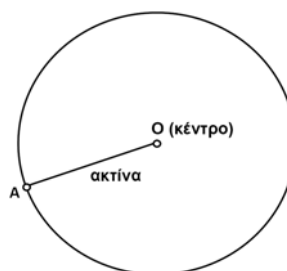


Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα

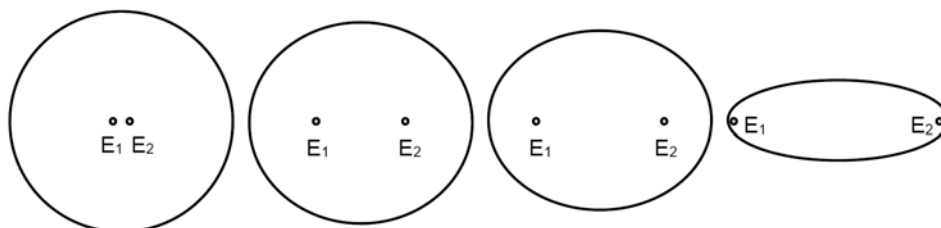
Στη δραστηριότητα αυτή θα εξερευνήσετε ίσως την πλέον κοινή μέθοδο κατασκευής μιας έλλειψης. Προκειμένου να θέσετε το πλαίσιο για την κατασκευή αυτή, πρέπει να κατανοήσετε το νόημα των όρων *κύκλος* και *έλλειψη*.

Ορισμός: *Κύκλος* είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε η απόσταση κάθε μέλους του συνόλου από ένα σταθερό σημείο (*κέντρο*) να είναι σταθερή.



Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει ένα σημείο O με ένα σημείο στην περιφέρεια του κύκλου αποτελεί μια **ακτίνα** του κύκλου. Το τμήμα OA είναι μια ακτίνα του κύκλου στο σχήμα δεξιά.

Τώρα φανταστείτε ότι το κέντρο του κύκλου χωρίζεται σε δύο σημεία που απομακρύνονται μεταξύ τους. Καθώς μετακινούνται αυτά τα σημεία, το σχήμα του κύκλου παραμορφώνεται σε ελλειπτικό, ώστε να στεγάσει τα δύο «κέντρα». Τα σημεία αυτά ονομάζονται **εστιακά σημεία** ή **εστίες** (E_1 και E_2 είναι τα εστιακά σημεία στο παρακάτω σχήμα).



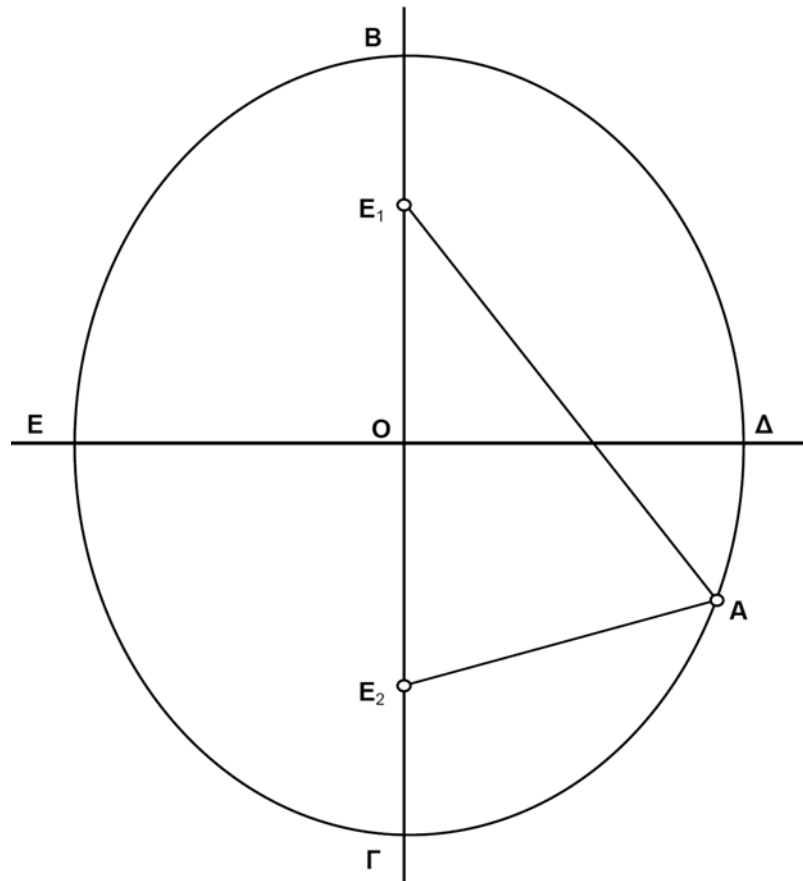
Για τον κύκλο η απόσταση μεταξύ κέντρου και οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας είναι πάντοτε η ίδια, δηλαδή *σταθερή*. Ποια είναι η αντίστοιχη συνθήκη για ένα σχήμα με δύο «κέντρα»; Για κάθε σημείο μιας έλλειψης υπάρχουν δύο αποστάσεις, μια από κάθε εστιακό σημείο. Αν το *άθροισμα* των αποστάσεων αυτών είναι σταθερό, έχουμε μια παρόμοια συνθήκη.

