

## ΤΑ ΤΟΠΙΚΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΑ – ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΙ (JAVA APPLETS)

### 13. Οδηγίες χρήσης του λογισμικού «Πολλαπλασιασμός»

The image displays four panels of the 'Πολλαπλασιασμός' (Multiplication) software interface, each illustrating a different method for calculating the product of 25 and 32.

- Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο (Area Model):** Shows a 10x10 grid where a 5x4 area is shaded, representing 25 x 32. The number 25 is on the left and 32 is at the bottom.
- Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση (Repeated Addition):** Shows the equation  $25 \times 32 =$  followed by a list of 32 additions of 25, resulting in 800.
- Οριζόντιος πολλαπλασιασμός (Horizontal Distributive Property):** Shows the calculation  $25 \times 32 = 25 \times (30 + 2) = 25 \times 30 + 25 \times 2 = 750 + 50 = 800$ .
- Κετεκόρυφος Πολλαπλασιασμός (Long Multiplication):** Shows the traditional long multiplication process, with 25 multiplied by 2 to get 50, then 25 multiplied by 30 to get 750, and finally the sum 800.

Each panel includes buttons for 'Μεταφορά' (Move), 'Έλεγχος' (Check), 'Πίνακας' (Table), and 'Επανεμφάνιση' (Refresh).

### 13.1 Εισαγωγή

---

Στόχος του λογισμικού «Πολλαπλασιασμός» είναι να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν βαθύτερα την πράξη του πολλαπλασιασμού και να αποτελέσει στα χέρια του εκπαιδευτικού ένα υποστηρικτικό εργαλείο για την έννοια και τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.

Οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί, που χρησιμοποιούν τον «Πολλαπλασιασμό» για να υπολογίσουν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών –μέχρι 90–, έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν όποια από τις τέσσερις αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού επιθυμούν. Μπορούν, ακόμη, να αναπαριστούν το γινόμενο με έναν από τους τέσσερις τρόπους, όπως, επίσης, και να παρατηρούν τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις του.

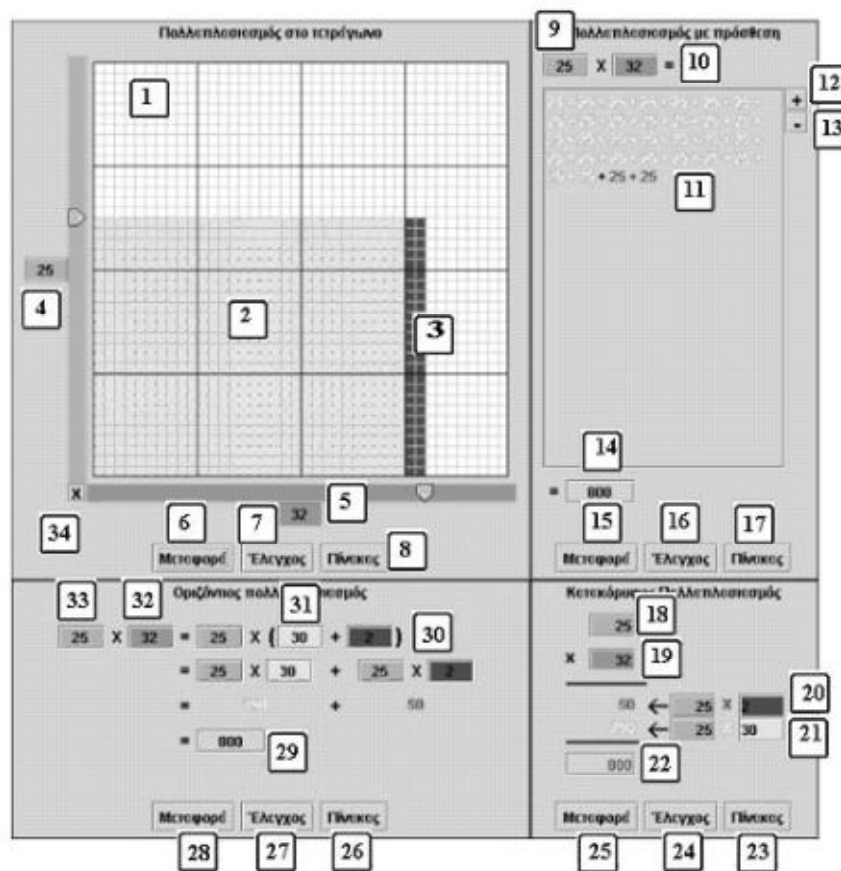
Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής κατάστασης, όσον αφορά τη μάθηση, δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές:

- Να παρατηρούν και να ερμηνεύουν την κατάσταση αυτή στα διαφορετικά πλαίσια.
- Να αλληλεπιδρούν με τις έννοιες που εξάγονται από την κατάσταση αυτή με πολλαπλούς τρόπους.

Η σύνδεση των λογισμικών «Πολλαπλασιασμός» και «Επεξεργασία και συλλογή δεδομένων» μπορεί να διευρύνει τις σχέσεις που προκύπτουν από τις καταστάσεις τις οποίες διαπραγματεύεται ο χρήστης. Το γεγονός ότι μπορεί να καταγράψει σε έναν πίνακα τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του προγράμματος, καθώς, επίσης, και να παρατηρεί τις γραφικές τους αναπαραστάσεις, του επιτρέπει να διαπραγματεύεται και άλλες έννοιες, όπως αυτή της μεταβολής των γινομένων, υπό ορισμένες προϋποθέσεις.

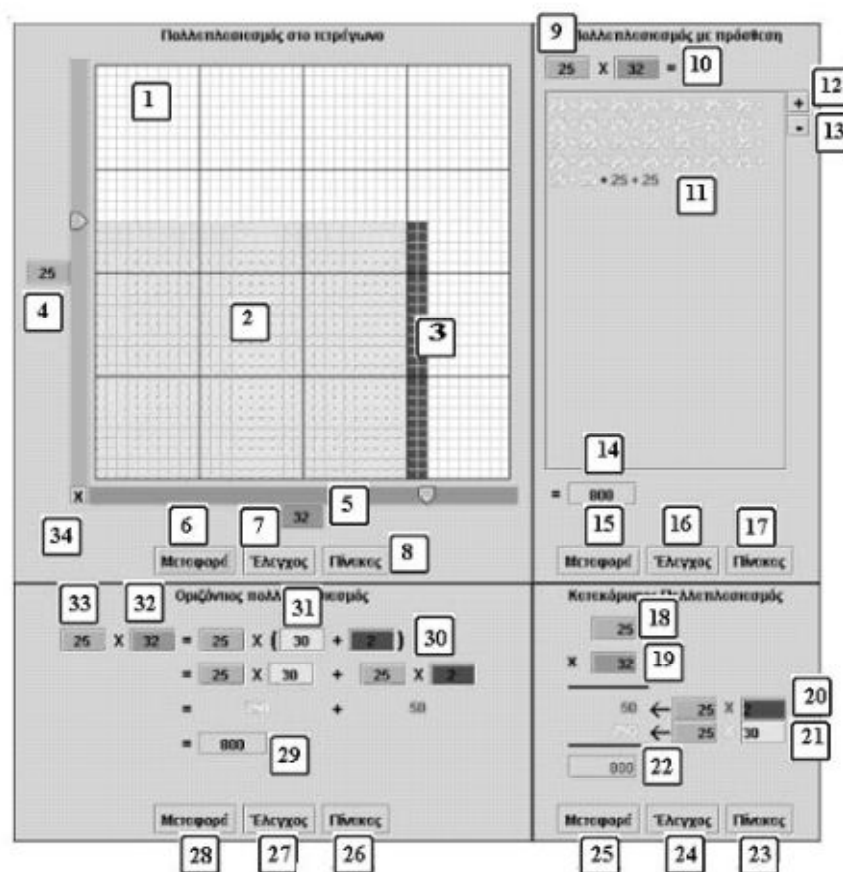
Η παρουσίαση του λογισμικού αυτού στις επόμενες σελίδες αναδεικνύει τις δυνατότητές του να υποστηρίζει την εκμάθηση και διδασκαλία ενός τομέα ο οποίος παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες για τους μαθητές του δημοτικού.

