό της περιφέρειάς της.
2. Πληρώνετε 0,7 λεπτά για κάθε τετραγωνικό εκατοστό του εμβαδού της.

Διαλέξτε τον τρόπο που σας συμφέρει, για να πληρώσετε την πίτσα που θα αγοράσετε.

Μέρος I. Κατασκευή ‘Πίνακα’

Βήμα 1. Άνοιγμα του Function Probe
Το Function Probe ανοίγει με διπλό κλικ στο εικονίδιό του και κατόπιν με κλικ στο πλήκτρο ‘OK’. Στην οθόνη εμφανίζονται τρία παράθυρα. Το ‘Γράφημα’, ο ‘Πίνακας’ και η ‘Αριθμομηχανή’. Μπορείτε να ενεργοποιήσετε το παράθυρο ‘Πίνακας’ με ένα κλικ πάνω σ’ αυτό. Μπορείτε να αλλάξετε το μέγεθός του τοποθετώντας το δείκτη στην κάτω δεξιά γωνία του παραθύρου, κάνοντας κλικ και σύροντας το ποντίκι όταν ο δείκτης γίνει βέλος (για περισσότερες οδηγίες βλ. το **Εγχειρίδιο Χρήστη**).

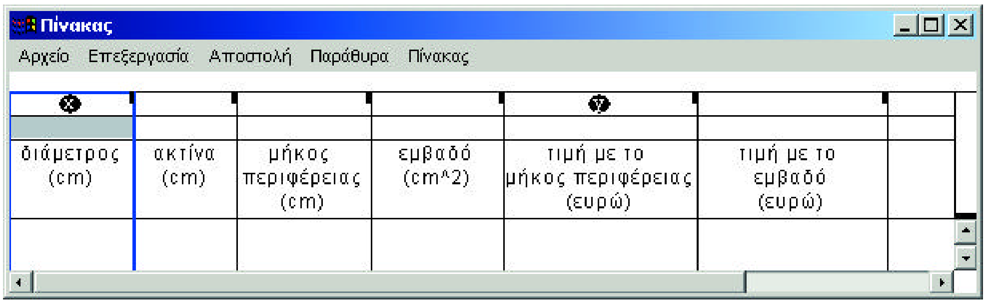


Η σειρά εικονιδίων χρησιμοποιείται για να στέλνετε τιμές από το παράθυρο ‘Πίνακας’ στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Η σειρά μεταβλητών/τύπων χρησιμεύει για να εισαγάγετε μια μεταβλητή ή ένα τύπο σε μια στήλη. Η σειρά ετικετών χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη μεταβλητή (ή τον τύπο) και τις μονάδες τους. Τα δεδομένα εισαγάγονται στις σειρές δεδομένων.

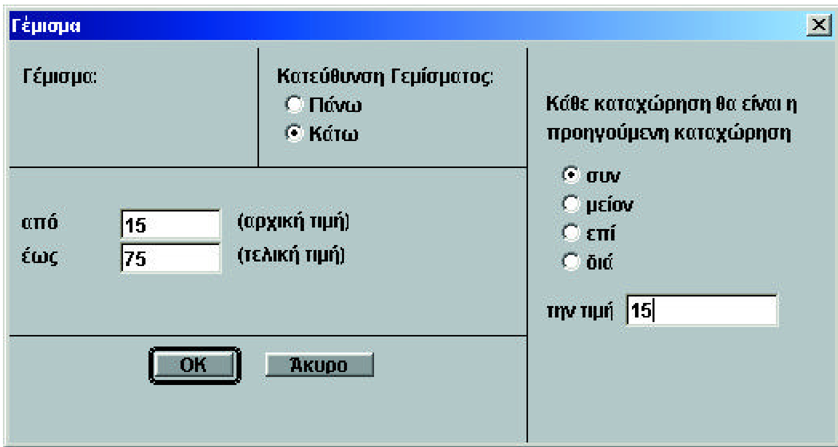
Βήμα 2. Εισαγωγή ετικετών

Τοποθετήστε το δείκτη στη σειρά ετικετών της πρώτης στήλης και ονομάστε τη ‘διάμετρος’. Συμπληρώστε με τον ίδιο τρόπο τις υπόλοιπες στήλες σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα. Μπορείτε να αλλάξετε το πλάτος της κάθε στήλης σύροντας τη ράβδο αλλαγής μεγέθους της στήλης. Επίσης, μπορείτε να αλλάξετε το ύψος της σειράς ετικετών σύροντας τη ράβδο αλλαγής μεγέθους ετικέτας.

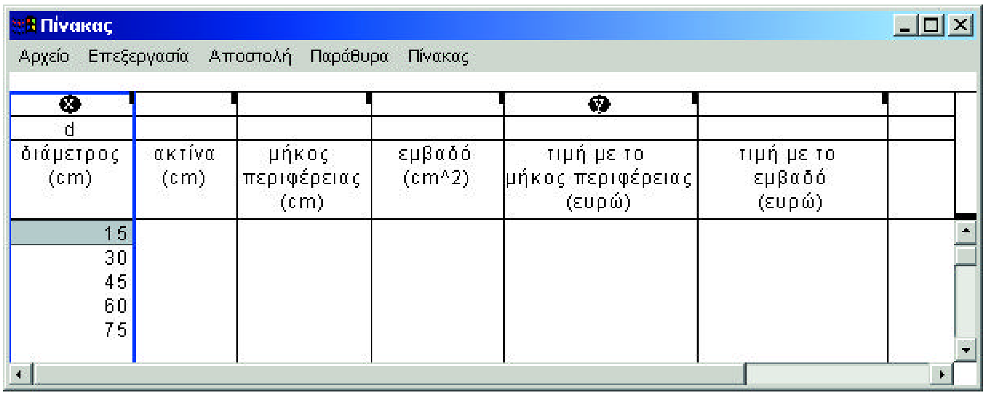
Βήμα 3. Εισαγωγή δεδομένων



Υπάρχουν δύο τρόποι για να εισαγάγετε τις πέντε διαφορετικές τιμές της διαμέτρου στην πρώτη στήλη. Ο πρώτος είναι να πληκτρολογήσετε μια-μια τις τιμές της διαμέτρου. Επειδή για μεγάλο όγκο δεδομένων αυτό θα είναι κουραστικό, το Function Probe σας δίνει τη δυνατότητα να εισαγάγετε τα δεδομένα σας πιο εύκολα, με τη βοήθεια της εντολής ‘Γέμισμα’. Κάντε κλικ στην πρώτη σειρά της περιοχής δεδομένων στη στήλη "διάμετρος" και κατόπιν επιλέξτε την εντολή ‘Γέμισμα’ από το μενού ‘Πίνακας’. Εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο διαλόγου στο οποίο θα πρέπει να δώσετε τρεις τιμές: την αρχική τιμή, την τελική τιμή και την τιμή που προστίθεται σε κάθε προηγούμενη καταχώρηση. Επειδή θέλουμε η αρχική τιμή να είναι 15, πληκτρολογείτε τον αριθμό 15 στο πλαίσιο ‘από’. Πατήστε το πλήκτρο ‘Tab’, για να μεταφερθείτε και να συμπληρώσετε στη συνέχεια στο πλαίσιο ‘έως’ την τελική τιμή 75. Επιλέγετε την ένδειξη ‘συν’ και στο πλαίσιο ‘την τιμή’ συμπληρώνετε ‘15’, που είναι ο αριθμός που πρέπει να προστεθεί σε κάθε προηγούμενό του. Ολοκληρώνετε κάνοντας κλικ στο πλήκτρο ‘OK’.