Ορισμός: *Έλλειψη* είναι ένα σύνολο σημείων τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου από τις δύο **εστίες** να είναι σταθερό.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, αν επιλέξετε οποιοδήποτε σημείο της έλλειψης και υπολογίσετε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα δύο εστιακά σημεία, θα προκύπτει πάντοτε η ίδια αριθμητική τιμή. Ελέγξτε αυτό το αποτέλεσμα για την έλλειψη στο επόμενο σχήμα. Επιλέξτε τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές θέσεις για ένα σημείο A που κινείται πάνω στην έλλειψη και μετρήστε τις αποστάσεις κάθε θέσης από τις δύο εστίες.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Υπολογίστε τα αθροίσματα των δύο αποστάσεων. Πόσο πλησιάζουν αριθμητικά μεταξύ τους τα τέσσερα αθροίσματα;

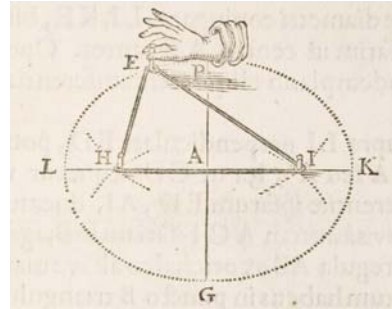


AE_1	AE_2	$AE_1 + AE_2$

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κατασκευή ενός φυσικού μοντέλου

Τώρα που γνωρίζετε τι είναι μια έλλειψη, προχωρήστε στη σχεδιάσή της! Μια κοινή μέθοδος χρησιμοποιεί δύο πινέζες, ένα κομμάτι νήματος και ένα μολύβι. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι πινέζες στερεώνονται σε μια επίπεδη επιφάνεια και το νήμα τοποθετείται γύρω τους. Για τη χρήση της διάταξης, τεντώστε το νήμα με το μολύβι όπως στο σχήμα. Καθώς μετακινείτε το μολύβι γύρω γύρω από τις εστίες διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, η μύτη του μολυβιού χαράσσει μια έλλειψη.



Από το βιβλίο *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* του Ολλανδού μαθηματικού Frans van Schooten, 1646.

Τι χρειάζεστε: Ένα κομμάτι κλωστής ή οδοντικού νήματος, δύο πινέζες, ένα μεγάλο κομμάτι χαρτί και ένα μολύβι.

1. Ενώστε τα άκρα του νήματος για το σχηματισμό ενός βρόχου. Επιλέξτε δύο σημεία στο χαρτί και στερεώστε το νήμα με τις δύο πινέζες. Ίσως χρειαστεί να επιμηκύνετε ή να κοντύνετε το νήμα, ώστε η έλλειψη να καλύπτει την επιφάνεια του χαρτιού αλλά να μην προεξέχει.
2. Τεντώστε το νήμα με το μολύβι.
3. Διατηρώντας τεντωμένο το νήμα, μετακινήστε το μολύβι γύρω από τα εστιακά σημεία έτσι ώστε η μύτη του μολυβιού να χαράξει μια καμπύλη. Ίσως χρειαστεί να σηκώσετε τη μύτη από το χαρτί και να την επανατοποθετήσετε για τη χάραξη της πλήρους καμπύλης.

Ερωτήματα

- E1. Δικαιολογήστε το γεγονός ότι αυτή η κατασκευή σχεδιάζει ελλείψεις. Με άλλα λόγια, εξηγήστε πώς αυτή η μέθοδος κατασκευής ικανοποιεί τον ορισμό μιας έλλειψης.
- E2. Πού βρίσκονται τα εστιακά σημεία της έλλειψης;
- E3. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της όταν τη σχεδιάσετε και πάλι με τις πινέζες σε μεγαλύτερη μεταξύ τους απόσταση. Τι συμβαίνει στην περίπτωση ελάττωσης της απόστασης αυτής;
- E4. Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις σας, τι μπορείτε να αναφέρετε σχετικά με τα ευθύγραμμα τμήματα BE_1 και GE_2 ; (Δείτε το προηγούμενο μεγάλο σχήμα.)

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

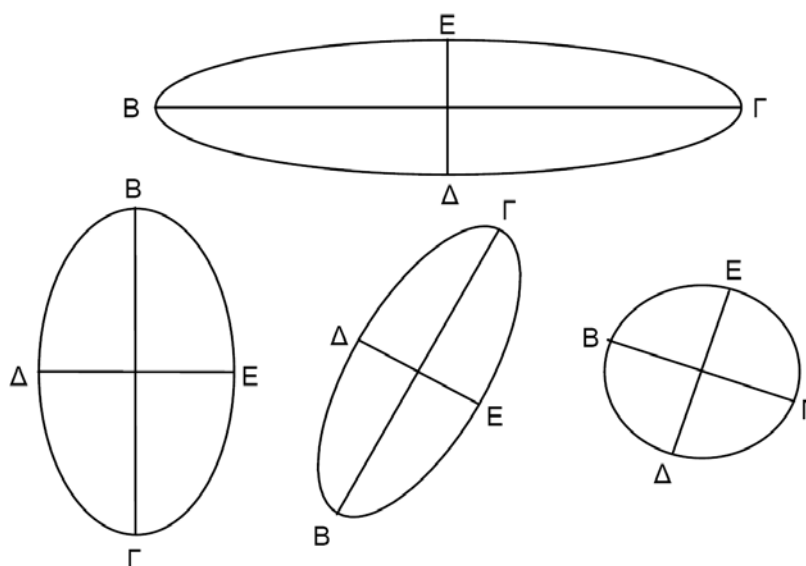
E5. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος ταυτίζονται. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.