### 13.2 Συνοπτική παρουσίαση



Αριθμός αναφοράς	Λειτουργία
1	Το ορθογώνιο πλέγμα – χρωματίζεται με κίτρινο και κόκκινο χρώμα.
2	Τα τετραγωνίδια – χρωματίζονται με κίτρινο χρώμα κάθε φορά που οι στήλες τους συμπληρώνουν μία δεκάδα.
3	Με κόκκινο χρώμα χρωματίζονται οι στήλες που δεν συμπληρώνουν μια δεκάδα.
4	Ο γαλάζιος δείκτης με τον οποίο επιλέγεται το πλήθος των γραμμών ή το ύψος των στηλών.
5	Ο πράσινος δείκτης με τον οποίο επιλέγεται το πλήθος των στηλών ή το πλάτος των γραμμών.
6	Το κουμπί με το οποίο μεταφέρεται η κατάσταση από τα άλλα πλαίσια στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο».
7	Το κουμπί με το οποίο ελέγχεται αν έχει γίνει σωστή επιλογή της κατάστασης στο πλαίσιο. Προφανώς στο πλαίσιο αυτό το μήνυμα είναι πάντοτε «Σωστό».
8	Το κουμπί με το οποίο γίνεται αυτόματη καταγραφή των αριθμών της κατάστασης (των αριθμών με τα τέσσερα χρώματα) στον πίνακα τιμών του προγράμματος «Στατιστική», με σκοπό την περαιτέρω στατιστική τους επεξεργασία.
9	Το γαλάζιο κουτάκι όπου πληκτρολογείται ένας από τους παράγοντες του γινομένου. Επίσης, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, καταγράφεται ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
10	Το πράσινο κουτάκι όπου πληκτρολογείται ένας από τους παράγοντες του γινομένου. Επίσης, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, καταγράφεται ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.

Αριθμός αναφοράς	Λειτουργία
11	Το πλαίσιο όπου αναλύεται ο πολλαπλασιασμός ως άθροισμα του αριθμού που υπάρχει στο γαλάζιο κουτάκι τόσες φορές, όσες καθορίζει ο αριθμός στο πράσινο κουτάκι. Με κίτρινο χρώμα εμφανίζονται οι προσθετέοι κάθε φορά που συμπληρώνουν μία ή περισσότερες δεκάδες, ενώ με κόκκινο εμφανίζονται οι υπόλοιποι. Κάθε προσθετέος αντιστοιχεί σε μία χρωματισμένη στήλη του ορθογωνίου πλέγματος.
12	Το κουμπί με το οποίο προστίθεται ένας ακόμη προσθετέος στο άθροισμα.
13	Το κουμπί με το οποίο αφαιρείται ένας προσθετέος από το άθροισμα.
14	Το κουτάκι όπου πληκτρολογείται το άθροισμα όλων των προσθετέων (ή το πλήθος των χρωματισμένων τετραγωνιδίων ή το τελικό αποτέλεσμα του γινομένου των δύο αριθμών).
15	Το κουμπί με το οποίο μεταφέρεται η κατάσταση από τα άλλα πλαίσια στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση».
16	Το κουμπί με το οποίο ελέγχεται η κατάσταση στο πλαίσιο. Το μήνυμα «Σωστό» σημαίνει ότι: (α) έχει καθοριστεί σωστά το πλήθος των προσθετέων και (β) έχει πληκτρολογηθεί το σωστό άθροισμα στο γκρι κουτάκι. Το μήνυμα «Δεν είναι σωστό» σημαίνει ότι κάτι δεν έχει γίνει σωστά.
17	Το κουμπί με το οποίο γίνεται αυτόματη καταγραφή των αριθμών της κατάστασης (των αριθμών με τα τέσσερα χρώματα) στον πίνακα τιμών του προγράμματος «Στατιστική», με σκοπό την περαιτέρω στατιστική τους επεξεργασία.
18	Το γαλάζιο κουτάκι όπου πληκτρολογείται ένας από τους παράγοντες του γινομένου. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
19	Το πράσινο κουτάκι όπου πληκτρολογείται ένας από τους παράγοντες του γινομένου. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
20	Το κόκκινο κουτάκι όπου πληκτρολογούνται οι μονάδες του δεύτερου παράγοντα, οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τον πρώτο προσθετέο. Το πρόγραμμα υπολογίζει αυτόματα το αποτέλεσμα και το εμφανίζει με το ίδιο χρώμα. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
21	Το κίτρινο κουτάκι όπου πληκτρολογούνται οι δεκάδες του δεύτερου παράγοντα, οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τον πρώτο προσθετέο. Το πρόγραμμα υπολογίζει αυτόματα το αποτέλεσμα και το εμφανίζει με το ίδιο χρώμα. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
22	Το γκρι κουτάκι όπου καταγράφεται ή πληκτρολογείται το άθροισμα των αριθμών με κόκκινο και κίτρινο χρώμα.
23	Το κουμπί με το οποίο γίνεται αυτόματη καταγραφή των αριθμών της κατάστασης (των αριθμών με τα τέσσερα χρώματα) στον πίνακα τιμών του προγράμματος «Στατιστική», με σκοπό την περαιτέρω στατιστική τους επεξεργασία.
24	Το κουμπί με το οποίο ελέγχεται η κατάσταση στο πλαίσιο. Το μήνυμα «Σωστό» σημαίνει ότι: (α) έχουν καθοριστεί σωστά οι σωστοί στα δύο κουτάκια: κόκκινο και κίτρινο και (β) έχει πληκτρολογηθεί το σωστό άθροισμα στο γκρι κουτάκι. Το μήνυμα «Δεν είναι σωστό» σημαίνει ότι κάτι δεν έχει γίνει σωστά.
25	Το κουμπί με το οποίο μεταφέρεται η κατάσταση από τα άλλα πλαίσια στο πλαίσιο «Οριζόντιος πολλαπλασιασμός».
26	Το κουμπί με το οποίο γίνεται αυτόματη καταγραφή των αριθμών της κατάστασης (των αριθμών με τα τέσσερα χρώματα) στον πίνακα τιμών του προγράμματος «Στατιστική», με σκοπό την περαιτέρω στατιστική τους επεξεργασία.