Με τον τρόπο αυτό θα εμφανιστούν στην πρώτη στήλη οι τιμές 15, 30, 45, 60, 75, όπως φαίνεται παρακάτω:



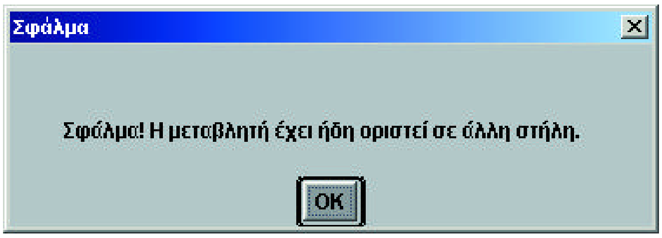
Βήμα 4. Χρήση μεταβλητών και τύπων

Για να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες θα πρέπει να καταχωρήσετε στη σειρά μεταβλητών/τύπων τους κατάλληλους τύπους και το Function Probe θα συμπληρώσει όλες τις στήλες αυτόματα. Πρέπει να δώσετε το όνομα μιας μεταβλητής για κάθε στήλη. *Προσοχή! Δε μπορείτε να δώσετε το ίδιο όνομα μεταβλητής σε δύο διαφορετικές στήλες, όμως το Function Probe αναγνωρίζει π.χ. το A και a σαν διαφορετικές μεταβλητές.* Πηγαίνετε, λοιπόν, στη στήλη που έχετε ονομάσει ‘διάμετρος’ και πληκτρολογείτε στη σειρά μεταβλητών/τύπων το γράμμα π.χ. d, και στη στήλη που έχετε ονομάσει ‘ακτίνα’ γράφετε r=d/2 ή r=0,5d, αφού η ακτίνα είναι το μισό της διαμέτρου. Στη συνέχεια πατάτε το πλήκτρο ‘Enter’ και έτσι στη στήλη αυτή θα συμπληρωθούν αυτόματα οι τιμές της ακτίνας. Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να πληκτρολογήσετε τους τύπους και στις υπόλοιπες στήλες: c=πd (ή c=2πr) και a=πr^2 (a=πr^2). Για να γράψετε το ‘π’ πατήστε ταυτόχρονα τα πλήκτρα ‘Shift+P’ (το πληκτρολόγιο πρέπει να είναι στην αγγλική γλώσσα), και για να γράψετε τη δύναμη τα πλήκτρα ‘Shift+6’.

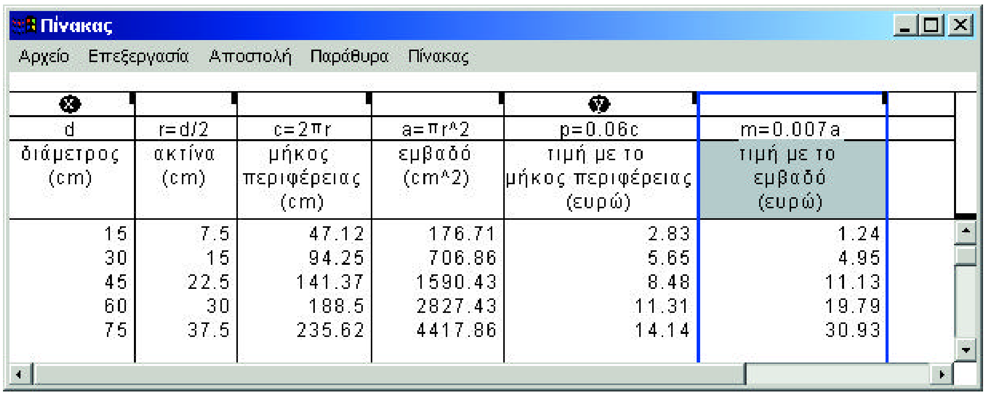
Προσοχή! Όταν εισαγάγετε τις μεταβλητές, πρέπει να προσέξετε να έχετε επιλέξει το αγγλικό πληκτρολόγιο! Επίσης, όταν εισαγάγετε δεκαδικούς αριθμούς θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την τελεία αντί την υποδιαστολή!

Βήμα 5. Δημιουργία δεδομένων

Τώρα είσαστε έτοιμοι να ολοκληρώσετε τον πίνακα συμπληρώνοντας τις τιμές της πίτσας σύμφωνα με τους δύο διαφορετικούς τρόπους πληρωμής. Αφού η τιμή με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου είναι 6 λεπτά (δηλαδή 0,06 ευρώ) για κάθε εκατοστό, πληκτρολογείτε στη σειρά μεταβλητών/τύπων τον τύπο p=0,06c και στην επόμενη στήλη p=0,007a (τιμή με το εμβαδό). *Προσοχή! Πρέπει να κάνετε την κατάλληλη μετατροπή για να βρείτε την τιμή της πίτσας σε ευρώ!* Όταν πατήσετε το πλήκτρο ‘Enter’, θα εμφανιστεί το παρακάτω μήνυμα σφάλματος.



Το Function Probe σας ενημερώνει ότι η μεταβλητή p χρησιμοποιείται ήδη σε κάποια άλλη στήλη. Για να το διορθώσετε κάντε κλικ στο κουμπί ‘OK’ και αντικαταστήστε τη μεταβλητή p με κάποιο άλλο γράμμα π.χ. m. Όταν τελειώσετε με αυτή τη διαδικασία, ο πίνακας θα έχει την παρακάτω μορφή:



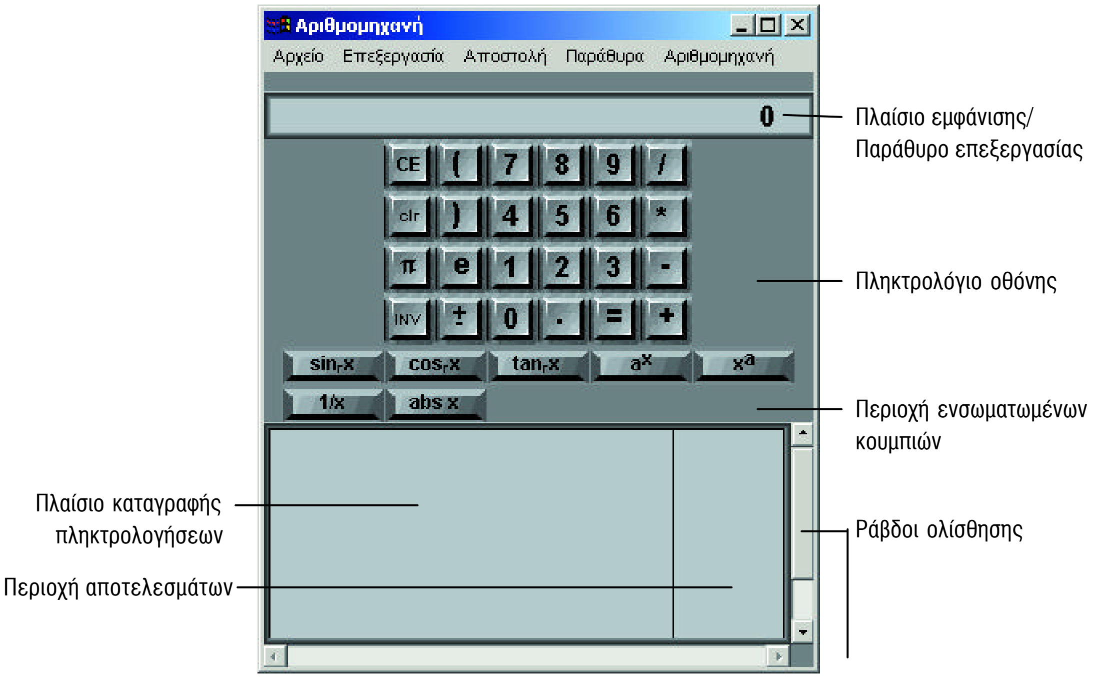
d	r=d/2	c=2πr	a=πr^2	p=0.06c	m=0.007a
διάμετρος (cm)	ακτίνα (cm)	μήκος περιφέρειας (cm)	εμβαδό (cm^2)	τιμή με το μήκος περιφέρειας (ευρώ)	τιμή με το εμβαδό (ευρώ)
15	7.5	47.12	176.71	2.83	1.24
30	15	94.25	706.86	5.65	4.95
45	22.5	141.37	1590.43	8.48	11.13
60	30	188.5	2827.43	11.31	19.79
75	37.5	235.62	4417.86	14.14	30.93

Παρατηρήστε τις τιμές στον πίνακα και απαντήστε στις ερωτήσεις 1 και 2 του φύλλου εργασίας.