E6. Έστω ότι τα σημεία στερέωσης του νήματος απέχουν τόσο ώστε ολόκληρο το νήμα να είναι τεντωμένο και να έχει το μέγιστο μήκος του. Τι είδους καμπύλη θα σχεδιάσει το μολύβι; Δώστε μια εξήγηση.

Ακολουθούν ορισμένες δραστηριότητες που θα σας βοηθήσουν να κατανοήσετε την έλλειψη που κατασκευάσατε.

Ερωτήματα

E1. Σε κάθε έλλειψη αντιστοιχούν δύο σημαντικά ευθύγραμμα τμήματα, ο *μεγάλος άξονας* και ο *μικρός άξονας*. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα το τμήμα ΒΓ είναι ο μεγάλος άξονας και το τμήμα ΔΕ ο μικρός άξονας. Γράψτε έναν ορισμό του μεγάλου και του μικρού άξονα.

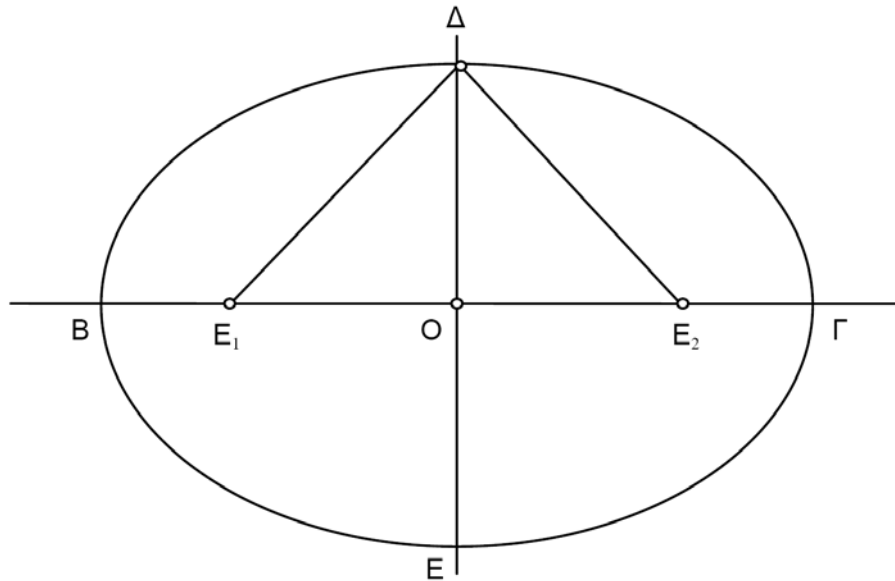


E2. Σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδιάστε με τη βοήθεια του νήματος, των πινεζών και του μολυβιού μια άλλη έλλειψη. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα για τη σχεδίαση και μέτρηση του μεγάλου άξονά της. Χωρίς να προβείτε σε περαιτέρω μετρήσεις, πώς θα προσδιορίσετε το μήκος του νήματος;

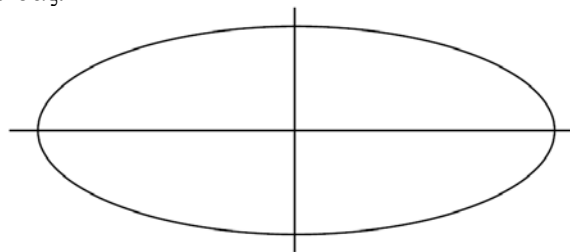
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μολύβι σας ώστε να τεντώσετε το νήμα. Στη συνέχεια, μετακινήστε το μολύβι γύρω από την έλλειψη ωσότου εντοπίσετε μια βολική θέση.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

- E3. Στο επόμενο σχήμα το σημείο Δ βρίσκεται στο ένα άκρο του μικρού άξονα της έλλειψης και τα σημεία E_1 και E_2 είναι οι εστίες της έλλειψης. Εάν το μήκος του μεγάλου άξονα $B\Gamma$ είναι 9,5 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων ΔE_1 και ΔE_2 ; Μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!