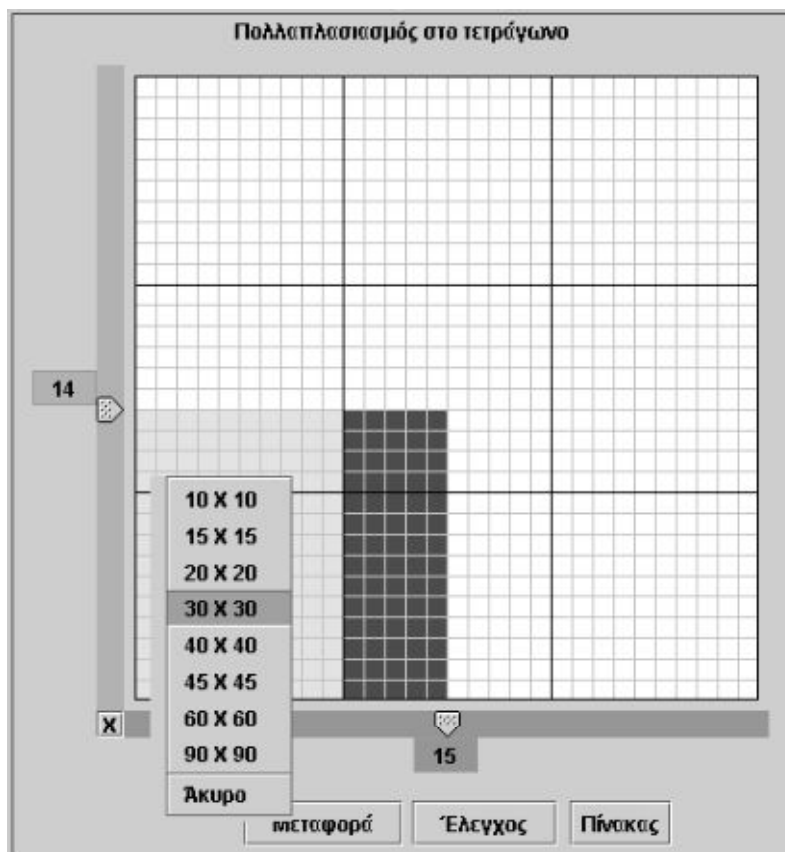
Αριθμός αναφοράς	Λειτουργία
27	Το κουμπί με το οποίο ελέγχεται η κατάσταση στο πλαίσιο. Το μήνυμα «Σωστό» σημαίνει ότι: (α) έχουν καθοριστεί σωστά οι αριθμοί στα δύο κουτάκια: κόκκινο και κίτρινο και (β) έχει πληκτρολογηθεί το σωστό άθροισμα στο γκρι κουτάκι. Το μήνυμα «Δεν είναι σωστό» σημαίνει ότι κάτι δεν έχει γίνει σωστά.
28	Το κουμπί με το οποίο μεταφέρεται η κατάσταση από τα άλλα πλαίσια στο πλαίσιο «Οριζόντιος πολλαπλασιασμός».
29	Το γκρι κουτάκι όπου εμφανίζεται ή πληκτρολογείται το άθροισμα των αριθμών με κόκκινο και κίτρινο χρώμα.
30	Το κόκκινο κουτάκι όπου πληκτρολογούνται οι μονάδες του δεύτερου παράγοντα, οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τον πρώτο προσθετέο. Το πρόγραμμα υπολογίζει αυτόματα το αποτέλεσμα και το εμφανίζει με το ίδιο χρώμα. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
31	Το κίτρινο κουτάκι όπου πληκτρολογούνται οι δεκάδες του δεύτερου παράγοντα, οι οποίες πολλαπλασιάζονται με τον πρώτο προσθετέο. Το πρόγραμμα υπολογίζει αυτόματα το αποτέλεσμα και το εμφανίζει με το ίδιο χρώμα. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
32	Το γαλάζιο κουτάκι όπου πληκτρολογείται ένας από τους παράγοντες του γινομένου. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
33	Το πράσινο κουτάκι όπου πληκτρολογείται ένας από τους παράγοντες του γινομένου. Στο ίδιο κουτάκι σημειώνεται, κατά τη μεταφορά από τα άλλα πλαίσια, ο αριθμός που αντιστοιχεί στο ίδιο χρώμα.
34	Το κουμπί με το οποίο καθορίζεται το πλήθος των τετραγωνιδίων του πλέγματος.

### 13.3 Εργαλεία και λειτουργίες

#### 13.3.1 Το πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο»

Στο πλαίσιο αυτό έχουμε τη γεωμετρική αναπαράσταση ενός γινομένου δύο μονοψήφιων ή διψήφιων αριθμών.

Με το κουμπί «x» (34) καθορίζεται το πλήθος των τετραγωνιδίων του πλέγματος. Ο χρήστης μπορεί να επιλέγει μέχρι  $90 \times 90$  τετραγωνίδια. Το πλήθος των τετραγωνιδίων είναι χωρισμένα σε  $10 \times 10 = 100$  τετράγωνα, με σκοπό να γίνεται ευκολότερα η μέτρηση των δεκάδων. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να επιλέγει το πλήθος των στηλών και των γραμμών, καθώς μετακινεί τους δύο δείκτες στη γαλάζια και την πράσινη ταινία. Κάθε φορά, λοιπόν, ορίζει ένα ορθογώνιο, τα τετραγωνίδια του οποίου χρωματίζονται με κίτρινο ή κόκκινο χρώμα. Με κίτρινο χρώμα χρωματίζονται τα τετραγωνίδια που ανήκουν σε ορθογώνιο με 10, 20, 30 κτλ. στήλες. Για παράδειγμα, αν έχουν επιλεγεί 15 στήλες, στις πρώτες 10 τα τετραγωνίδια θα έχουν κίτρινο χρώμα και στις υπόλοιπες 5 κόκκινο. Δηλαδή, ο αριθμός 15 αναπαρίσταται ως:  $10 + 5$ .

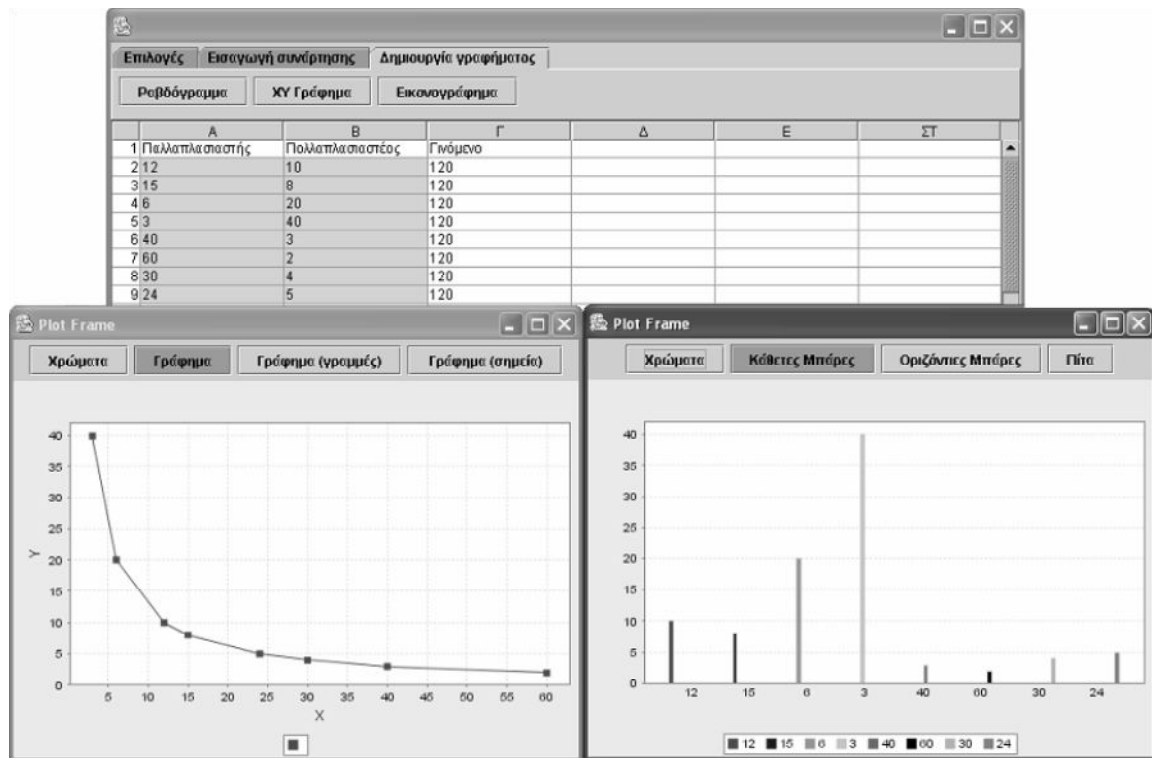


Με το κουμπί «Μεταφορά» ο χρήστης μεταφέρει εδώ την κατάσταση από τα άλλα πλαίσια και την αναπαριστά με τους όρους του πλαισίου αυτού.