Και τώρα φροντίστε να αποθηκεύσετε την εργασία σας! Επιλέξτε την εντολή ‘Αποθήκευση χώρου εργασίας’ από το μενού ‘Αρχείο’ (εάν επιλέξετε την εντολή ‘Αποθήκευση παραθύρου’ θα αποθηκεύσετε μόνο τα δεδομένα του ‘Πίνακα’). Το πλαίσιο αποθήκευσης που εμφανίζεται σας ζητάει το όνομα που θέλετε να δώσετε στο αρχείο που έχετε δημιουργήσει μέχρι αυτό το σημείο. Πληκτρολογήστε ‘Tutorial.prb’ (ή όποια άλλη ονομασία θέλετε) και κατόπιν κάντε κλικ στο κουμπί ‘Αποθήκευση’.

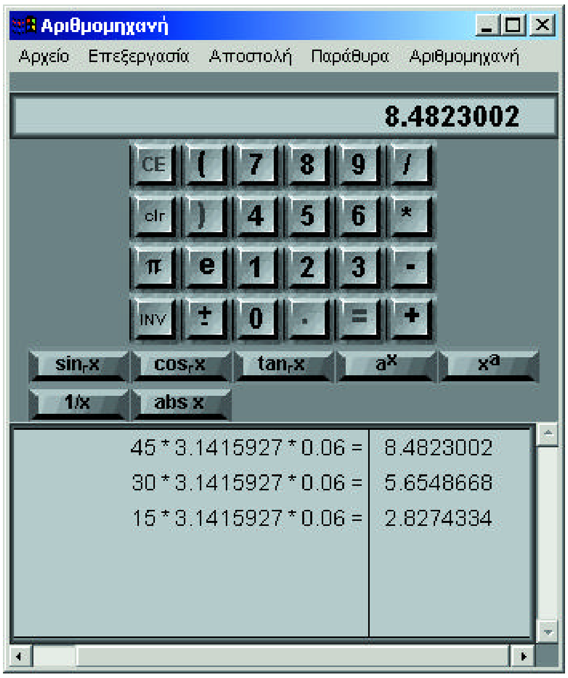
Μέρος ΙΙ. Χρήση του παραθύρου ‘Αριθμομηχανή’

Ο ιδιοκτήτης της πιτσαρίας λέει τώρα ότι θα μπορούσε να φτιάχνει οποιοδήποτε μέγεθος πίτσας, αν είχε τη δυνατότητα να υπολογίζει εύκολα την τιμή της και με τους δύο τρόπους κάθε φορά.
Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το παράθυρο ‘Αριθμομηχανή’. Η λειτουργία της ‘Αριθμομηχανής’ του Function Probe είναι όμοια με των υπόλοιπων αριθμομηχανών.



Βήμα 1. Υπολογισμός

Μπορείτε να υπολογίσετε διαδοχικά, όπως θα κάνατε με κάθε αριθμομηχανή, το κόστος μιας πίτσας διαμέτρου 15, 30, ή 45 cm, όταν πληρώνετε με το μήκος της.

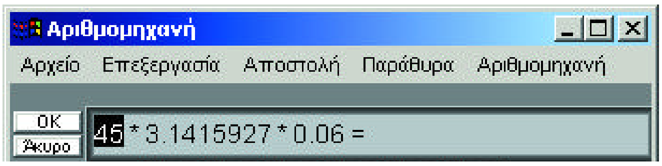


Προσοχή! Αν θέλετενα απαλείψετε έναν αριθμό πρέπει να κάνετε κλικ στο κουμπί 'CE' αμέσως μόλις τον εισαγάγατε, διαφορετικά, αν έχετε κάνει λάθος στην εισαγωγή των αριθμητικών τιμών σας, θα πρέπει να διαγράψετε ολόκληρη τη σειρά υπολογισμού. Αυτό μπορείτε να το κάνετε με το κουμπί 'clr' (Clear) το οποίο διαγράφει τη σειρά υπολογισμού την οποία υπολογίζετε. Δεν υπάρχει τρόπος να διαγράψετε μια προηγούμενη σειρά υπολογισμού!

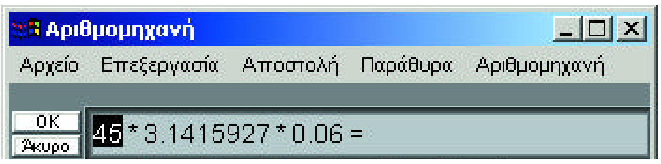
Βήμα 2. Κατασκευή κουμπιού

Για να μην επαναλαμβάνετε συνέχεια την ίδια διαδικασία, μπορείτε να την αυτοματοποιήσετε ως εξής:

1. Επιλέξτε την εντολή 'Κατασκευή κουμπιού' από το μενού 'Αριθμομηχανή'. Στο παράθυρο επεξεργασίας της 'Αριθμομηχανής' εμφανίζεται η πιο πρόσφατη σειρά που υπάρχει στο πλαίσιο καταγραφής πληκτρολογήσεων.
2. Αφού η διάμετρος είναι το μόνο που αλλάζει κατά τους υπολογισμούς, επιλέξτε τον αριθμό 45 τοποθετώντας το δείκτη πάνω του και σύροντάς τον.



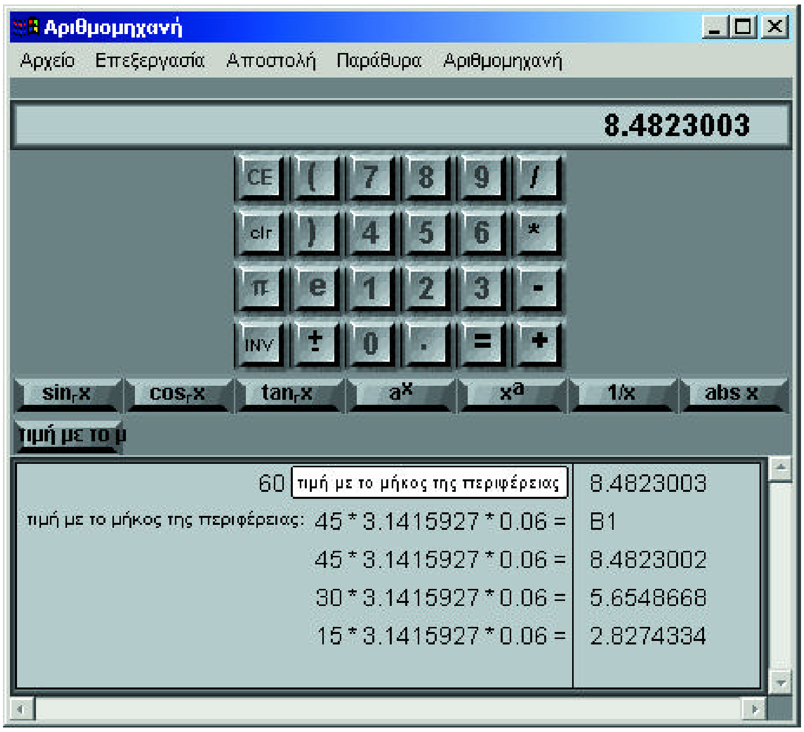
3. Κάντε κλικ πάνω σε αυτό το πλήκτρο  παραθύρου 'Αριθμομηχανή'. Η σχέση τώρα παίρνει την παρακάτω μορφή:



