Σύνθετα θέματα – /σελίδα 306

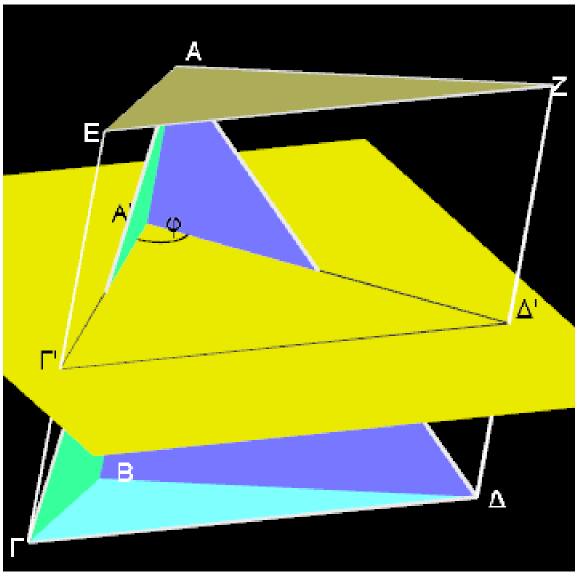
Να αποδείξετε ότι:

1. Ο όγκος τετραέδρου ισούται με το γινόμενο της προβολής του σε επίπεδο κάθετο σε μία ακμή επί το ένα τρίτο της ακμής αυτής.
2. Αν συμβολίσουμε: με V τον όγκο του τετραέδρου, με α το μήκος της ακμής αυτής, με φ τη δίεδρη γωνία της ακμής, με S_1, S_2, τα εμβαδά των εδρών που πρόσκεινται στην ακμή, τότε ισχύει.

$$V = \frac{2S_1 \cdot S_2 \cdot ημφ}{3α}$$

3. $V = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ΑΔ \cdot ημ\hat{ΒΑΓ} \cdot ημ\hat{ΒΑΔ} \cdot ημφ}{6}$

Απόδειξη.



1. Ο όγκος του τετραέδρου είναι ίσος με το ένα τρίτο του όγκου του πρίσματος, ο οποίος είναι ίσος με το εμβαδόν μιας κάθετης τομής του σε μια ακμή επί το μήκος της ακμής, άρα

$$V = (Α'Γ'Δ') \cdot \frac{1}{3}α \quad (1)$$

2. Το εμβαδόν της έδρας ΑΒΓ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου ΑΕΓΒ, στο αν πάρουμε βάση την ΑΒ=α η $Γ'Α'$ είναι ύψος, άρα:

$$S_1 = \frac{ΑΕΓΒ}{2} = \frac{ΑΒ \cdot Γ'Α'}{2} = \frac{α \cdot Γ'Α'}{2} \quad άρα \quad Γ'Α' = \frac{2S_1}{α}$$

Όμοια:

$$S_2 = \frac{ΑΖΔΒ}{2} = \frac{ΑΒ \cdot Δ'Α'}{2} = \frac{α \cdot Δ'Α'}{2} \quad άρα \quad Δ'Α' = \frac{2S_2}{α}$$

Είναι :

$$(Α'Γ'Δ') = \frac{1}{2}Α'Γ' \cdot Α'Δ' \cdot ημφ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_1}{α} \cdot \frac{2S_2}{α} = \frac{2S_1 \cdot S_2 \cdot ημφ}{α^2}$$

Και η (1) δίδει:

$$V = \frac{2S_1 \cdot S_2 \cdot ημφ}{3α}$$

3. Εκφράζουμε τα S_1, S_2 συναρτήσει των πλευρών και του ημιτόνου.