Με το κουμπί «Έλεγχος» ο χρήστης ελέγχει αν έχει επιλέξει σωστά τους δύο αριθμούς – στήλες και γραμμές – που ορίζουν το ορθογώνιο στο πλέγμα. Καθώς, όμως, δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, το πρόγραμμα εμφανίζει πάντα το μήνυμα «Σωστό».

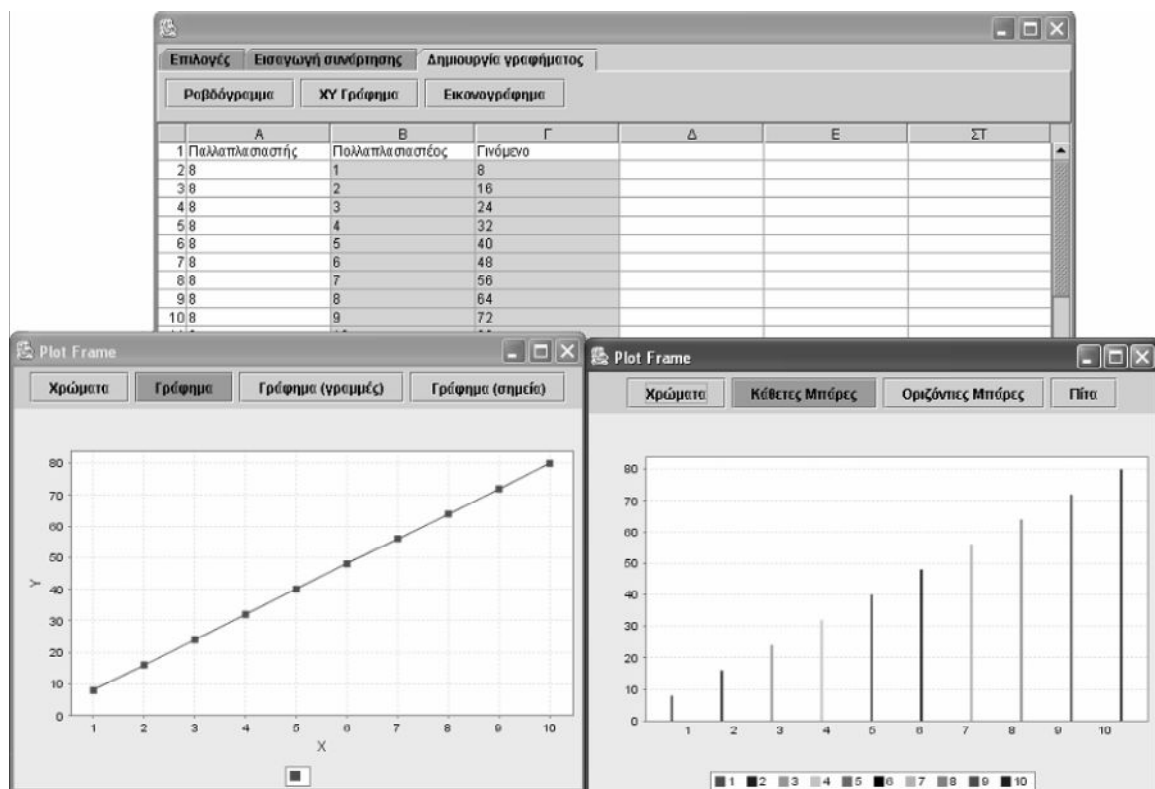
Με το κουμπί «Πίνακας» καταγράφονται αυτόματα στον πίνακα τιμών του προγράμματος «Στατιστική» οι δύο αριθμοί που καθορίζουν την κατάσταση στο πλαίσιο.

Σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα, έχουμε σημειώσει στον πίνακα τιμών τις διαφορετικές περιπτώσεις κατά τις οποίες οι δύο αριθμοί που επιλέξαμε να έχουν γινόμενο 120. Οι άλλοι δύο πίνακες παρουσιάζουν γραφικά τη σχέση που έχουν οι δύο παράγοντες του γινομένου, όταν αυτό είναι σταθερό και ίσο με 120.



Η σχέση των δύο παραγόντων είναι μη γραμμική. Οι δύο παράγοντες είναι αντιστρόφως ανάλογοι αριθμοί.

Ένα δεύτερο παράδειγμα συνδέεται με τη γνωστή προπαίδεια των αριθμών. Οι μαθητές μπορούν να έχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις του τρόπου με τον οποίο αυξάνονται τα γινόμενα, κάθε φορά που ένας από τους παράγοντες αυξάνεται κατά 1 μονάδα στο τετράγωνο πλέγμα. Ωστόσο, με την καταγραφή των τριών παραγόντων στον πίνακα του προγράμματος «Στατιστική» μπορούν να έχουν και άλλες αναπαραστάσεις (όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα).



Η «προπαίδεια» του 8 με πολλαπλή αναπαράσταση.

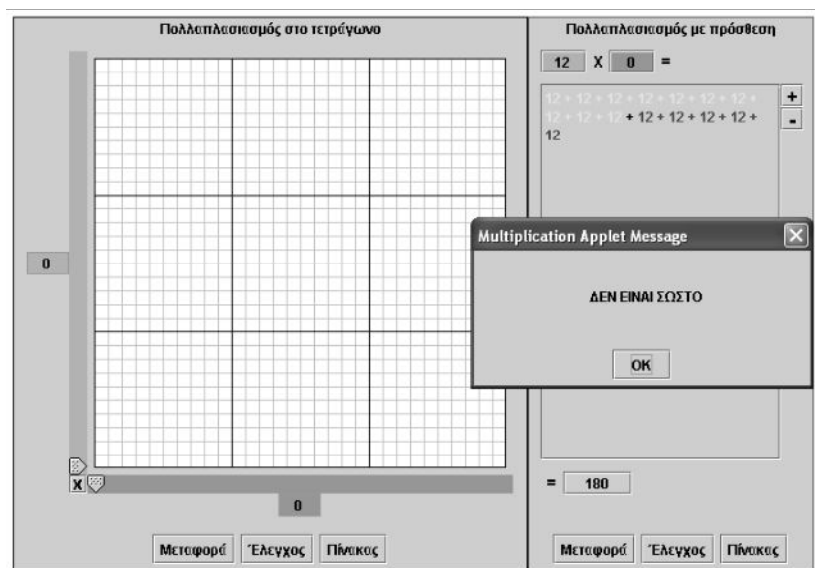
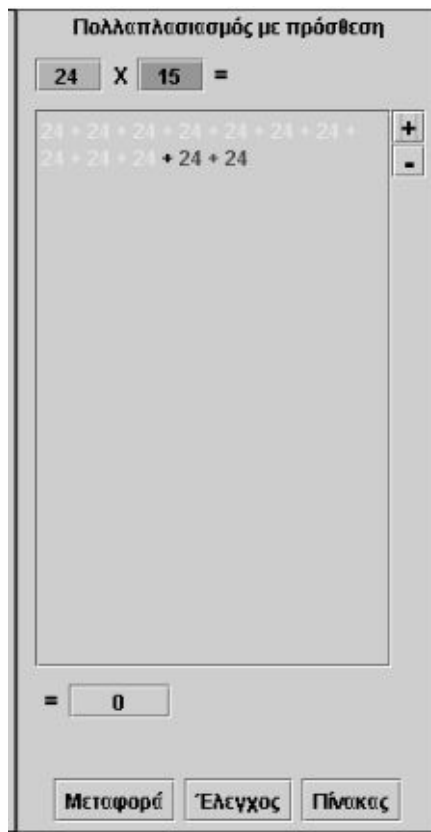
### 13.3.2 Το πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση»