4. Κάντε κλικ στο πλήκτρο 'ΟΚ'.
5. Θα σας ζητηθεί να δώσετε όνομα στο κουμπί. Ονομάστε το 'τιμή με το μήκος της περιφέρειας'. Κάντε κλικ στο πλήκτρο 'ΟΚ'. Το πλήρες όνομα του κουμπιού θα εμφανιστεί μόνο στο πλαίσιο καταγραφής πληκτρολόγησης. Το όνομα πάνω στο κουμπί θα περικοπεί. Σημειώστε ότι στο πλαίσιο αποτελεσμάτων το όνομα του κουμπιού εμφανίζεται σαν 'Β1'. Με αυτό το όνομα θα μπορέσετε να καλέσετε το συγκεκριμένο κουμπί από τα παράθυρα 'Γράφημα' ή 'Πίνακας'.

Βήμα 3. Το κουμπί 'τιμή με το μήκος περιφέρειας'

Το κουμπί που κατασκευάσατε θα εμφανιστεί τελευταίο στην περιοχή των κουμπιών. Πληκτρολογήστε την τιμή '60' και κατόπιν πατήστε το κουμπί που κατασκευάσατε. Θα υπολογιστεί αυτόματα το κόστος της πίτσας διαμέτρου 60 cm, όταν την αγοράζετε με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου.



Συγκρίνετε τώρα αυτή την τιμή με την αντίστοιχη τιμή από το παράθυρο 'Πίνακας' και δοκιμάστε να κάνετε το ίδιο και για την τιμή 75 της διαμέτρου.

Απαντήστε τώρα στην ερώτηση 3 του φύλλου εργασίας.

Βήμα 4. Το κουμπί 'τιμή με το εμβαδό'

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα μπορείτε να κατασκευάσετε ένα κουμπί 'B2'='τιμή με το εμβαδό' που να σας δίνει την τιμή της κάθε πίτσας, όταν πληρώνετε με το εμβαδό. (Για να υπολογίσετε τη δύναμη κάποιου αριθμού, γράφετε πρώτα τον αριθμό, κατόπιν πατάτε το πλήκτρο x^a και τέλος τη δύναμη στην οποία θέλετε να τον υψώσετε π.χ. (15 x^a 2.)

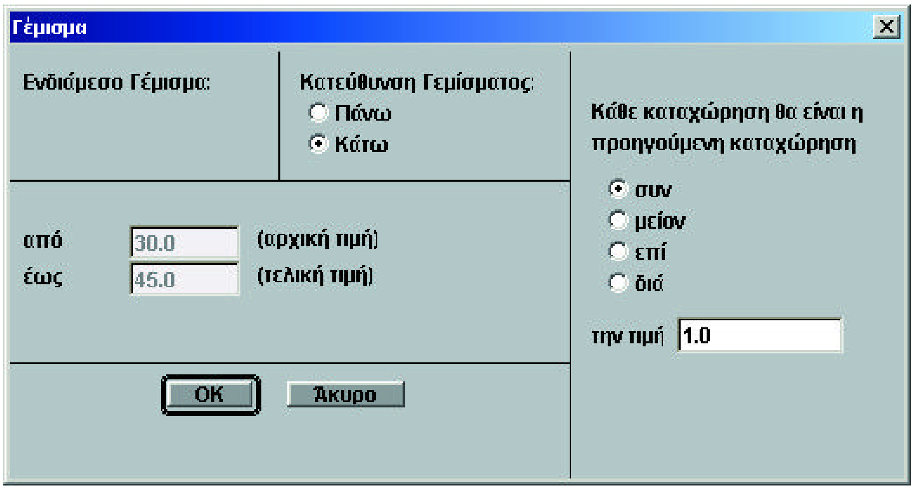
Βήμα 5. Χρήση του παραθύρου 'Πίνακας' για την εύρεση μιας λύσης

Η χρήση της εντολής 'Ενδιάμεσο γέμισμα'

Υπάρχει ένα μέγεθος πίτσας που να κοστίζει το ίδιο με όποιο τρόπο και αν την πληρώσετε;

Απαντήστε στην ερώτηση 4 στο φύλλο εργασίας.

Από το παράθυρο 'Πίνακας' παρατηρείτε ότι η ζητούμενη τιμή θα βρίσκεται μεταξύ του 30 και του 45. Έχετε τη δυνατότητα να εισαγάγετε και άλλες τιμές ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς με την εντολή 'Ενδιάμεσο γέμισμα' του μενού 'Πίνακας'. Για να γίνει αυτό, πρώτα επιλέγετε αυτές τις τιμές τοποθετώντας το δείκτη πάνω τους και σύροντας το ποντίκι και στη συνέχεια πηγαίνετε στην εντολή 'Ενδιάμεσο γέμισμα'. Εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο διαλόγου, στο οποίο μπορείτε να συμπληρώσετε μόνο το πλαίσιο 'την τιμή' με τον αριθμό 1.



Κάνοντας κλικ στο κουμπί ‘OK’ διαπιστώνετε ότι στον ‘Πίνακα’ έχουν προστεθεί νέες τιμές ανάμεσα στο 30 και 45, ακόμη όμως δεν μπορείτε τώρα να εντοπίσετε την απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε. Θα πρέπει να παρεμβάλετε και άλλες τιμές μεταξύ του 34 και 35 με βήμα 0,1, οπότε προκύπτει ο πίνακας που φαίνεται παρακάτω. Τώρα μπορείτε να εντοπίσετε την απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε.

Πίνακας

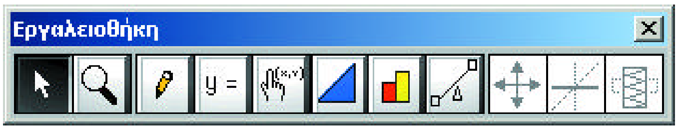
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας

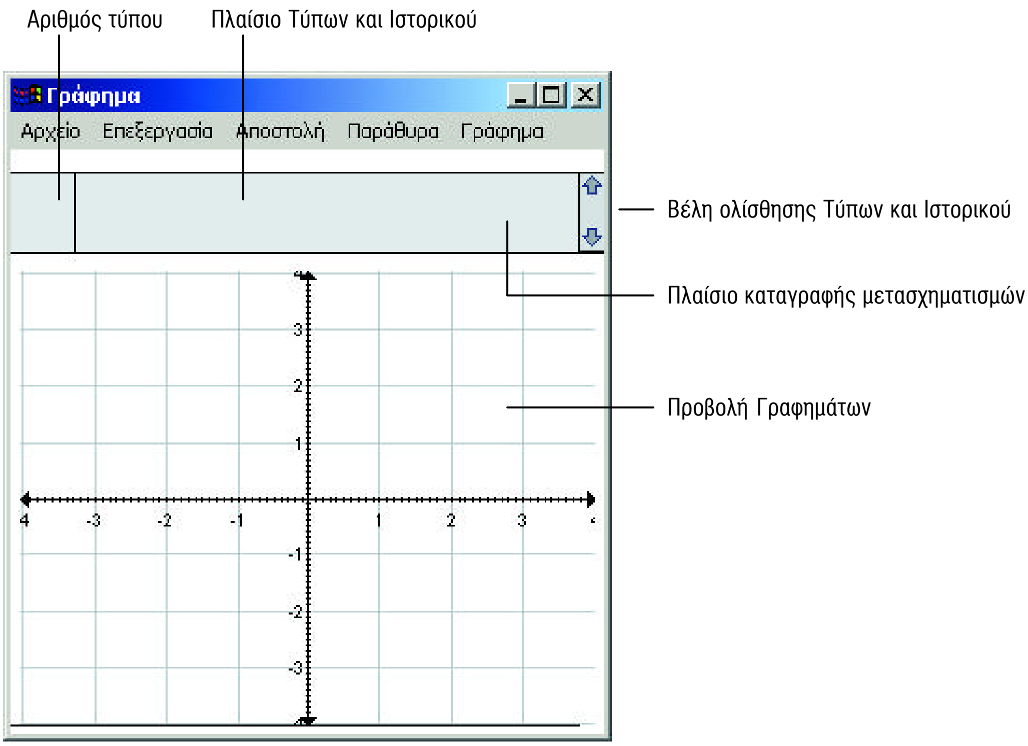
X					Y
d διάμετρος (cm)	r=d/2 ακτίνα (cm)	c=2πr μήκος περιφέρειας (cm)	a=πr^2 εμβαδό (cm^2)	p=0.06c τιμή με το μήκος περιφέρειας (ευρώ)	m=0.007a τιμή με το εμβαδό (ευρώ)
15	7.5	47.12	176.71	2.83	1.24
30	15	94.25	706.86	5.65	4.95
31	15.5	97.39	754.77	5.84	5.28
32	16	100.53	804.25	6.03	5.63
33	16.5	103.67	855.3	6.22	5.99
34	17	106.81	907.92	6.41	6.36
34.1	17.05	107.13	913.27	6.43	6.39
34.2	17.1	107.44	918.63	6.45	6.43
34.3	17.15	107.76	924.01	6.47	6.47
34.4	17.2	108.07	929.41	6.48	6.51
34.5	17.25	108.38	934.82	6.5	6.54
34.6	17.3	108.7	940.25	6.52	6.58
34.7	17.35	109.01	945.69	6.54	6.62
34.8	17.4	109.33	951.15	6.56	6.66
34.9	17.45	109.64	956.62	6.58	6.7
35	17.5	109.96	962.11	6.6	6.73
36	18	113.1	1017.88	6.79	7.13
37	18.5	116.24	1075.21	6.97	7.53
38	19	119.38	1134.11	7.16	7.94

<u>Παρατηρήστε το παράθυρο ‘Πίνακας’ και απαντήστε στην ερώτηση 5 του φύλλου εργασίας.</u>

Μέρος ΙΙΙ. Γραφική παράσταση

Για να αναπαραστήσετε γραφικά τις σχέσεις μεταξύ της διαμέτρου κάθε πίτσας και του κόστους της με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου (και αντίστοιχα με το εμβαδό), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το παράθυρο ‘Γράφημα’ του Function Probe.

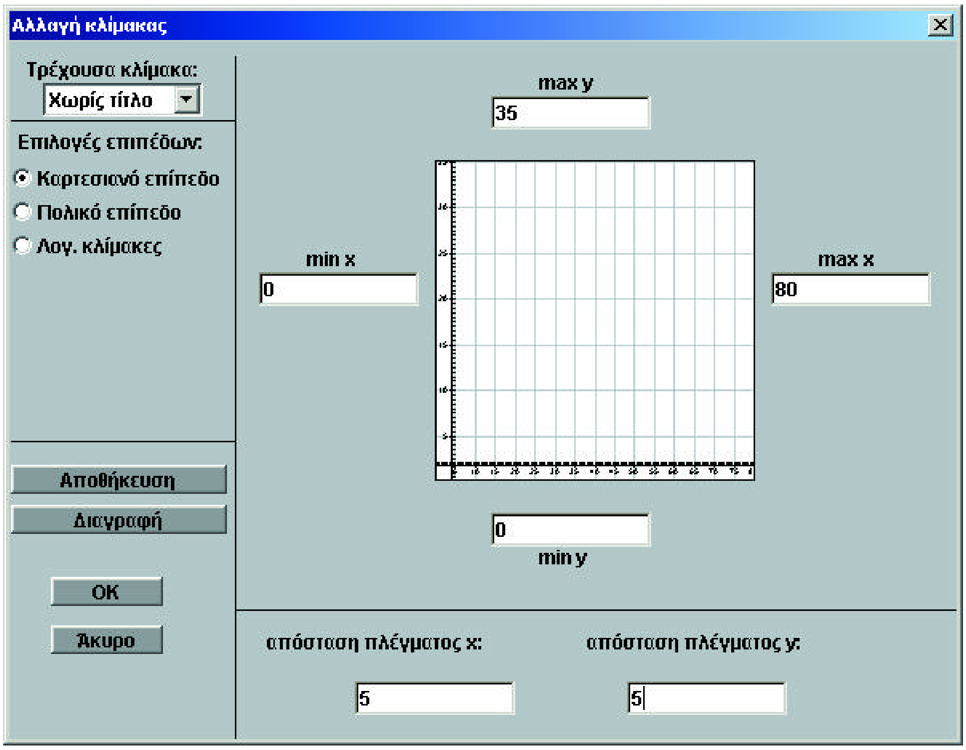




Βήμα 1. Αποστολή δεδομένων από τον ‘Πίνακα’ στο ‘Γράφημα’
Έστω ότι θέλετε να αναπαραστήσετε γραφικά τις τιμές που αντιστοιχούν στη σχέση μεταξύ διαμέτρου και κόστους πίτσας με το μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Αφού οι τιμές αυτές βρίσκονται ήδη στο παράθυρο ‘Πίνακας’, μπορείτε να τις ‘στείλετε’ στο ‘Γράφημα’ ως εξής: Τοποθετείτε (σύροντας με το ποντίκι) τα εικονίδια και πάνω από τις στήλες των μεταβλητών d και p αντίστοιχα. Στη συνέχεια επιλέγετε από το μενού ‘Αποστολή’ την εντολή ‘Σημεία σε Γράφημα’. Οι τιμές τώρα εμφανίζονται ως διακριτά σημεία στο ‘Γράφημα’. Για να μπορέσετε να τα δείτε, θα πρέπει να αλλάξετε την κλίμακα των αξόνων (εντολή ‘Αλλαγή κλίμακας’ στο μενού ‘Γράφημα’).

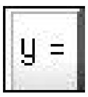
Βήμα 2. Αλλαγή κλίμακας
Από το μενού ‘Γράφημα’ επιλέγετε ‘Αλλαγή κλίμακας’. Εμφανίζεται ένα παράθυρο διαλόγου, στο

οποίο θα πρέπει να καθορίσετε τα άκρα των αξόνων (min x, max x, min y, max y), καθώς και το διάστημα μεταξύ των γραμμών πλέγματος πάνω στους άξονες (απόσταση πλέγματος x, απόσταση πλέγματος y). Μπορείτε να πληκτρολογήσετε τις τιμές, όπως αυτές φαίνονται στην εικόνα. (Οι τιμές της διαμέτρου βρίσκονται στον άξονα x και οι αντίστοιχες τιμές της πίτσας στον άξονα y).