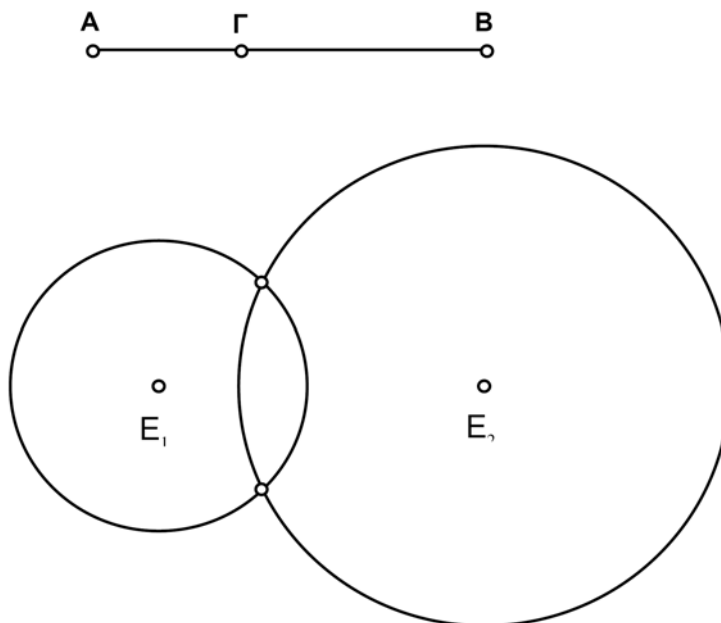


- E4. Εάν το μήκος του μικρού άξονα ΔE είναι 7,2 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος των τμημάτων OE_1 και OE_2 ; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την απάντηση του ερωτήματος 3. Και πάλι μη χρησιμοποιήσετε κανόνα!
- E5. Στηριζόμενοι στις απαντήσεις στα ερωτήματα 2-4, ποια είναι η σχέση μεταξύ των τμημάτων OF , OD και OE_2 ;
- E6. Το παρακάτω σχήμα εμφανίζει μια έλλειψη και τους δύο άξονές της. Ζητείται ο εντοπισμός των δύο εστιών.
- α. Χρησιμοποιήστε έναν κανόνα και έναν υπολογιστή για την εύρεση των εστιακών σημείων. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.
- β. Βρείτε τα εστιακά σημεία με χρήση μόνο ενός διαβήτη. Εξηγήστε τη μέθοδό σας.



Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Κάθε φορά που σχεδιάζετε μια νέα έλλειψη με μολύβι, νήμα και πινέζες, πρέπει να επανατοποθετείτε τις πινέζες και να χαράζετε το περίγραμμα με το μολύβι σας. Ένα μοντέλο του Sketchpad καθιστά ευκολότερη την εξερεύνηση μιας ποικιλίας ελλείψεων.



Λεπτομέρειες κατασκευής

1. Κατασκευάστε μια ευθεία και αποκρύψτε τα σημεία ελέγχου της. Κατασκευάστε τα σημεία A, B και Γ στην ευθεία. Η θέση αυτών των σημείων είναι αυθαίρετη αλλά το σημείο Γ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και B.
2. Αποκρύψτε την ευθεία και κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ.
3. Δημιουργήστε τις ετικέτες των σημείων E1 και E2 που αναπαριστούν τις εστίες της έλλειψής σας.
4. Χαράξτε έναν κύκλο με κέντρο το E1 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΑΓ. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο με κέντρο το E2 και ακτίνα ίση με το μήκος του ΓΒ.
5. Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής των κύκλων. Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε το μοντέλο σας ώστε οι κύκλοι να τέμνονται. Επιλέξτε τα σημεία τομής και την εντολή Σχεδίαση ίχνους τομών από το μενού Προβολή.
6. Σύρτε το σημείο Γ εμπρός και πίσω κατά μήκος του τμήματος ΑΒ. Το ίχνος των δύο σημείων πρέπει να αποτελεί μια έλλειψη.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα (συνέχεια)

Ερωτήματα

- E1. Εξηγήστε γιατί τα σημεία τομής των δύο κύκλων ικανοποιούν τον ορισμό μιας έλλειψης.
- E2. Πειραματιστείτε με διαφορετικές θέσεις των εστιακών σημείων και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται το σχήμα της έλλειψης. Περιγράψτε τα ευρήματά σας.
- E3. Έστω ότι οι θέσεις των σημείων A και B παραμένουν σταθερές στην ευθεία. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων για την οποία είναι δυνατή η σχεδίαση μιας έλλειψης;
- E4. Μελετήστε ξανά τα βήματα της κατασκευής του μοντέλου. Όταν το σημείο Γ μετακινείται εμπρός και πίσω μεταξύ των σημείων A και B, η τομή των κύκλων διαγράφει μια έλλειψη. Ποιο είναι το μήκος του μεγάλου άξονα αυτής της έλλειψης;

Οι ελλείψεις που σχεδιάσατε σε αυτή τη δραστηριότητα είναι διαφορετικές. Ορισμένες είναι «λεπτές» και επιμήκεις, άλλες είναι «παχιές» και σχεδόν κυκλικές. Η **εκκεντρότητα** μιας έλλειψης είναι μια αριθμητική τιμή που καθορίζει το πάχος μιας έλλειψης.

Ορισμός: Η **εκκεντρότητα** μιας έλλειψης ορίζεται ως ο λόγος a/β , όπου

a : η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων και
 β : η απόσταση μεταξύ των άκρων του μεγάλου άξονα

- E5. Χρησιμοποιήστε τις εντολές του Sketchpad (Μέτρηση) Απόστασης και Υπολογισμός για τον προσδιορισμό της εκκεντρότητας της έλλειψής σας.