Στο πλαίσιο αυτό έχουμε την αναπαράσταση του γινομένου δύο μονοψήφιων ή διψήφιων αριθμών ως άθροισμα του ενός παράγοντα (πολλαπλασιαστή) τόσες φορές όσες δηλώνει ο άλλος (πολλαπλασιαστέος).

Ο χρήστης μπορεί να πληκτρολογήσει τους δύο παράγοντες του γινομένου και στη συνέχεια να υπολογίσει το γινόμενο τους στο ίδιο πλαίσιο. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει αρχικά να εκφράσει το γινόμενο ως άθροισμα του ενός παράγοντα όσες φορές δηλώνει ο άλλος και στη συνέχεια να το υπολογίσει. Εφόσον διεξαχθεί σωστά όλη η διαδικασία, το πρόγραμμα, κατά την επιλογή «Έλεγχος», θα εμφανίσει το μήνυμα «Σωστό».

Μία ανάλογη κατάσταση δημιουργείται όταν ο χρήστης επιλέξει να μεταφέρει στο πλαίσιο αυτό καταστάσεις πολλαπλασιασμού από άλλα πλαίσια.

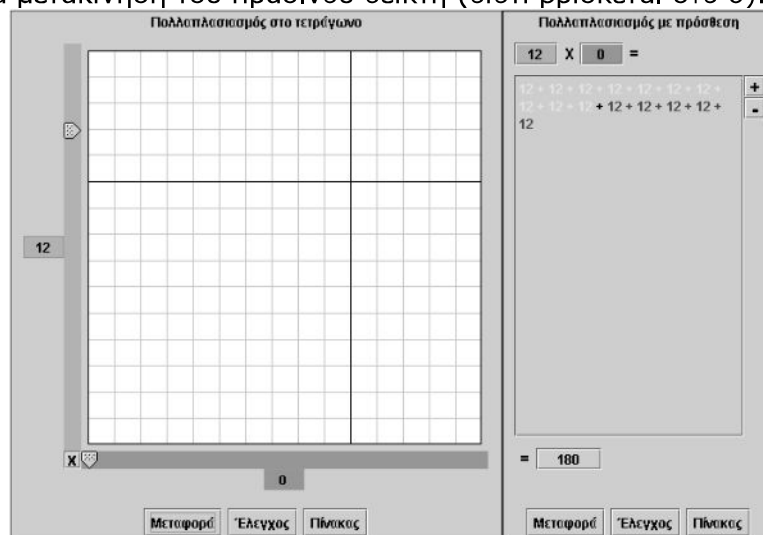
Το πρόγραμμα λειτουργεί και όταν ο χρήστης έχει πληκτρολογήσει έναν αριθμό στο πρώτο κουτάκι (γαλάζιο) του γινομένου. Με το κουμπί «+» μπορεί να προσθέτει τον προσθετέο με τον εαυτό του όσες φορές θέλει. Ωστόσο, κατά τον έλεγχο της διαδικασίας, δεν πρόκειται να εμφανιστεί το μήνυμα «Σωστό». Έτσι, λοιπόν, δεν αρκεί να πληκτρολογεί κανείς έναν αριθμό και να τον προσθέτει όσες φορές θέλει. Θα πρέπει και να εκφράζει σωστά όλες τις παραμέτρους του προγράμματος.



Σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα, θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο  $12 \times 0$ . Παρά το γεγονός ότι έχουμε προσθέσει με το κουμπί «+» δεκαπέντε φορές τον αριθμό 12 και έχουμε υπολογίσει σωστά το άθροισμά του (180), η επιλογή «Έλεγχος» εμφανίζει το μήνυμα «Δεν είναι σωστό». Για να είναι σωστή η διαδικασία θα πρέπει να αφαιρεθούν όλοι οι προσθετέοι από το άθροισμα. Συνεπώς, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, δεν φτάνει μόνο να επιλέξει κανείς την πρόσθεση ενός αριθμού με τον εαυτό του μερικές φορές και να υπολογίσει το άθροισμά του σωστά. Θα πρέπει να εκφράσει και το γινόμενο του σωστά. Αυτό διαπιστώνεται εύκολα, μεταφέροντας την κατάσταση στα άλλα πλαίσια. Για παράδειγμα, η μεταφορά στο πλαίσιο



«Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο» φανερώνει τη μετακίνηση του γαλάζιου δείκτη στο 12, αλλά καμιά μετακίνηση του πράσινου δείκτη (διότι βρίσκεται στο 0).



Στην πραγματικότητα, αυτό το πλαίσιο λειτουργεί ως μέσο έκφρασης και υπολογισμού του γινομένου δύο φυσικών αριθμών με τη βοήθεια της πρόσθεσης.

### 13.3.3 Το πλαίσιο «Οριζόντιος πολλαπλασιασμός»

Το πλαίσιο «Οριζόντιος πολλαπλασιασμός» ολοκληρώνει κατά κάποιον τρόπο την έκφραση ενός γινομένου. Η διαδικασία που λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο αυτό έχει ως εξής:

Αρχικά πληκτρολογούνται οι δύο παράγοντες: «πολλαπλασιαστής» και «πολλαπλασιαστέος» στο γαλάζιο και το πράσινο κουτάκι, αντίστοιχα. Κατόπιν ο αριθμός στο πράσινο κουτάκι αναγράφεται ως άθροισμα δεκάδων και μονάδων ( $15 = 10 + 5$ ). Τέλος πολλαπλασιάζεται ο πολλαπλασιαστής στο γαλάζιο κουτάκι με τους δύο αριθμούς και προστίθεται το άθροισμα:

$$12 \times 10 + 12 \times 5 = 120 + 60 = 180$$



Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να εκφράσει το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών ως αποτέλεσμα επιμέρους πολλαπλασιασμών, κάνοντας εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας.

Μία ανάλογη κατάσταση δημιουργείται όταν ο χρήστης επιλέξει να μεταφέρει σε άλλα πλαίσια την κατάσταση του πλαισίου αυτού, ή, αντίστροφα, να μεταφέρει στο συγκεκριμένο πλαίσιο καταστάσεις πολλαπλασιασμού άλλων πλαισίων (δείτε την παρακάτω εικόνα).