Βήμα 3. Γραφική αναπαράσταση τύπου

Μπορείτε να αναπαραστήσετε γραφικά επιπλέον τιμές πίτσας, πέρα από αυτές που έχετε τώρα στο ‘Γράφημα’. Για να αναπαραστήσετε κάθε δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το μέγεθος της πίτσας, θα μπορούσατε να κατασκευάσετε μια γραμμή που να περνά από όλα τα σημεία. Αυτό

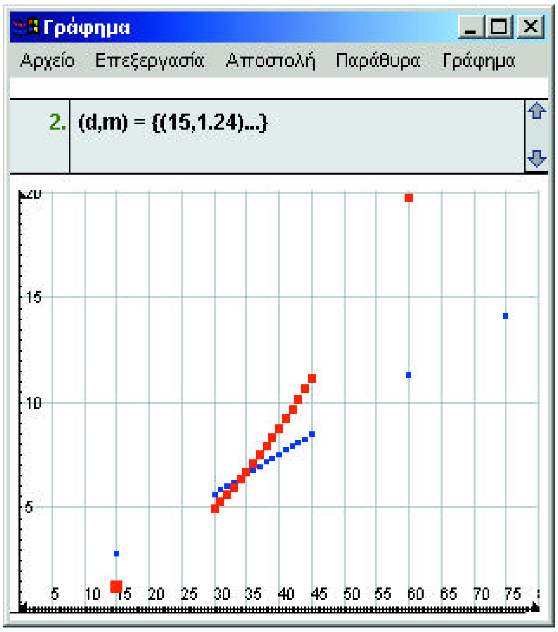


(α)

μπορείτε να το κάνετε εισάγοντας τον τύπο που συνδέει την τιμή και τη διάμετρο της πίτσας. Πηγαίνετε λοιπόν στην ‘Εργαλειοθήκη’ του παραθύρου ‘Γράφημα’, κάντε κλικ στο εικονίδιο νέου τύπου (α), και πληκτρολογήστε στο ‘Πλαίσιο Τύπων’ τον τύπο p=0,06πd (αφού η τιμή της πίτσας με το μήκος της περιφέρειας είναι p=0,06c και το =2πr=πd) και τέλος πατήστε το πλήκτρο ‘Enter’. Το Function Probe θα κατασκευάσει τη γραφική αναπαράσταση της σχέσης η οποία θα περνάει από τα σημεία που έχετε ήδη στείλει από το παράθυρο ‘Πίνακας’ στο ‘Γράφημα’.

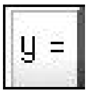
Βήμα 4. Γραφική αναπαράσταση σημείων

Εάν θέλετε να αναπαραστήσετε τα σημεία της σχέσης μεταξύ διαμέτρου της πίτσας και τιμής της με το εμβαδό, θα ακολουθήσετε πάλι τα προηγούμενα βήματα (τοποθετώντας το εικονίδιο πάνω από τη στήλη ‘διάμετρος’ και το πάνω από τη στήλη ‘τιμή με το εμβαδό’). Τώρα το γράφημά σας θα φαίνεται όπως παρακάτω:



Βήμα 5. Αντιστοίχιση γραμμής στα σημεία

Η αντιστοίχιση της γραμμής στα σημεία που στείλατε από τον ‘Πίνακα’ στο ‘Γράφημα’ μπορεί να γίνει και με έναν άλλο τρόπο. Θυμηθείτε ότι στην ‘Αριθμομηχανή’ έχετε κατασκευάσει ένα κουμπί

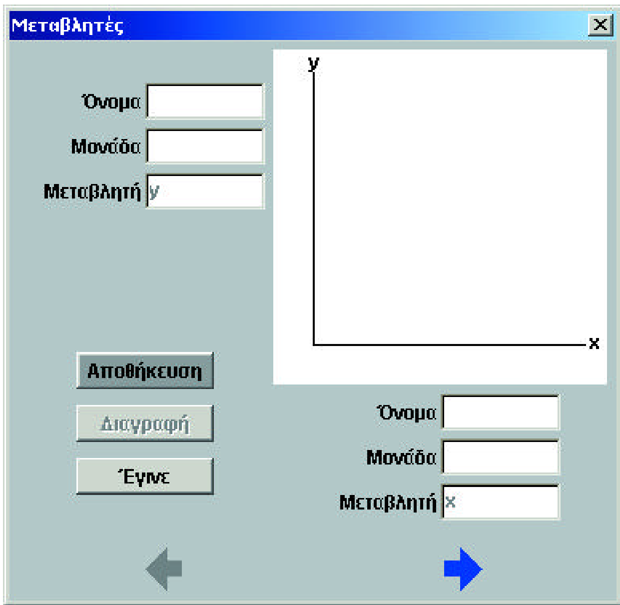


(α)

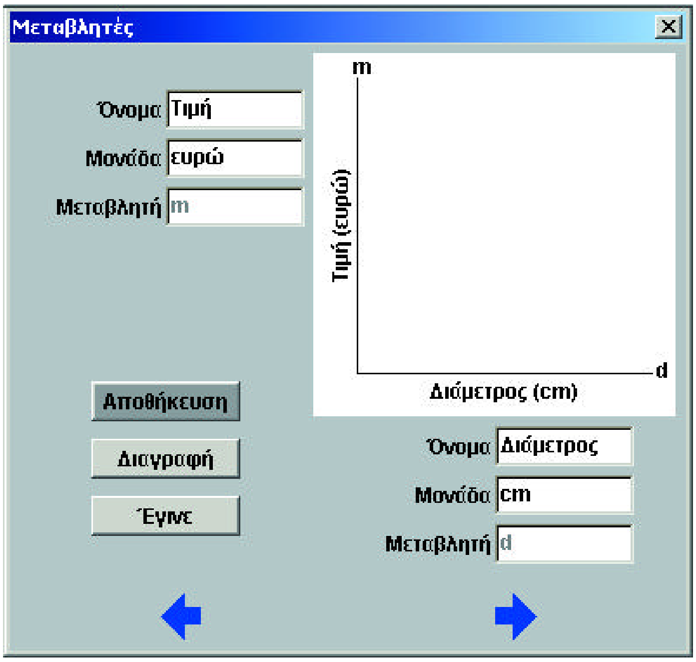
που το ονομάσατε ‘τιμή με το εμβαδό’ (B2). Για να κατασκευάσετε τη γραμμή που περνάει από τα σημεία, θα πρέπει να κάνετε κλικ στο εικονίδιο νέου τύπου (α), να πληκτρολογήσετε στο πλαίσιο τύπων’ ‘m=B2(d)’ και τέλος να πατήσετε το πλήκτρο ‘Enter’.

Βήμα 6. Ετικέτες αξόνων

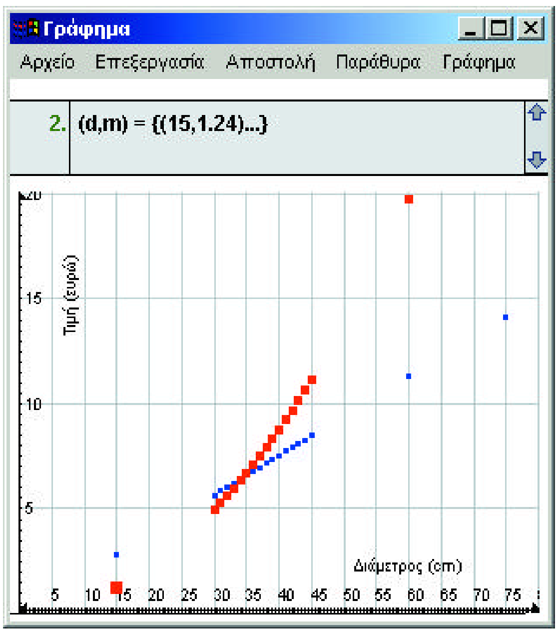
Το τελευταίο βήμα είναι να ονομάσετε τους άξονες. Πηγαίνετε στο μενού ‘Γράφημα’ και επιλέξτε την εντολή ‘Μεταβλητές’. Θα εμφανιστεί το παρακάτω παράθυρο διαλόγου:



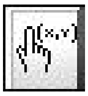
Σημειώστε ότι το ζεύγος μεταβλητών (d, m) θα εμφανιστεί στο παράθυρο γιατί είναι το τελευταίο που χρησιμοποιήθηκε. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα μπλε βέλη για να μετακινηθείτε μεταξύ των υπολοίπων ζευγών των μεταβλητών. Μπορείτε τώρα να εισαγάγετε τα ονόματα των μεταβλητών και τις μονάδες τους, όπως φαίνεται παρακάτω.



