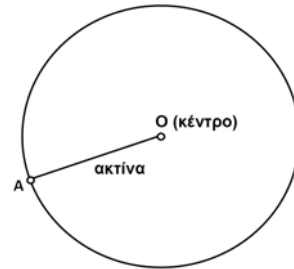


Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα

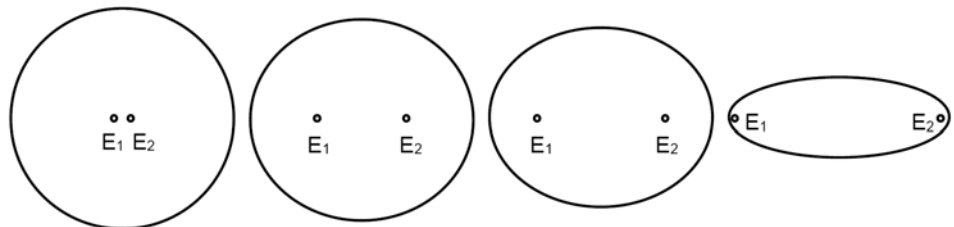
Στη δραστηριότητα αυτή θα εξερευνήσετε ίσως την πλέον κοινή μέθοδο κατασκευής μιας έλλειψης. Προκειμένου να θέσετε το πλαίσιο για την κατασκευή αυτή, πρέπει να κατανοήσετε το νόημα των όρων *κύκλος* και *έλλειψη*.

Ορισμός: *Κύκλος* είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε η απόσταση κάθε μέλους του συνόλου από ένα σταθερό σημείο (*κέντρο*) να είναι σταθερή.



Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο O με ένα σημείο στην περιφέρεια του κύκλου αποτελεί μια **ακτίνα** του κύκλου. Το τμήμα OA είναι μια ακτίνα του κύκλου στο σχήμα δεξιά.

Τώρα φανταστείτε ότι το κέντρο του κύκλου χωρίζεται σε δύο σημεία που απομακρύνονται μεταξύ τους. Καθώς μετακινούνται αυτά τα σημεία, το σχήμα του κύκλου παραμορφώνεται σε ελλειπτικό, ώστε να στεγάζει τα δύο «κέντρα». Τα σημεία αυτά ονομάζονται **εστιακά σημεία** ή **εστίες** (E_1 και E_2 είναι τα εστιακά σημεία στο παρακάτω σχήμα).



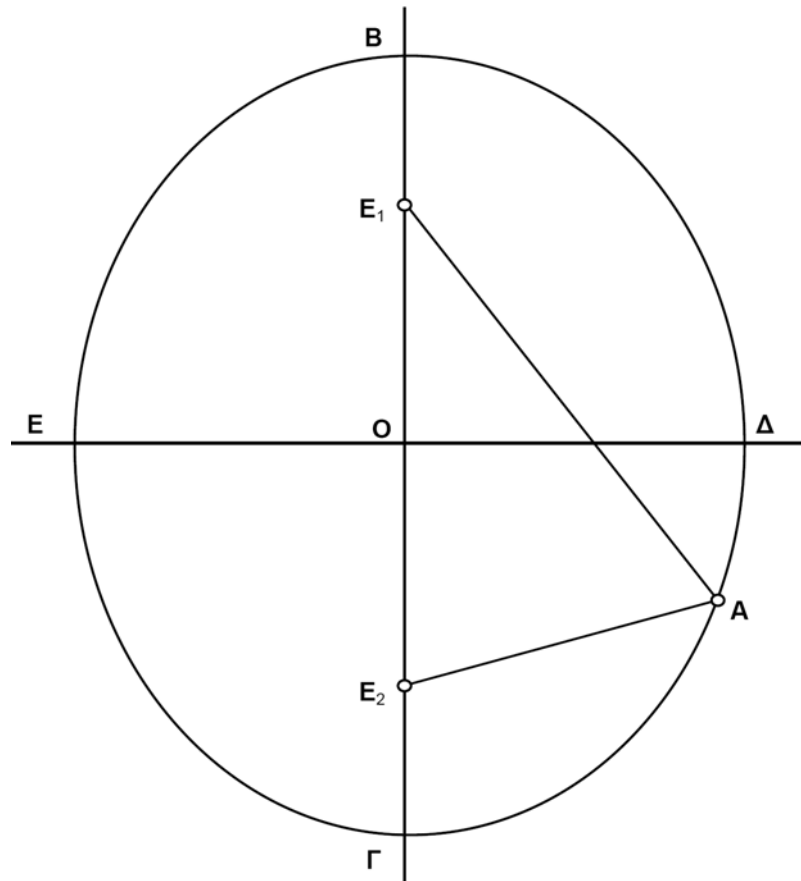
Για τον κύκλο η απόσταση μεταξύ κέντρου και οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας είναι πάντοτε η ίδια, δηλαδή *σταθερή*. Ποια είναι η αντίστοιχη συνθήκη για ένα σχήμα με δύο «κέντρα»; Για κάθε σημείο μιας έλλειψης υπάρχουν δύο αποστάσεις, μια από κάθε εστιακό σημείο. Αν το *άθροισμα* των αποστάσεων αυτών είναι σταθερό, έχουμε μια παρόμοια συνθήκη.