The screenshot displays the 'Πολλαπλασιασμός' (Multiplication) software interface, which is divided into four main panels:

- Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο (Multiplication on the grid):** Shows a 15x12 grid with a 12x15 rectangle highlighted in dark gray. The number 12 is in the left margin and 15 is in the bottom margin.
- Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση (Multiplication by addition):** Shows the equation  $12 \times 15 =$  followed by a list of 15 terms, each being  $12$ , and a final result of  $180$ .
- Οριζόντιος πολλαπλασιασμός (Horizontal multiplication):** Shows the equation  $12 \times 15 = 12 \times (10 + 5)$ , which is then broken down into  $12 \times 10 + 12 \times 5$ , resulting in  $120 + 60 = 180$ .
- Κατακόρυφος Πολλαπλασιασμός (Vertical multiplication):** Shows the vertical multiplication of 12 by 15, with intermediate steps:  $12 \times 5 = 60$  and  $12 \times 10 = 120$ , leading to the final result of  $180$ .

Each panel includes buttons for 'Μεταφορά' (Move), 'Έλεγχος' (Check), and 'Πίνακας' (Table).

### 13.3.4 Το πλαίσιο «Κατακόρυφος πολλαπλασιασμός»

Το πλαίσιο «Κατακόρυφος πολλαπλασιασμός» αποτελεί μία ακόμη έκφραση του «Οριζόντιου πολλαπλασιασμού». Εδώ ο κατακόρυφος πολλαπλασιασμός δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα άθροισμα δύο αριθμών που προκύπτουν από τα γινόμενα:  $12 \times 5$  και  $12 \times 10$ . Συνεπώς, ό,τι ισχύει στον οριζόντιο πολλαπλασιασμό ισχύει και στον κατακόρυφο.

This close-up view of the 'Κατακόρυφος Πολλαπλασιασμός' panel shows the vertical multiplication process. At the top, the numbers 12 and 15 are entered. Below them, the multiplication is shown step-by-step:  $12 \times 5 = 60$  and  $12 \times 10 = 120$ . The final result, 180, is displayed at the bottom. The interface includes buttons for 'Μεταφορά', 'Έλεγχος', and 'Πίνακας'.

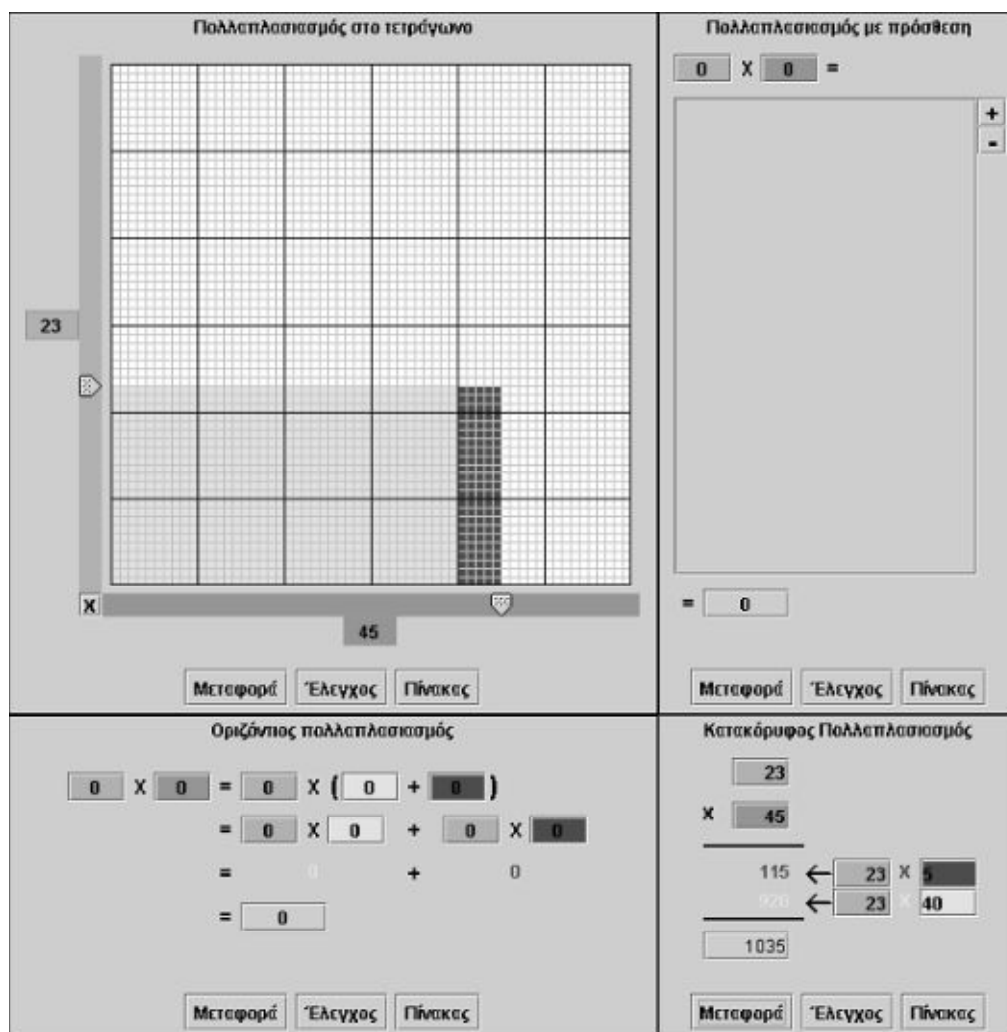
Ο χρήστης συνδέει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού με το γνωστό τρόπο εύρεσης του γινομένου. Έχει τη δυνατότητα: να πληκτρολογεί τους δύο όρους του γινομένου, να αναλύει το δεύτερο παράγοντα (πράσινο κουτάκι) σε άθροισμα δύο προσθετών –μονάδες και δεκάδες–, να υπολογίζει τα γινόμενά τους με τον πρώτο παράγοντα (στο γαλάζιο κουτάκι) και να προσθέτει τα δύο αποτελέσματα. Τέλος, μπορεί να επιλέξει «Έλεγχος» ή «Μεταφορά» στα άλλα πλαίσια ή να καταγράψει τους τρεις αριθμούς στον πίνακα τιμών.

Μία ανάλογη κατάσταση δημιουργείται όταν ο χρήστης επιλέξει να μεταφέρει στο πλαίσιο αυτό καταστάσεις πολλαπλασιασμού άλλων πλαισίων.