Όταν συμπληρώσετε τα αντίστοιχα κουτάκια, κάντε κλικ στο κουμπί ‘Αποθήκευση’ για να αποθηκεύσετε τις αλλαγές. Αφού κάνετε το ίδιο και με το άλλο ζεύγος μεταβλητών, κάντε κλικ στο κουμπί ‘Έγινε’. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε ένα σημείο. Το γράφημά σας θα έχει την παρακάτω μορφή:



Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε ένα σημείο. Για να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής, κάντε κλικ στο εικονίδιο δείκτη σημείου (α), και προσεγγίστε το όσο περισσότερο μπορείτε. Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε και το εικονίδιο μεγέθυνσης για να δείτε καλύτερα το σημείο τομής.



(α)

Απαντήστε τώρα στην ερώτηση 6 στο φύλλο εργασίας.

Για να αποθηκεύετε τις αλλαγές που κάνετε, θυμηθείτε να επιλέγετε την εντολή 'Αποθήκευση χώρου εργασίας' από το μενού 'Αρχείο' οποιουδήποτε παραθύρου, όσο το δυνατόν συχνότερα κατά τη διάρκεια της εργασίας σας.

Ακολουθούν τώρα κάποιες επιπλέον λειτουργίες του παραθύρου 'Γράφημα':

> Για να απαλείψετε μια γραφική παράσταση, αρχικά επιλέξτε την κάνοντας κλικ πάνω στη γραφική της παράσταση και στη συνέχεια επιλέξτε την εντολή 'Απαλοιφή επιλογών' από το μενού 'Επεξεργασία'. Εναλλακτικά, πατήστε το πλήκτρο 'Delete' στο πληκτρολόγιο.

> Για να απαλείψετε όλες τις γραφικές παραστάσεις που βρίσκονται στο παράθυρο 'Γράφημα', επιλέξτε την εντολή 'Επιλογή όλων' από το μενού 'Επεξεργασία' και μετά την εντολή 'Απαλοιφή επιλογών' από το ίδιο μενού. Εναλλακτικά, πατήστε το πλήκτρο 'Delete' στο πληκτρολόγιο.

> Μπορείτε να έχετε ανοικτά μέχρι τρία παράθυρα γραφημάτων. Για να ανοίξετε ένα επιπλέον παράθυρο 'Γράφημα', επιλέξτε την εντολή 'Προσθήκη παραθύρου Γραφήματος' από το μενού 'Παράθυρα' του παραθύρου 'Γράφημα'.

Μέρος IV. Εκτύπωση και κλείσιμο

Για να εκτυπώσετε οποιοδήποτε παράθυρο, ενεργοποιήστε το και κατόπιν επιλέξτε την εντολή 'Εκτύπωση' από το μενού 'Αρχείο'. Θυμηθείτε ότι για να ενεργοποιήσετε κάποιο παράθυρο, αρκεί να κάνετε κλικ σε οποιοδήποτε σημείο του παραθύρου ή να το καλέσετε με το όνομά του από το μενού 'Παράθυρα' των υπόλοιπων παραθύρων. Για να βγείτε από το Function Probe, επιλέξτε την εντολή ''Έξοδος' από το μενού 'Αρχείο' οποιουδήποτε παραθύρου.

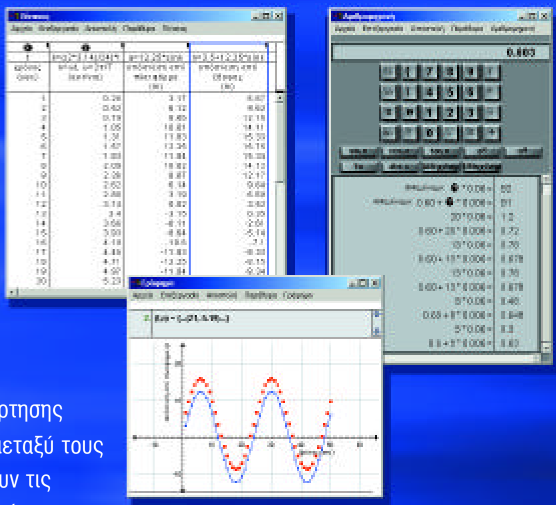
Εδώ τελειώνει η σύντομη εισαγωγή στη χρήση του Function Probe. Μέχρι στιγμής έχετε συναντήσει μόνο μερικά από τα χαρακτηριστικά του. Εάν ασχοληθείτε με το πρόγραμμα, μπορείτε να γνωρίσετε περισσότερα χαρακτηριστικά του από το **Εγχειρίδιο Χρήστη**.

Ελπίζουμε ότι το πρόγραμμα σας φάνηκε όχι μόνο χρήσιμο αλλά και διασκεδαστικό!

Πίνακας συναρτήσεων

Όνομα Συνάρτησης	Συντομογραφία	Περιγραφή
τετραγωνική ρίζα	sqrt	Υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού. Η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές.
λογάριθμος	**log**	**Το $\log_a x$ είναι το αντίστροφο του a^x.**
εκθετική	exp	
ακέραιο μέρος διαίρεσης	**idiv**	**Υπολογίζει το ακέραιο μέρος μιας διαίρεσης.**
υπόλοιπο διαίρεσης	mod	Υπολογίζει το υπόλοιπο μιας διαίρεσης.
απόλυτη τιμή	**abs**	**Υπολογίζει την απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν.**
ημίτονο	sin	
συνημίτονο	**cos**	
εφαπτομένη	tan	tan(x)=sin(x)/cos(x)
συνεφαπτομένη	**cot**	**cot(x)= cos(x)/ sin(x)=1/ tan(x)**
τόξο ημιτόνου	arcsin	$\arcsin(x)=\sin^{-1}(x)$
τόξο συνημιτόνου	**arccos**	**$\arccos(x)=\cos^{-1}(x)$**
τόξο εφαπτομένης	arctan	$\arctan(x)=\tan^{-1}(x)$
τόξο συνεφαπτομένης	**arccot**	**$\mathrm{arccot}(x)=\cot^{-1}(x)$**
υπερβολική εφαπτομένη	tanh	$\tanh(x)=\sinh(x)/\cosh(x)=(e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$
υπερβολική συνεφαπτομένη	**coth**	**$\coth(x)= \cosh(x)/\sinh(x)=(e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$**
ανάστροφο ημίτονο-τέμνουσα	sec	sec(x)=1/sin(x)
ανάστροφο συνημίτονο-συντέμνουσα	**csc**	**csc(x)=1/cos(x)**
τόξο τέμνουσας	asec	$\mathrm{asec}(x)= 1/ \sin^{-1}(x)$
τόξο συντέμνουσας	**acsc**	**$\mathrm{acsc}(x)=1/ \cos^{-1}(x)$**
υπερβολική τέμνουσα	sech	$\mathrm{sech}(x) =1/\cosh(x)=2/(e^x + e^{-x})$
υπερβολική συντέμνουσα	**csch**	**$\mathrm{csch}(x)=1/\sinh(x)= 2/(e^x - e^{-x})$**
ακέραιο μέρος αριθμού	int	Δίνει το ακέραιο μέρος ενός αριθμού. Για παράδειγμα, int(1.1)=1 και int(-1.1)=-1
στρογγυλοποίηση σε ακέραιο	**round**	**Στρογγυλοποιεί τον αριθμό στον πλησιέστερο ακέραιο. Για παράδειγμα, round(1.5)=2 και round(1.4)=1**
floor	floor	Στρογγυλοποιεί τον αριθμό προς το μικρότερο ακέραιο. Για παράδειγμα, floor(1.1)=1 και floor(-1.1)=-2.
ceiling	**ceil**	**Στρογγυλοποιεί τον αριθμό προς το μεγαλύτερο ακέραιο. Για παράδειγμα, ceil(1.1)=2 και ceil(-1.1)=-1.**
συνάρτηση μοναδιαίου βήματος	step	Το βήμα του x για x<0 δίνει 0 και το βήμα του x για x>0 δίνει 1.
πρόσημο αριθμού	**sgn**	**Δίνει το '+' αν ο αριθμός είναι θετικός και το '-' αν ο αριθμός είναι αρνητικός.**