Θα χρειαστείτε τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ των εστιακών σημείων καθώς και του μήκους του μεγάλου άξονα. (Ποια σημεία έχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος του μεγάλου άξονα;) Επιλέξτε τις δύο αποστάσεις και χρησιμοποιήστε την εντολή Υπολογισμός από το μενού Μέτρηση για τον υπολογισμό του λόγου τους.

- E6. Χρησιμοποιήστε το μοντέλο του Sketchpad για τη σχεδίαση διαφορετικών ελλείψεων. Παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η τιμή της εκκεντρότητάς τους. Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της εκκεντρότητας που είναι δυνατές για τις ελλείψεις που μπορούν να κατασκευαστούν στο σχέδιό σας;
- E7. Μπορούν δύο διαφορετικές ελλείψεις να έχουν την ίδια εκκεντρότητα; Αν ναι, σχεδιάστε με το χέρι δύο ελλείψεις με την ιδιότητα αυτή. Διαφορετικά, εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι δυνατόν.

Η κατασκευή με τις δύο πινέζες και το νήμα

(σ. 36)

Η δραστηριότητα αυτή παρουσιάζει την πλέον γνωστή τεχνική κατασκευής μιας έλλειψης. Ωστόσο, θα παρατηρήσετε αρκετές διαφορές. Αντί της χρήσης πινεζών ως εστιακών σημείων της έλλειψης (που αναφέρεται στο βιβλίο μαθητή), οι μαθητές χρησιμοποιούν μια συγκολλητική ταινία για τη στερέωση του νήματος στις εστίες. Αυτό απλοποιεί την κατασκευή του μοντέλου. Επιπρόσθετα, οι μαθητές δημιουργούν ένα κατασκευαστικό μοντέλο στο Sketchpad, το οποίο μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί για τη σχεδίαση μιας υπερβολής.

Τέλος, η δραστηριότητα παρέχει μια εκτεταμένη εισαγωγή στις γεωμετρικές σχέσεις που θα χρειαστούν οι μαθητές για την κατανόηση της αλγεβρικής απόδειξης που υπάρχει στα βιβλία τους. Ειδικότερα, οι μαθητές θα ανακαλύψουν μόνοι τους τις σχέσεις μεταξύ του μήκους του μεγάλου και του μικρού άξονα και της εστιακής απόστασης.

Κατασκευή ενός φυσικού μοντέλου

- E1. Το άθροισμα των αποστάσεων από τη μύτη του μολυβιού ως τα δύο στερεωμένα άκρα του νήματος είναι πάντοτε σταθερό και ίσο με το ολικό μήκος του νήματος μείον την εστιακή απόσταση.
- E2. Τα εστιακά σημεία είναι τα δύο άκρα της βάσης του τριγώνου που σχηματίζεται (ή τα σημεία στερέωσης στο χαρτί).
- E3. Όταν η απόσταση μεταξύ των πινεζών είναι μικρή, η έλλειψη είναι «παχιά» και σχεδόν κυκλική. Όταν η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη, η έλλειψη είναι «λεπτή» και επιμήκης.
- E4. Τα ευθύγραμμα τμήματα BE_1 και GE_2 έχουν ίσο μήκος.
- E5. Το μολύβι θα σχεδιάσει έναν κύκλο όταν και τα δύο άκρα του νήματος στερεωθούν στο ίδιο σημείο.
- E6. Εάν το νήμα είναι τεντωμένο, το μολύβι θα σχεδιάσει μια ευθεία. Μια άλλη δυνατή απάντηση είναι πως, όταν το νήμα είναι τεντωμένο, το μολύβι δε θα σχεδιάσει τίποτε. Το ερώτημα αυτό καθώς και το ερώτημα 5 εξετάζουν τις δύο εκφυλισμένες περιπτώσεις μιας έλλειψης: τον κύκλο και την ευθεία.

Περαιτέρω εξερεύνηση με τη βοήθεια του μοντέλου σας

- E1. Οι μαθητές μπορούν να ορίσουν τους άξονες ως τα δύο «ευθύγραμμα τμήματα συμμετρίας». Επίσης, ίσως τους ορίσουν ως το μεγαλύτερο και το μικρότερο τμήμα που διέρχονται το «κέντρο» της έλλειψης (το μέσο του τμήματος που συνδέει τις εστίες) και τα άκρα τους κείνται επί της έλλειψης. Μπορείτε να ζητήσετε από τους μαθητές να εξετάσουν την περίπτωση που η έλλειψη είναι κύκλος: Διαθέτει ένας κύκλος μεγάλο και μικρό άξονα;
- E2. Μετακινήστε το μολύβι σας έτσι ώστε να βρίσκεται στο σημείο Γ. Το μήκος του νήματος ισούται με $E_1E_2 + E_2\Gamma + E_2\Gamma$. Εφόσον $BE_1 = E_2\Gamma$, μπορούμε να γράψουμε εκ νέου το μήκος ως $E_1E_2 + E_2\Gamma + BE_1 = B\Gamma$, δηλαδή το μήκος του μεγάλου άξονα. Άρα το μήκος του νήματος ισούται με το μήκος του μεγάλου άξονα.
- E3. Από το ερώτημα 2 γνωρίζουμε ότι $\Delta E_1 + \Delta E_2 = B\Gamma$. Εφόσον $\Delta E_1 = \Delta E_2$, κάθε τμήμα έχει μήκος ίσο με 4,75 εκατοστά.