### 13.4 Μαθησιακές δυνατότητες στο τοπικό λογισμικό

#### 13.4.1 Ένα ασυνήθιστο κομπιουτεράκι

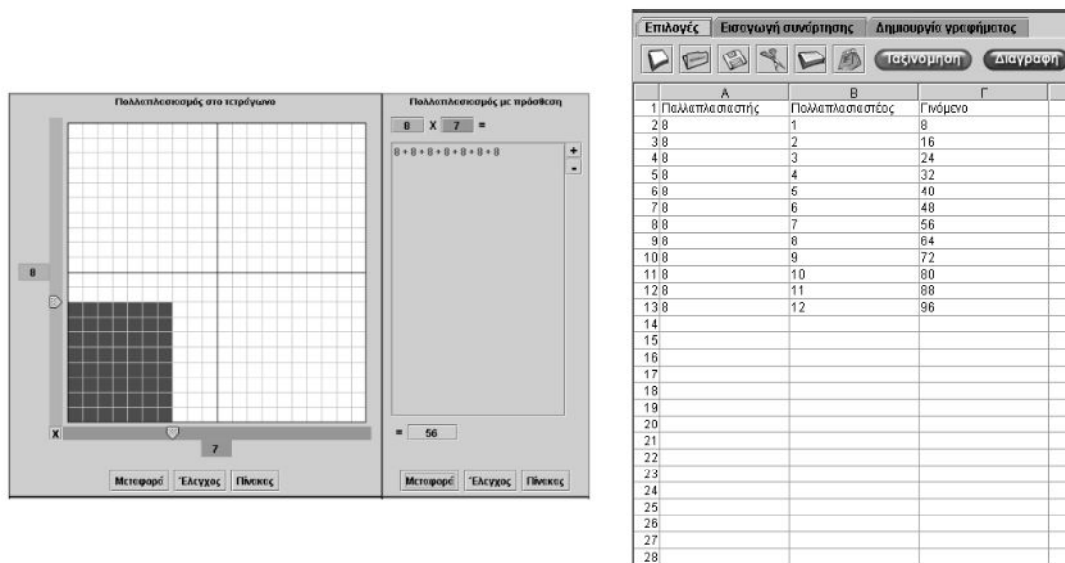
Το πρόγραμμα αυτό θέτει στη διάθεση των μαθητών ένα δυναμικό και πολλαπλής αναπαράστασης υπολογιστή. Μπορούν, δηλαδή, να υπολογίζουν με διάφορους τρόπους το γινόμενο: (α) δύο μονοψήφιων αριθμών, (β) ενός μονοψήφιου και ενός διψήφιου αριθμού, (γ) δύο διψήφιων αριθμών, επιλέγοντας η εργασία τους να λάβει χώρα σε ένα από τα τέσσερα πλαίσια και ο έλεγχος του αποτελέσματος στα υπόλοιπα. Για παράδειγμα, αν θέλουν να υπολογίσουν το γινόμενο  $23 \times 45$ , μπορούν να εργαστούν στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο» και κατόπιν να μεταφέρουν την κατάσταση στο πλαίσιο «Κατακόρυφος πολλαπλασιασμός» για να βρουν το αποτέλεσμα (δείτε την παρακάτω εικόνα).



Οι μαθητές, που χρησιμοποιούν το πρόγραμμα με αυτό τον τρόπο, έχουν τη δυνατότητα να ερμηνεύουν τον πολλαπλασιασμό σε διαφορετικά πλαίσια και να διευρύνουν, έτσι, το εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο κινούνται, εφαρμόζοντας τη συγκεκριμένη πράξη.

#### 13.4.2 Η προπαίδεια του πολλαπλασιασμού

Το πρόγραμμα αυτό είναι κατάλληλο για την εκμάθηση της προπαίδειας με ένα διαφορετικό τρόπο.



Μετακινώντας κατά μία μονάδα το δείκτη της πράσινης ταινίας, οι μαθητές παρατηρούν ότι προστίθεται μία ακόμη στήλη με ίσο αριθμό τετραγωνιδίων στα ήδη χρωματισμένα τετραγωνίδια. Στη συνέχεια, κάνοντας «Μεταφορά» στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση», διαπιστώνουν ότι σε κάθε μετακίνηση του δείκτη προστίθεται ο ίδιος αριθμός. Τέλος, κατά τον πολλαπλασιασμό με το 8, παρατηρούν ότι:

$$8 \times 1 = 8$$

$$8 \times 2 = 8 + 8$$

$$8 \times 3 = 8 + 8 + 8 \text{ κτλ.}$$

Επιλέγοντας το κουμπί «Πίνακας» στο πρόγραμμα «Πολλαπλασιασμός» μεταφερόμαστε στη «Στατιστική», όπου βρίσκονται καταγεγραμμένες οι τιμές από τις πράξεις που είχαμε κάνει προηγουμένως. Ο εκπαιδευτικός, εκμεταλλευόμενος τη δυνατότητα αυτή, μπορεί να δημιουργήσει ένα ακόμη πλαίσιο δραστηριότητας, ζητώντας από τους μαθητές να συμπληρώσουν τα επόμενα κελιά του πίνακα της «Στατιστικής» χωρίς τη βοήθεια του «Πολλαπλασιασμού».

Το πρόγραμμα επιτρέπει την επέκταση του πίνακα πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών και πέρα των μονοψήφιων αριθμών.

### 13.4.3 Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

#### 13.4.3.1 Αντιμεταθετική ιδιότητα

Η αντιμεταθετική ιδιότητα μπορεί να εμφανιστεί στο πρόγραμμα με έναν απλό τρόπο. Η ερώτηση «Με πόσους τρόπους μπορούν να χρωματιστούν 12 τετραγωνίδια» εμφανίζει την ιδιότητα αυτή, αρκεί σε κάθε περίπτωση να γίνεται αναφορά και στον πολλαπλασιαστέο και στον πολλαπλασιαστή. Οι μαθητές διαπιστώνουν ότι μπορούν να χρωματίσουν δώδεκα τετραγωνίδια, επιλέγοντας είτε ως πολλαπλασιαστή το 3 και πολλαπλασιαστέο το 4, είτε ως πολλαπλασιαστή το 4 και πολλαπλασιαστέο το 3. Με άλλα λόγια, παρά το γεγονός ότι οι πολλαπλασιασμοί:  $3 \times 4$  και  $4 \times 3$  σχηματίζονται με διαφορετικές επιλογές (διαφορετικά χρώματα) των δύο όρων τους, έχουν το ίδιο γινόμενο.

Η μεταφορά των γινομένων στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση» επιτρέπει στους μαθητές να εξηγήσουν την αντιμεταθετική ιδιότητα με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Συνεπώς, η ισότητα:  $4 \times 3 = 4 + 4 + 4$  μπορεί να μετασχηματιστεί σε:  $3 \times 4$ , αν το άθροισμα:  $4 + 4 + 4$  γραφεί ως εξής:

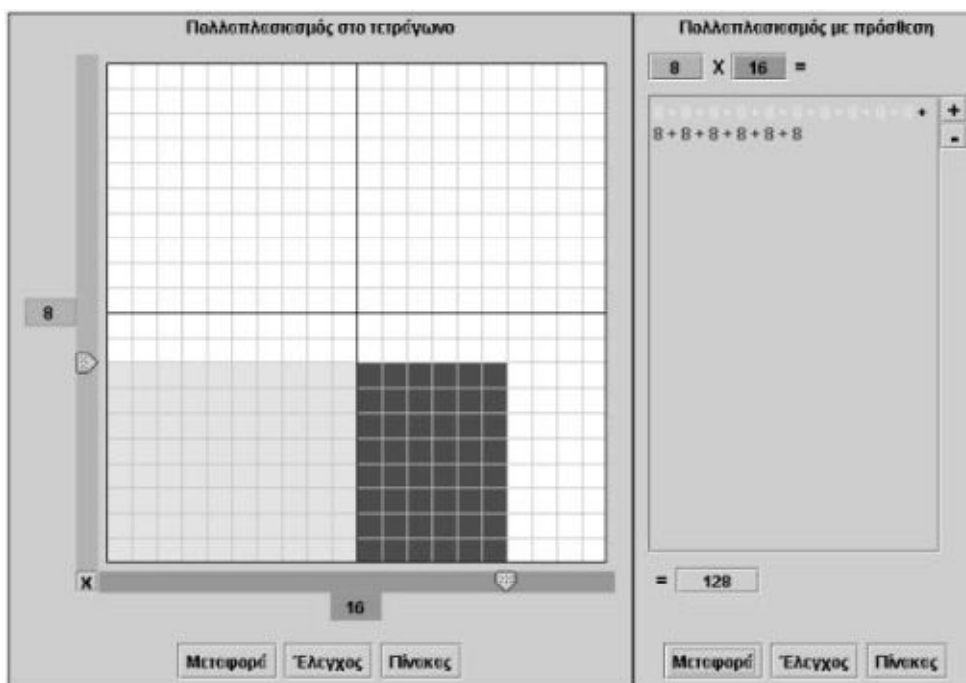
$$3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 3 + 3 + 3 + (1 + 1 + 1) = 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4$$