Ορισμός: *Έλλειψη* είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου από τις δύο **εστίες** να είναι σταθερό.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, αν επιλέξετε οποιοδήποτε σημείο της έλλειψης και υπολογίσετε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα δύο εστιακά σημεία, θα προκύπτει πάντοτε η ίδια αριθμητική τιμή. Ελέγξτε αυτό το αποτέλεσμα για την έλλειψη στο επόμενο σχήμα. Επιλέξτε τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές θέσεις για ένα σημείο A που κινείται πάνω στην έλλειψη και μετρήστε τις αποστάσεις κάθε θέσης από τις δύο εστίες.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Υπολογίστε τα αθροίσματα των δύο αποστάσεων. Πόσο πλησιάζουν αριθμητικά μεταξύ τους τα τέσσερα αθροίσματα;

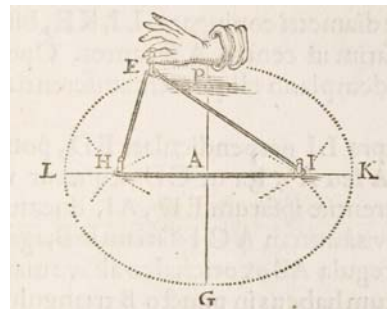


AE_1	AE_2	$AE_1 + AE_2$

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κατασκευή ενός φυσικού μοντέλου

Τώρα που γνωρίζετε τι είναι μια έλλειψη, προχωρήστε στη σχεδιάσή της! Μια κοινή μέθοδος χρησιμοποιεί δύο πινέζες, ένα κομμάτι νήματος και ένα μολύβι. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι πινέζες στερεώνονται σε μια επίπεδη επιφάνεια και το νήμα τοποθετείται γύρω τους. Για τη χρήση της διάταξης, τεντώστε το νήμα με το μολύβι όπως στο σχήμα. Καθώς μετακινείτε το μολύβι γύρω γύρω από τις εστίες διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, η μύτη του μολυβιού χαράσσει μια έλλειψη.



Από το βιβλίο *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* του Ολλανδού μαθηματικού Frans van Schooten, 1646.

Τι χρειάζεστε: Ένα κομμάτι κλωστής ή οδοντικού νήματος, δύο πινέζες, ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί και ένα μολύβι.

1. Ενώστε τα άκρα του νήματος για το σχηματισμό ενός βρόχου. Επιλέξτε δύο σημεία στο χαρτί και στερεώστε το νήμα με τις δύο πινέζες. Ίσως χρειαστεί να επιμηκύνετε ή να κοντύνετε το νήμα, ώστε η έλλειψη να καλύπτει την επιφάνεια του χαρτιού αλλά να μην προεξέχει.
2. Τεντώστε το νήμα με το μολύβι.
3. Διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, μετακινήστε το μολύβι γύρω από τα εστιακά σημεία έτσι ώστε η μύτη του μολυβιού να χαράξει μια καμπύλη. Ίσως χρειαστεί να σηκώσετε τη μύτη από το χαρτί και να την επανατοποθετήσετε για τη χάραξη της πλήρους καμπύλης.