- E4. Το μήκος του τμήματος ΟΔ είναι 3,6 εκατοστά, δηλαδή το ήμισυ του μικρού άξονα ΔΕ. Από το ερώτημα 3 έχουμε $\Delta E_2 = 4,75$ εκατοστά. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο τιμές στην εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΕ₂ και να λάβουμε $(OE_2)^2 + (OD)^2 = (\Delta E_2)^2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές και λύνοντας, έχουμε $OE_2 \approx 3,1$ εκατοστά. Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ₂ έχει το ίδιο μήκος με το τμήμα ΟΕ₁.
- E5. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΕ₂ δίνει $(OE_2)^2 + (OD)^2 = (\Delta E_2)^2$. Από τα ερωτήματα 2 και 3 γνωρίζουμε ότι $OG = \Delta E_2$. Έτσι, έχουμε τη σχέση $(OE_2)^2 + (OD)^2 = (OG)^2$, που γράφεται συνήθως στη μορφή $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, όπου $\gamma = OE_2$ και $\alpha =$ ήμισυ του μήκους του μεγάλου άξονα (τμήμα ΟΓ) και $\beta =$ ήμισυ του μήκους του μικρού άξονα (τμήμα ΟΔ).
- E6. α. Χρησιμοποιώντας έναν κανόνα και έναν υπολογιστή μπορούμε να εντοπίσουμε τα εστιακά σημεία της έλλειψης, μετρώντας τα μήκη α και β (που περιγράφονται στο ερώτημα 5), και ακολούθως να υπολογίσουμε την τιμή του γ .
- β. Η εύρεση των εστιακών σημείων είναι ευκολότερη με χρήση ενός διαβήτη. Ρυθμίστε το διαβήτη έτσι ώστε να σχεδιάσει έναν κύκλο ακτίνας α . Κατόπιν χρησιμοποιήστε το διαβήτη για τη σχεδίαση ενός κύκλου με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα α . Τα σημεία τομής των δύο κύκλων με το μεγάλο άξονα είναι οι εστίες της έλλειψης. Οι μαθητές μπορούν να σχολιάσουν το γεγονός ότι η μέθοδος με το διαβήτη έχει το πλεονέκτημα πως δεν απαιτεί μετρήσεις ή υπολογισμούς.

Κατασκευή ενός μοντέλου Sketchpad

Είναι σημαντικό για τους μαθητές να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν μόνοι τους ένα μοντέλο Sketchpad προτού τους δώσετε λεπτομερείς οδηγίες. Ξεκινήστε με την παρότρυνση να σκεφτούν σχετικά με τον τρόπο κατασκευής ενός μοντέλου Sketchpad. Πώς μοντελοποιούνται οι πινέζες; Πώς μοντελοποιείται το νήμα; Πώς διατηρείται σταθερό το μήκος του νήματος; Προσπαθήστε να συζητήσετε το στόχο ή/και να τον γράψετε στον πίνακα. Ζητήστε από όσους έχουν κάποιες ιδέες να τις αναπτύξουν στην τάξη. Εάν ένας μαθητής αδυνατεί να προχωρήσει, δώστε του κάποια συμβουλή ή, αν αυτό δε βοηθήσει, τις πλήρεις οδηγίες.

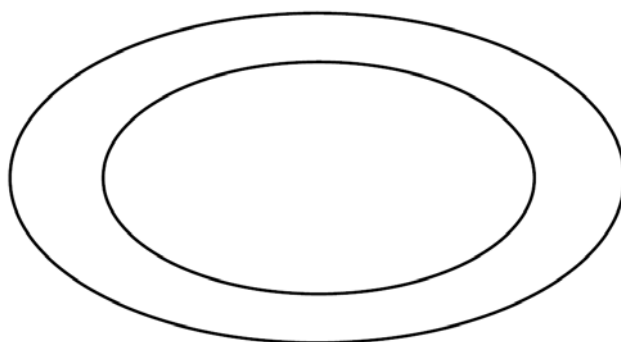
1. Το άθροισμα των αποστάσεων από ένα σημείο τομής των δύο κύκλων προς τις δύο εστίες είναι πάντοτε ίσο με το άθροισμα της ακτίνας των κύκλων, δηλαδή με το σταθερό μήκος τμήμα ΑΒ.
2. Όταν η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων είναι μικρή, η έλλειψη είναι “παχιά” και σχεδόν κυκλική. Όταν η απόσταση είναι μεγαλύτερη, η έλλειψη είναι “λεπτή” και επιμήκης.
3. Η απόσταση μεταξύ των εστιακών σημείων E_1 και E_2 δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του μήκους του τμήματος ΑΒ.
4. Το μήκος του μεγάλου άξονα ισούται με το μήκος του τμήματος ΑΒ (δείτε το βήμα 2 στην ενότητα “Περαιτέρω εξερεύνηση” με τη βοήθεια του μοντέλου σας). Έτσι, ένας απλός τρόπος μέτρησης της απόστασης μεταξύ των άκρων του μεγάλου άξονα είναι η μέτρηση της απόστασης μεταξύ των σημείων Α και Β.

5. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης προσεγγίζει το 0 όταν η μία εστία είναι κοντά στην άλλη. Η εκκεντρότητα προσεγγίζει το 1 όταν το μήκος του τμήματος E_1E_2 τείνει στο μήκος του τμήματος AB . Εκκεντρότητες κοντά στο 0 παράγουν ελλείψεις που μοιάζουν με κύκλους. Εκκεντρότητες *πολύ* κοντά στο 1 παράγουν ελλείψεις που με δυσκολία διακρίνονται από ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Γιατί τονίζουμε τη λέξη «πολύ»; Ακόμη και όταν έχουμε μια έλλειψη με μεγάλο άξονα 10 εκατοστών και με εκκεντρότητα 0,99, η έλλειψη δεν είναι τόσο πεπλατυσμένη όσο φαντάζεστε. (Υπολογίστε το μήκος του μικρού άξονα, ώστε να το διαπιστώσετε!)

6. Εφόσον η εκκεντρότητα μετριέται ως λόγος, ένας άπειρος αριθμός διαφορετικών ελλείψεων μπορούν να έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Μια μέθοδος δημιουργίας δύο ελλείψεων με την ίδια εκκεντρότητα έγκειται στη μεγέθυνση ή σμίκρυνση μιας έλλειψης με τη βοήθεια μιας φωτοαντιγραφικής διάταξης. Η μεγαλύτερη από τις παρακάτω δύο ελλείψεις δημιουργήθηκε με ένα πρόγραμμα σχεδίασης σε υπολογιστή και κατόπιν ελαττώθηκε το μέγεθός της στο 70% του αρχικού με χρήση της εντολής προσαρμογής κλίμακας.

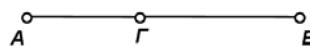
Στο Sketchpad η ίδια ελάττωση μπορεί να επιτευχτεί με την αυξομείωση της έλλειψης ως προς το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις εστίες.



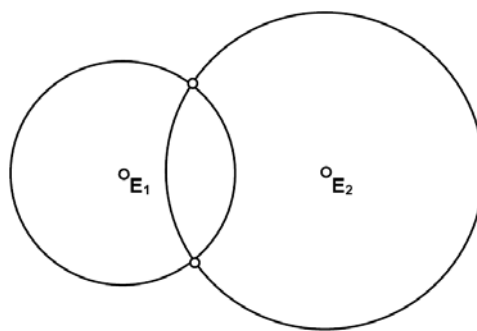
Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών

Μια έλλειψη ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων, τέτοιων ώστε το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, που ονομάζονται **εστίες**, να είναι σταθερό. Στη δραστηριότητα αυτή θα χρησιμοποιήσετε αυτό τον ορισμό προκειμένου να κατασκευάσετε σημεία που δίνουν το ίχνος αυτού του γεωμετρικού τόπου. Τα βήματα της κατασκευής είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1: Κατασκευάστε την ευθεία AB και κατόπιν το σημείο Γ επί της AB .



Βήμα 2: Αποκρύψτε την AB και κατόπιν κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και ΓB . Τα μήκη των τελευταίων παριστάνουν δύο αποστάσεις των οποίων το άθροισμα είναι σταθερό, δηλαδή είναι το μήκος AB .



Βήμα 3: Κατασκευάστε και δώστε ετικέτες στα σημεία E_1 και E_2 , τα οποία παριστάνουν τις εστίες της έλλειψής σας.

Βήμα 4: Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου E_1 και ακτίνας $A\Gamma$. Κατασκευάστε έναν άλλο κύκλο κέντρου E_2 και ακτίνας ΓB .

Βήμα 5: Κατασκευάστε τα δύο σημεία τομής αυτών των κύκλων. Επιλέξτε αυτά τα σημεία τομής καθώς και την εντολή Σχεδίαση ίχνους τομών από το μενού Προβολή.

Έρευνα

Σύρτε το σημείο Γ εμπρός πίσω κατά μήκος της ευθείας AB . Τι σχήμα σχεδιάζουν τα σημεία τομής των κύκλων; (Ίσως χρειαστεί να προσαρμόσετε την ευθεία AB ή την απόσταση μεταξύ E_1 και E_2 έτσι ώστε να τέμνονται οι κύκλοι.) Εάν έχει δοθεί ο ορισμός αυτού του σχήματος, γιατί η κατασκευή αυτή δίνει το ίχνος του; Γράψτε την εξήγησή σας.

Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών (συνέχεια)

Περαιτέρω εξερεύνηση

Μετρήστε τα μήκη του ευθύγραμμου τμήματος E_1E_2 και AB . Υπολογίστε το λόγο E_1E_2 / AB . Ο λόγος αυτός ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης. Ακολουθώντας, επιλέξτε ένα από τα σημεία τομής των κύκλων και το σημείο Γ καθώς και την εντολή Γεωμετρικού τόπου από το μενού Κατασκευή. Έτσι, θα κατασκευαστεί περισσότερο από το ήμισυ της έλλειψης. Κάντε δεξί κλικ σε αυτή την καμπύλη και επιλέξτε την Σχεδίαση ίχνους γεωμετρικού τόπου. Κατασκευάστε το υπόλοιπο ήμισυ της έλλειψης με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το άλλο σημείο τομής του κύκλου και το σημείο Γ . Προσαρμόζοντας το μήκος της ευθείας AB και την απόσταση μεταξύ των εστιών, δημιουργείτε ελλείψεις διαφορετικού σχήματος. Πόσο μεγάλη ή μικρή μπορεί να είναι η τιμή της εκκεντρότητας ώστε να είναι ακόμη δυνατή η παραγωγή μιας έλλειψης; Τι συμβαίνει όταν η τιμή της εκκεντρότητας υπερβεί τη μονάδα;

Κατασκευή: Σχεδίαση κωνικών τομών

(σ. 77)

Προαπαιτούμενα: Εισαγάγετε τον ορισμό μίας έλλειψης ή αναπαραγάγετε τις οδηγίες κατασκευής χωρίς τον ορισμό και διαπιστώστε αν οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν δικούς τους ορισμούς. Μπορείτε να διευρύνετε αυτή τη δραστηριότητα δίνοντας στους μαθητές ελλιπείς οδηγίες και ζητώντας από αυτούς να κατασκευάσουν ένα σχεδιαστή έλλειψεων βασιζόμενοι στον ορισμό της έλλειψης.

Χρόνος στην τάξη: 20 λεπτά.

Οδηγίες κατασκευής

- Βήμα 1 Βεβαιωθείτε ότι οι μαθητές γνωρίζουν πώς να κατασκευάσουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ και όχι απλώς πώς να τοποθετήσουν το σημείο Γ πάνω στην ευθεία ΑΒ.
- Βήμα 2 Επεξεργαστείτε τις ετικέτες κάνοντας διπλό κλικ πάνω τους.
- Βήμα 3 Επιλέξτε το σημείο E_1 και το τμήμα ΑΓ καθώς και την εντολή “Κύκλου από το κέντρο και ακτίνα” από το μενού Κατασκευή. Επαναλάβετε τη διαδικασία για το σημείο E_2 και το τμήμα ΓΒ.

Έρευνα/Εικασίες

Οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία E_1 και E_2 έχουν ακτίνες ΑΓ και ΓΒ, αντίστοιχα. Η απόσταση του E_1 από ένα σημείο τομής είναι ΑΓ και η αντίστοιχη απόσταση του E_2 είναι ΓΒ. Άρα το άθροισμα των αποστάσεων αυτών είναι $ΑΓ + ΓΒ = ΑΒ$. Καθώς μεταφέρετε το σημείο Γ, τα ΑΓ και ΓΒ μεταβάλλονται, αλλά το ΑΒ δηλαδή το άθροισμά τους, παραμένει σταθερό. Τα σημεία τομής του κύκλου ικανοποιούν τον ορισμό μιας έλλειψης, δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων προς δύο σταθερά σημεία είναι σταθερό.

Περαιτέρω εξερεύνηση

Οι μαθητές που μετρούν την εκκεντρότητα θα διαπιστώσουν ότι αυτή προσεγγίζει την τιμή 0 όταν οι εστίες πλησιάζουν και την τιμή 1 όταν το τμήμα E_1E_2 τείνει στο τμήμα ΑΒ. Όταν το E_1E_2 γίνει μεγαλύτερο του ΑΒ, οι κύκλοι δεν τέμνονται πλέον όταν το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Β και το σχέδιο δεν είναι σε θέση να δημιουργήσει το ίχνος μιας έλλειψης. Οι κύκλοι τέμνονται όταν το σημείο Γ δε βρίσκεται μεταξύ των Α και Β. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά μεταξύ του μήκους των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ είναι σταθερή και ίση με ΑΒ. Αυτός ο γεωμετρικός τόπος με εκκεντρότητα μεγαλύτερη του 1 είναι μία *υπερβολή*. Ενδεχομένως οι μαθητές θα θεωρήσουν ότι αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση της εκκεντρότητας έχει περισσότερο νόημα από την παραδοσιακή γεωμετρική αναπαράσταση που συναντούν σε εκπαιδευτικά βιβλία.

Δείτε το δείγμα σχεδίου *Δραστηριότητες\Έλλειψη.gsp* προκειμένου να διαπιστώσετε πώς υπεισέρχεται στη μελέτη το θεώρημα της τριγωνικής ανισότητας.

Ο εμπειρικός τρόπος κατασκευής μιας έλλειψης έγκειται στη χρήση ενός νήματος με δύο πινέζες ως εστίες. Στερεώστε τις πινέζες σε έναν πίνακα ανακοινώσεων, τεντώστε το νήμα με τη βοήθεια της μύτης ενός μολυβιού και χαράζτε την έλλειψη διατηρώντας την τάση του νήματος σταθερή. Το μήκος του νήματος είναι το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων από τις πινέζες.