Η συμπλήρωση ενός πίνακα τιμών, όπως εμφανίζεται στην παρακάτω εικόνα, αναδεικνύει την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με έναν άλλο τρόπο:

Επιλογές Εισαγωγή συνόρτησης Δημιουργία γραφήματος			
Ταξινόμηση		Διαγραφή	
A	B	Γ	
1 Πολλαπλασιστής	Πολλαπλασιαστέος	Γινόμενο	
2 12	1	12	
3 6	2	12	
4 4	3	12	
5 3	4	12	
6 2	6	12	
7 1	12	12	

### 13.4.3.2 Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση

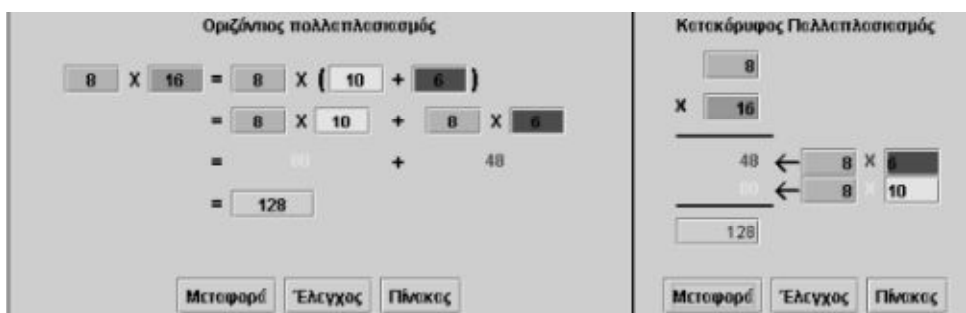
Η ιδιότητα αυτή παρουσιάζεται στο πρόγραμμα με τη βοήθεια δύο χρωμάτων: του κίτρινου και του κόκκινου. Για παράδειγμα, κατά τη διαπραγμάτευση του γινομένου  $8 \times 16$  στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός στο τετράγωνο», παρατηρούμε ότι ένα μέρος από τα χρωματισμένα τετραγωνίδια είναι κίτρινα, ενώ τα υπόλοιπα κόκκινα. Συγκεκριμένα, κίτρινο χρώμα έχουν όσα συμπληρώνουν μία δεκάδα στηλών. Έτσι το γινόμενο  $8 \times 16$  έχει ως εξής:  $8 \times 10 + 8 \times 6 = 80 + 48 = 128$ .



Η μεταφορά της κατάστασης στο πλαίσιο «Πολλαπλασιασμός με πρόσθεση» παρουσιάζει με ανάλογο τρόπο την κατάσταση αυτή. Το γινόμενο  $8 \times 16$  μετατρέπεται σε άθροισμα, όπου οι δέκα πρώτες φορές εμφάνισης του 8 φέρουν κίτρινο χρώμα και οι έξι επόμενες φορές κόκκινο. Άρα υπάρχει επιμερισμός των αθροισμάτων.

Στο πλαίσιο «Οριζόντιος πολλαπλασιασμός» οι μαθητές παρατηρούν την αριθμητική έκφραση αυτής της κατάστασης:

$$8 \times 16 = 8 \times (10 + 6) = 8 \times 10 + 8 \times 6 = 80 + 48 = 128$$



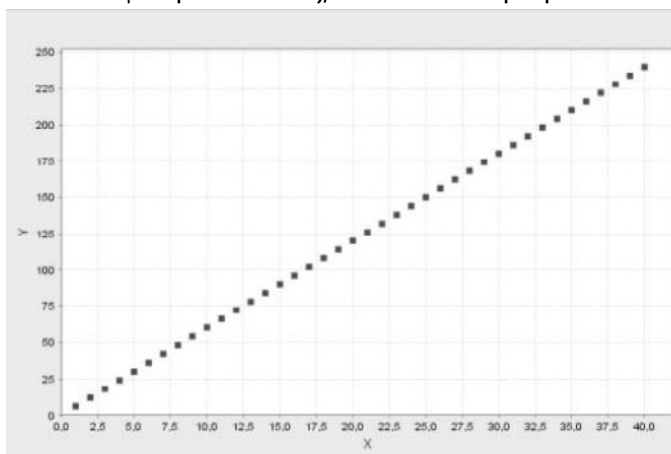
Η ίδια κατάσταση παρατηρείται και στον κατακόρυφο πολλαπλασιασμό. Μάλιστα, οι μαθητές, οι οποίοι μετείχαν σε δραστηριότητες επιμεριστικής ιδιότητας στα άλλα πλαίσια, μπορούν εύκολα να εξηγήσουν τη διαδικασία που λαμβάνει χώρα στον κατακόρυφο πολλαπλασιασμό. Επιλέγοντας τον πολλαπλασιασμό διψήφιου με διψήφιο αριθμό, παρατηρούν την επιμεριστική ιδιότητα ως προς τον ένα παράγοντα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να εργαστούν στο πλαίσιο «Οριζόντιος πολλαπλασιασμός» και να ελέγξουν το αποτέλεσμα των επιλογών τους, κάνοντας μεταφορά της κατάστασης στα υπόλοιπα πλαίσια.

#### 13.4.4 Ανάλογοι και αντιστρόφως ανάλογοι αριθμοί

Στο πρόγραμμα «Πολλαπλασιασμός» οι μαθητές χειρίζονται τρεις αριθμούς: τον πολλαπλασιαστή, τον πολλαπλασιαστέο και το γινόμενο. Διατηρώντας σταθερό έναν από αυτούς, μπορούν να ερευνήσουν τη σχέση που εμφανίζουν οι δύο άλλοι.

##### 13.4.4.1 Γινόμενα με σταθερό τον ένα παράγοντα

Οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν τη σχέση που έχει ο πολλαπλασιαστέος και το γινόμενο, όταν ο πολλαπλασιαστής διατηρείται σταθερός. Για παράδειγμα, καλούνται να εντοπίσουν όλους τους αριθμούς και τα γινόμενά τους, όταν οι αριθμοί αυτοί πολλαπλασιάζονται με το 6. Από την εργασία αυτή προκύπτει ότι κάθε φορά που διπλασιάζουν, τριπλασιάζουν κ.ο.κ. τον πολλαπλασιαστέο, το γινόμενο υφίσταται την ίδια μεταβολή. Δηλαδή οι αριθμοί είναι ανάλογοι. Μάλιστα, αφού συμπληρώσουν τον πίνακα του προγράμματος «Στατιστική», μπορούν να συνδέσουν τη σχέση αυτή με το γράφημα των δύο αριθμών· θα παρατηρήσουν ότι τα σημεία που ορίζουν οι αριθμοί βρίσκονται στην ίδια ευθεία γραμμή.



##### 13.4.4.2 Παράγοντες πολλαπλασιασμού με σταθερό το γινόμενο

Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν όλους τους αριθμούς που έχουν το ίδιο γινόμενο, π.χ. το 256, και να αναζητήσουν την ιδιότητα των δύο αυτών αριθμών. Από τη συγκεκριμένη εργασία προκύπτει ότι κάθε φορά που ο ένας αριθμός διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.ο.κ., ο άλλος αριθμός υποδιπλασιάζεται, υποτριπλασιάζεται κτλ. Δηλαδή οι αριθμοί αυτοί είναι αντιστρόφως ανάλογοι. Η συμπλήρωση του πίνακα τιμών και το γράφημα των αριθμών αυτών φανερώσουν τη σχέση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