Ερωτήματα

- E1. Δικαιολογήστε το γεγονός ότι αυτή η κατασκευή σχεδιάζει ελλείψεις. Με άλλα λόγια, εξηγήστε πώς αυτή η μέθοδος κατασκευής ικανοποιεί τον ορισμό μιας έλλειψης.
- E2. Πού βρίσκονται τα εστιακά σημεία της έλλειψης;
- E3. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της όταν τη σχεδιάσετε και πάλι με τις πινέζες σε μεγαλύτερη μεταξύ τους απόσταση. Τι συμβαίνει στην περίπτωση ελάττωσης της απόστασης αυτής;
- E4. Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις σας, τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με τα ευθύγραμμα τμήματα BE_1 και GE_2 ; (Δείτε το προηγούμενο μεγάλο σχήμα.)

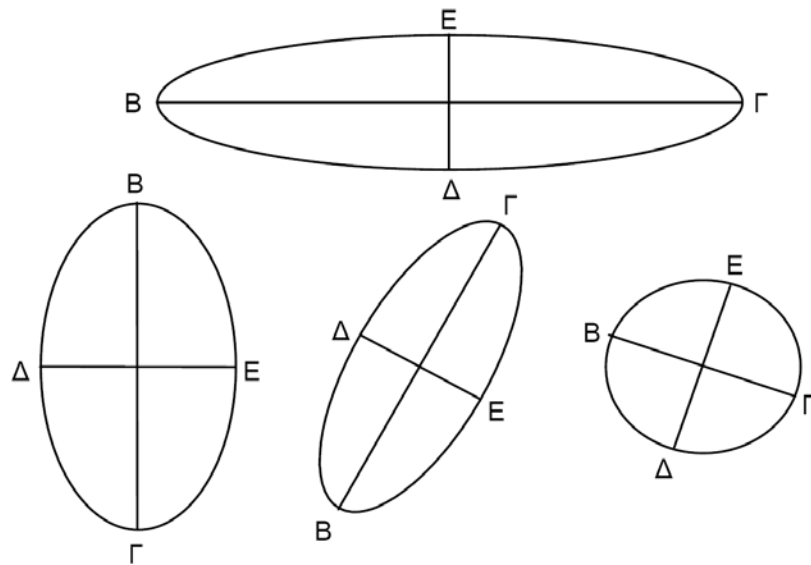
Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

- E5. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος ταυτίζονται. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.
- E6. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος απέχουν τόσο ώστε ολόκληρο το νήμα να είναι τεντωμένο και να έχει το μέγιστο μήκος του. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.

Ακολουθούν ορισμένες δραστηριότητες που θα σας βοηθήσουν να κατανοήσετε την έλλειψη που κατασκευάσατε.

Ερωτήματα

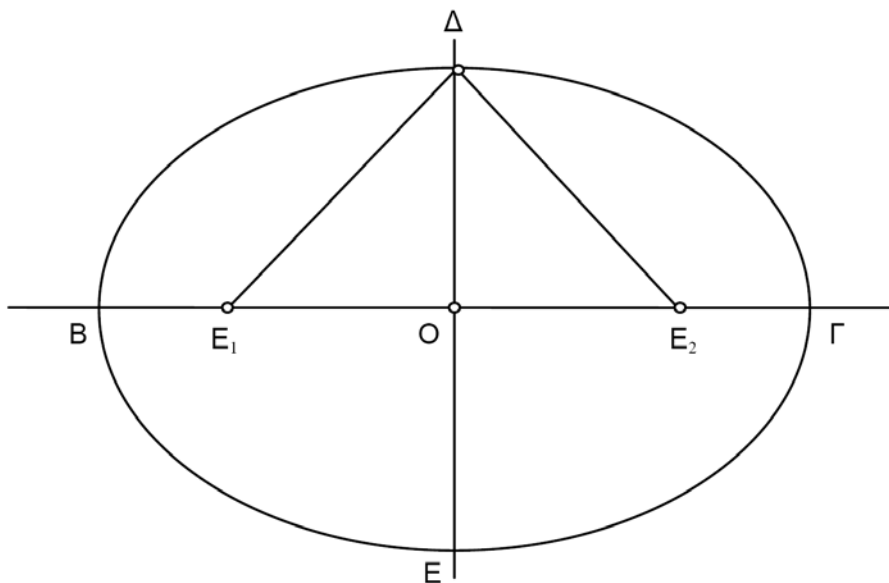
- E1. Σε κάθε έλλειψη αντιστοιχούν δύο σημαντικά ευθύγραμμα τμήματα, ο *μεγάλος άξονας* και ο *μικρός άξονας*. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα το τμήμα ΒΓ είναι ο μεγάλος άξονας και το τμήμα ΔΕ ο μικρός άξονας. Γράψτε έναν ορισμό του μεγάλου και του μικρού άξονα.