Το λογισμικό Function Probe στη διδασκαλία των συναρτήσεων



Οι διδακτικές πρακτικές που υπαγορεύονται από τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα στρέφονται προς τη μετατροπή της παραδοσιακής σχολικής τάξης σε ένα εργαστήρι, όπου δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να συμμετέχει ενεργά στην απόκτηση της γνώσης, επιτρέποντάς του να πειραματίζεται, να διερευνά μαθηματικές έννοιες και προβλήματα συνεργαζόμενος με τους συμμαθητές του και έχοντας τον καθηγητή συνεργάτη και καθοδηγητή του.

Στο πλαίσιο αυτό, το Function Probe αποτελεί ένα εργαλείο έκφρασης, πειραματισμού και διερεύνησης στα χέρια των μαθητών για τη μελέτη των συναρτήσεων, παρέχοντάς τους τη δυνατότητα:

> να χρησιμοποιήσουν και να συνδέσουν όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (αλγεβρικό τύπο, γραφική παράσταση, πίνακα τιμών) και να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ τους

> να μετασχηματίσουν τον τύπο και τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να δουν τις επιπτώσεις των μετασχηματισμών αυτών στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

> να πειραματιστούν αλλάζοντας τα δεδομένα σε μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης και να παρατηρήσουν τις επιπτώσεις των αλλαγών αυτών στην άλλη, π.χ. να αλλάξουν τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα τιμών μιας συνάρτησης και να παρατηρήσουν τις μεταβολές της γραφικής της παράστασης

> να δημιουργήσουν τις δικές τους συναρτήσεις είτε με τη μορφή ενός κουμπιού στο παράθυρο 'Αριθμομηχανή' είτε με τη μορφή δύο εξαρτημένων στηλών στο παράθυρο 'Πίνακας'.

Το λογισμικό Function Probe εξελληνίστηκε και προσαρμόστηκε στο πλαίσιο του έργου ΚΙΡΚΗ, αντικείμενο του οποίου είναι ο εξελληνισμός και η προσαρμογή στις ανάγκες του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος ώριμων και καταξιωμένων προϊόντων εκπαιδευτικού λογισμικού της διεθνούς αγοράς καθώς και η αναπαραγωγή και διανομή των προϊόντων αυτών σε 350 σχολικά εργαστήρια.

Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας
ΟΔΥΣΣΕΙΑ

Το έργο για το διάστημα 2000-2003 χρηματοδοτείται από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Κοινωνίας της Πληροφορίας (ΚτΠ), Γ΄ΚΠΣ, Μέτρο 1.2. (Φορέας Υλοποίησης & επίβλεψης υποέργων: Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ε.Α. ΙΤΥ). Φορέας Χρηματοδότησης: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Επίβλεψη: Διεύθυνση Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και Γραφείο Κοινωνίας της Πληροφορίας του Υπ.Ε.Π.Θ.. Πιστοποίηση: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο).

Η ΚΙΡΚΗ αποτελεί συνέχεια αντίστοιχου έργου της Ενέργειας Οδύσσεια - Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας, το εθνικό πρόγραμμα παιδαγωγικής ένταξης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, το οποίο χρηματοδοτήθηκε για το διάστημα 1996-2001 από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης - ΕΠΕΑΕΚ, Β' ΚΠΣ του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Το πρόγραμμα περιλάμβανε:

- ανάπτυξη κατάλληλης υποδομής σε 385 σχολεία εφαρμογής (εγκατάσταση σχολικών εργαστηρίων στα οποία υποστηρίζεται η διδασκαλία διαφόρων μαθημάτων, δικτύωση στο Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο, τοπική και εξ αποστάσεως τεχνική υποστήριξη),
- μεταπτυχιακή εκπαίδευση 95 επιμορφωτών (καθηγητές όλων των ειδικοτήτων) σε εξειδικευμένα ετήσια πανεπιστημιακά προγράμματα, οι οποίοι ανέλαβαν τη
- διαρκή ενδοσχολική επιμόρφωση των 5.500 εκπαιδευτικών που υπηρετούσαν στα σχολεία αυτά -και όχι μόνο- ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους
- διερευνητικό, διαθεματικό εκπαιδευτικό λογισμικό (αναπτύχθηκαν ή προσαρμόστηκαν συνολικά 72 πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού (http://edsoft.cti.gr/), διαφόρων μεγεθών και επιπέδου ωριμότητας, από κοινοπραξίες φορέων που συνδυάζουν τεχνική, παιδαγωγική και παραγωγική τεχνογνωσία (Πανεπιστήμια, Ερευνητικά Ινστιτούτα, Εταιρίες Πληροφορικής, Εκδότες).

Στην υλοποίηση του προγράμματος αυτού συμμετείχαν πάνω από 1000 επιστήμονες, παιδαγωγοί, μηχανικοί και διοικητικοί υπάλληλοι, οι οποίοι εργάστηκαν σε 57 πανεπιστημιακά τμήματα, 53 εταιρίες και 18 μουσεία, ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα.

Στο πλαίσιο της ΚΙΡΚΗΣ εξελληνίστηκαν και προσαρμόστηκαν συνολικά 22 προϊόντα εκπαιδευτικού λογισμικού τα οποία επιλέχθηκαν μέσα από δεκάδες καταξιωμένα προϊόντα της διεθνούς αγοράς (6 προϊόντα χρηματοδοτήθηκαν στο πλαίσιο του ΕΠΕΑΕΚ, Β΄ΚΠΣ και άλλα 16 στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος Κοινωνίας της Πληροφορίας, Γ΄ΚΠΣ). Τα πακέτα εκπαιδευτικού λογισμικού αποστέλλονται στα σχολεία μετά από αξιολόγηση του Γραφείου Πιστοποίησης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου ως προς την παιδαγωγική τους αρτιότητα και του Ε.Α. ΙΤΥ ως προς την τεχνολογική τους αρτιότητα.

Η δημόσια χρηματοδότηση της προσαρμογής των υποέργων της ΚΙΡΚΗΣ εξασφαλίζει ότι η τιμή πώλησης του παρόντος λογισμικού στην Ελληνική αγορά δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη στη διεθνή αγορά.

Κέντρο Πληροφόρησης Οδύσσειας: Infodesk.Odysseia@cti.gr
http://Odysseia.cti.gr/kirki/

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
ΙΤΥ
Κίρκη
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΙΕΘΝΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
QUEST MULTIMEDIA Austin, TX USA
EXODUS e.SOLUTIONS