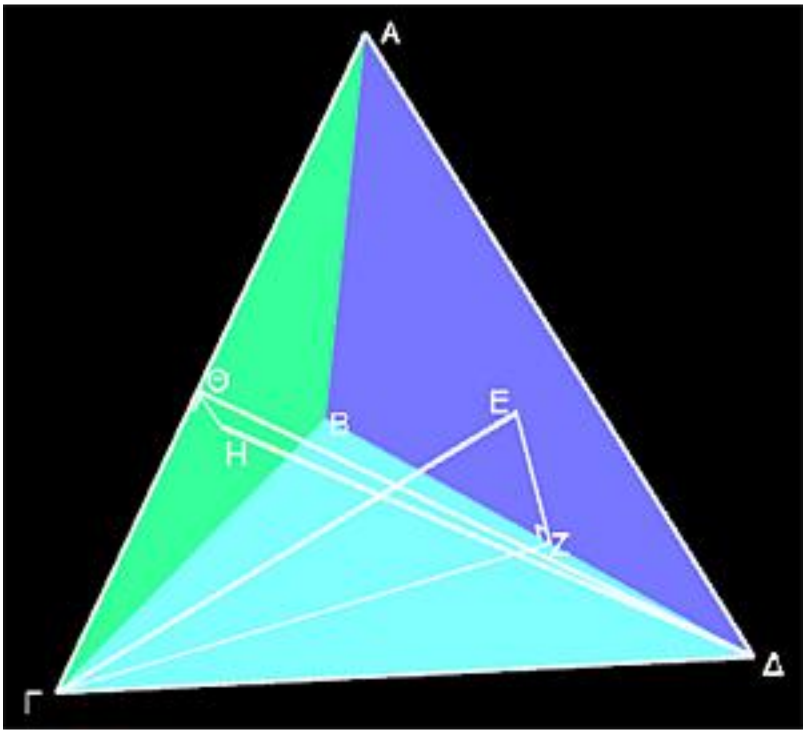
Άσκηση 1. Θεωρούμε δύο απέναντι ακμές του τετραέδρου ΑΒΓΔ, τις ΑΓ και ΒΔ, ονομάζουμε θ τη δίεδρη γωνία με ακμή την ΑΓ και φ τη δίεδρη γωνία με ακμή τη ΒΔ. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}}{\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\varphi}=\frac{4(\mathrm{AB\Gamma})(\mathrm{AB\Delta})(\mathrm{A\Gamma\Delta})(\mathrm{B\Gamma\Delta})}{9V^2} \quad (1)$$

όπου, V ο όγκος και (ΑΒΓ),(ΑΒΔ),(ΑΓΔ),(ΒΓΔ) τα εμβαδά των αντιστοίχων εδρών του τετραέδρου. Η σχέση (1) μας δείχνει ότι το πηλίκο στο πρώτο μέλος της είναι σταθερό, είναι το ίδιο για κάθε ζευγάρι απέναντι ακμών που θα επιλέξουμε. Η σχέση (1) είναι για το τετράεδρο ότι η σχέση $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$ (βλέπε παράγραφο 10.4) για το τρίγωνο.

Απόδειξη.



Φέρουμε την ΓΕ κάθετη στο επίπεδο της έδρας ΑΒΔ, την ΕΖ κάθετη στην ΒΔ, οπότε και η ΓΖ είναι κάθετη στην ΒΔ. Επίσης την ΔΗ κάθετη στο ΑΒΓ, ΗΘ κάθετη στην ΑΓ, οπότε και ΔΘ κάθετη στην ΑΓ. Είναι $\theta=\widehat{\Delta\Theta H}$ και $\varphi=\widehat{\Gamma Z E}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΘ έχουμε:

$$\eta\mu\theta=\frac{\Delta H}{\Delta\Theta}, \text{άρα } \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\eta\mu\theta}=\frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\Theta}{\Delta H}, (2)$$

Αλλά η ΔΘ είναι ύψος στο ΑΓΔ, άρα

$$\mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\Theta=2(\mathrm{A\Gamma\Delta}), (3)$$

Το ΔΗ είναι ύψος του τετραέδρου, άρα $V=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})\cdot\Delta H$ ή $\frac{1}{\Delta H}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{3V}$, (4)

Άρα η (2) λόγω των (3),(4) γίνεται:

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\eta\mu\theta}=\frac{2(\mathrm{A\Gamma\Delta})(\mathrm{AB\Gamma})}{3V}, (5)$$

Στον αριθμητή του κλάσματος εμφανίζονται τα εμβαδά των εδρών της δίεδρης

Όμοια προκύπτει: $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\eta\mu\varphi}=\frac{2(\mathrm{B\Gamma\Delta})(\mathrm{AB\Delta})}{3V}$, (6)

Πολλαπλασιάζοντας τις (5) και (6) προκύπτει η (1).