- E2. Σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδιάστε με τη βοήθεια του νήματος, των πινεζών και του μολυβιού μια άλλη έλλειψη. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα για τη σχεδίαση και μέτρηση του μεγάλου άξονά της. Χωρίς να προβείτε σε περαιτέρω μετρήσεις, πώς θα προσδιορίσετε το μήκος του νήματος;
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μολύβι σας ώστε να τεντώσετε το νήμα. Στη συνέχεια, μετακινήστε το μολύβι γύρω από την έλλειψη ωσότου εντοπίσετε μια βολική θέση.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Ε3. Στο επόμενο σχήμα το σημείο Δ βρίσκεται στο ένα άκρο του μικρού άξονα της έλλειψης και τα σημεία E_1 και E_2 είναι οι εστίες της έλλειψης. Εάν το μήκος του μεγάλου άξονα ΒΓ είναι 9,5 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων Δ E_1 και Δ E_2 ; Μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!



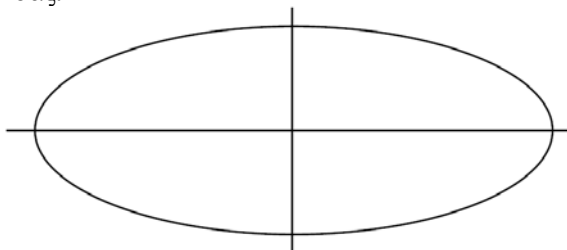
Ε4. Εάν το μήκος του μικρού άξονα ΔΕ είναι 7,2 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των τμημάτων Ο E_1 και Ο E_2 ; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την απάντηση του ερωτήματος 3. Και πάλι μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!

Ε5. Στηριζόμενοι στις απαντήσεις στα ερωτήματα 2-4, ποια είναι η σχέση μεταξύ των τμημάτων ΟΓ, ΟΔ και Ο E_2 ;

Ε6. Το παρακάτω σχήμα εμφανίζει μια έλλειψη και τους δύο άξονές της. Ζητείται ο εντοπισμός των δύο εστιών.

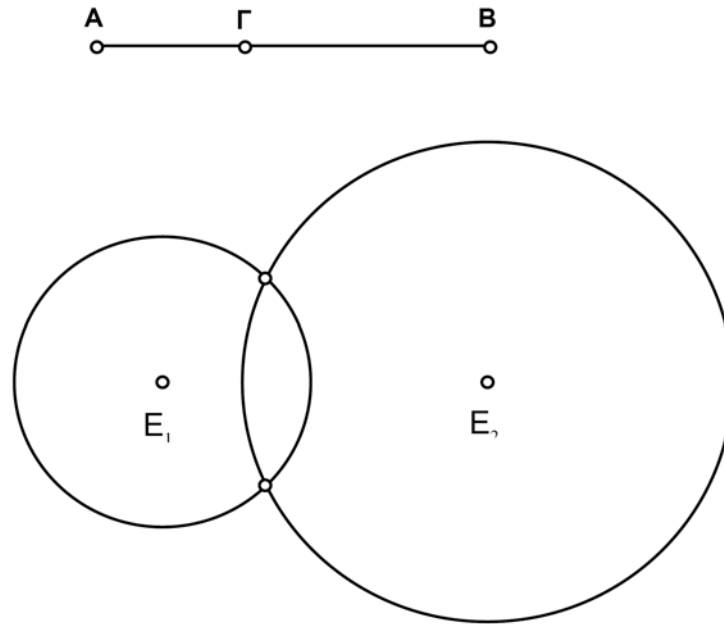
α. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα και έναν υπολογιστή για την εύρεση των εστιακών σημείων. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.

β. Βρείτε τα εστιακά σημεία με χρήση μόνο ενός διαβήτη. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.



Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κάθε φορά που σχεδιάζετε μια νέα έλλειψη με μολύβι, νήμα και πινέζες, πρέπει να επανατοποθετείτε τις πινέζες και να χαράζετε το περίγραμμα με το μολύβι σας. Ένα μοντέλο του Sketchpad καθιστά ευκολότερη την εξερεύνηση μιας ποικιλίας ελλείψεων.



Λεπτομέρειες κατασκευής

1. Κατασκευάστε μια ευθεία και αποκρύψτε τα σημεία ελέγχου της. Κατασκευάστε τα σημεία A, B και Γ στην ευθεία. Η θέση αυτών των σημείων είναι αυθαίρετη αλλά το σημείο Γ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B.
2. Αποκρύψτε την ευθεία και κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ.
3. Δημιουργήστε τις ετικέτες των σημείων E1 και E2 που αναπαριστούν τις εστίες της έλλειψής σας.
4. Χαράξτε έναν κύκλο με κέντρο το E1 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΑΓ. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο με κέντρο το E2 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΓΒ.
5. Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής των κύκλων. Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε το μοντέλο σας ώστε οι κύκλοι να τέμνονται. Επιλέξτε τα σημεία τομής και την εντολή Σχεδίαση Ιχνους τομών από το μενού Προβολή.
6. Σύρτε το σημείο Γ εμπρός και πίσω κατά μήκος του τμήματος ΑΒ. Το ίχνος των δύο σημείων πρέπει να αποτελεί μια έλλειψη.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Ερωτήματα

- E1. Εξηγήστε γιατί τα σημεία τομής των δύο κύκλων ικανοποιούν τον ορισμό μιας έλλειψης.
- E2. Πειραματιστείτε με διαφορετικές θέσεις των εστιακών σημείων και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της έλλειψης. Περιγράψτε τα ευρήματά σας.
- E3. Έστω ότι οι θέσεις των σημείων Α και Β παραμένουν σταθερές στην ευθεία. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων για την οποία είναι δυνατή η σχεδίαση μιας έλλειψης;
- E4. Μελετήστε ξανά τα βήματα της κατασκευής του μοντέλου. Όταν το σημείο Γ μετακινείται εμπρός και πίσω μεταξύ των σημείων Α και Β, η τομή των κύκλων διαγράφει μια έλλειψη. Ποιο είναι το μήκος του μεγάλου άξονα αυτής της έλλειψης;

Οι ελλείψεις που σχεδιάσατε σε αυτή τη δραστηριότητα είναι διαφορετικές. Ορισμένες είναι «λεπτές» και επιμήκεις, άλλες είναι «παχιές» και σχεδόν κυκλικές. Η **εκκεντρότητα** μιας έλλειψης είναι μια αριθμητική τιμή που καθορίζει το πάχος μιας έλλειψης.

Ορισμός: Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης ορίζεται ως ο λόγος a/b , όπου

*a : η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων και
 b : η απόσταση μεταξύ των άκρων του μεγάλου άξονα*

- E5. Χρησιμοποιήστε τις εντολές του Sketchpad (Μέτρηση) Απόστασης και Υπολογισμός για τον προσδιορισμό της εκκεντρότητας της έλλειψής σας.

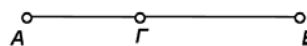
Θα χρειαστείτε τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ των εστιακών σημείων καθώς και του μήκους του μεγάλου άξονα. (Ποια σημεία έχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα;) Επιλέξτε τις δύο αποστάσεις και χρησιμοποιήστε την εντολή Υπολογισμός από το μενού Μέτρηση για τον υπολογισμό του λόγου τους.

- E6. Χρησιμοποιήστε το μοντέλο του Sketchpad για τη σχεδίαση διαφορετικών ελλείψεων. Παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η τιμή της εκκεντρότητάς τους. Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της εκκεντρότητας που είναι δυνατές για τις ελλείψεις που μπορούν να κατασκευαστούν στο σχέδιό σας;
- E7. Μπορούν δύο διαφορετικές ελλείψεις να έχουν την ίδια εκκεντρότητα; Αν ναι, σχεδιάστε με το χέρι δύο ελλείψεις με την ιδιότητα αυτή. Διαφορετικά, εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι δυνατόν.

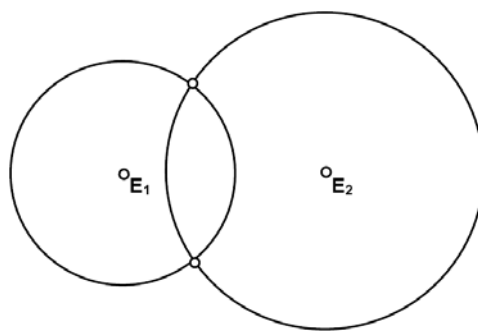
Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών

Μια έλλειψη ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων, τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, που ονομάζονται **εστίες**, να είναι σταθερό. Στη δραστηριότητα αυτή θα χρησιμοποιήσετε αυτό τον ορισμό προκειμένου να κατασκευάσετε σημεία που δίνουν το ίχνος αυτού του γεωμετρικού τόπου. Τα βήματα της κατασκευής είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1: Κατασκευάστε την ευθεία AB και κατόπιν το σημείο Γ επί της AB .



Βήμα 2: Αποκρύψτε την AB και κατόπιν κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και ΓB . Τα μήκη των τελευταίων παριστάνουν δύο αποστάσεις των οποίων το άθροισμα είναι σταθερό, δηλαδή είναι το μήκος AB .



Βήμα 3: Κατασκευάστε και δώστε ετικέτες στα σημεία E_1 και E_2 , τα οποία παριστάνουν τις εστίες της έλλειψής σας.

Βήμα 4: Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου E_1 και ακτίνας $A\Gamma$. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο κέντρου E_2 και ακτίνας ΓB .

Βήμα 5: Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής αυτών των κύκλων. Επιλέξτε αυτά τα σημεία τομής καθώς και την εντολή Σχεδίαση ίχνους τομών από το μενού Προβολή.

Έρευνα

Σύρτε το σημείο Γ εμπρός πίσω κατά μήκος της ευθείας AB . Τι σχήμα σχεδιάζουν τα σημεία τομής των κύκλων; (Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε την ευθεία AB ή την απόσταση μεταξύ E_1 και E_2 έτσι ώστε να τέμνονται οι κύκλοι.) Εάν έχει δοθεί ο ορισμός αυτού του σχήματος, γιατί η κατασκευή αυτή δίνει το ίχνος του; Γράψτε την εξήγησή σας.

Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

Μετρήστε τα μήκη του ευθύγραμμου τμήματος E_1E_2 και AB . Υπολογίστε το λόγο E_1E_2 / AB . Ο λόγος αυτός ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης. Ακολουθώντας, επιλέξτε ένα από τα σημεία τομής των κύκλων και το σημείο Γ καθώς και την εντολή Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί περισσότερο από το ήμισυ της έλλειψης. Κάντε δεξί κλικ σε αυτή την καμπύλη και επιλέξτε την Σχεδίαση ίχνους γεωμετρικού τόπου. Κατασκευάστε το υπόλοιπο ήμισυ της έλλειψης με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το άλλο σημείο τομής του κύκλου και το σημείο Γ . Προσαρμόζοντας το μήκος της ευθείας AB και την απόσταση μεταξύ των εστιών, δημιουργείτε ελλείψεις διαφορετικού σχήματος. Πόσο μεγάλη ή μικρή μπορεί να είναι η τιμή της εκκεντρότητας ώστε να είναι ακόμη δυνατή η παραγωγή μιας έλλειψης; Τι συμβαίνει όταν η τιμή της εκκεντρότητας υπερβεί τη μονάδα;