

8. Μετασχηματισμοί στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Σύντομη Περιγραφή

Οι μαθητές καλούνται να μετασχηματίσουν τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης δουλεύοντας στο παράθυρο 'Γράφημα' με στόχο τη μελέτη τους ως προς τη μονοτονία, τις συμμετρίες ως προς τους δυο άξονες και τη διαγώνιο της πρώτης γωνίας των αξόνων, καθώς και τη σχέση μεταξύ τους.

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να επεκταθεί ανάλογα με το πού ο διδάσκοντας θέλει να δώσει έμφαση (π.χ. να προστεθούν και άλλα ερωτήματα σχετικά με τη μονοτονία κτλ.).

Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Προτείνεται να διδαχθεί στο κεφάλαιο της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης στη Β' Λυκείου. Συγκεκριμένα η μελέτη των δυο συναρτήσεων (μονοτονία, συμμετρίες, μετασχηματισμοί) που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του παραθύρου 'Γράφημα', όπως δείχνεται σε αυτή τη δραστηριότητα. Στο περιβάλλον του προγράμματος οι μαθητές μπορούν, αν εκτελέσουν οι ίδιοι τους μετασχηματισμούς της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, να δουν τις αλλαγές που επιφέρουν στον τύπο της και ύστερα να αποδείξουν αλγεβρικά τα συμπεράσματα που βρήκαν.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας: 3-4 διδακτικές ώρες

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να κατανοήσουν το ρόλο του 'α' στην εκθετική συνάρτηση a^x , τι επίπτωση έχει δηλαδή η αλλαγή του συντελεστή 'α' στη γραφική παράσταση της εκθετικής.
- > Να δουν ότι η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφες και άρα συμμετρικές ως προς τη διαγώνιο της γωνίας των αξόνων.
- > Να διακρίνουν τη μονοτονία της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης σε σχέση με το α' (a^x , $\log_a x$).
- > Να μετασχηματίσουν (μετατόπιση ως προς τους δυο άξονες, εύρεση συμμετρικού ως προς τους δυο άξονες) τη γραφική παράσταση της εκθετικής και λογαριθμικής και να μελετήσουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο της.

Παρατηρήσεις

1. Στο Α' μέρος μελετάται η εκθετική συνάρτηση. Προτείνεται οι μαθητές να χειριστούν τη γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης ($y=2^x$) και να μελετήσουν τη μονοτονία, τη συμμετρία, την κλίση της καμπύλης και τις μετατοπίσεις της ως προς τους δυο άξονες.
2. Στο πρώτο ερώτημα προτείνεται, για τον έλεγχο της μονοτονίας και της συμμετρίας των δυο γραφικών παραστάσεων, να γίνει επιλογή μερικών σημείων και από τις δυο γραφικές παραστάσεις (με την εντολή 'Σύνολο σημείων' από το υπομενού 'Δείγμα από καμπύλη' ως προς τον άξονα των y) και να σταλούν οι συντεταγμένες τους στο παράθυρο 'Πίνακας'. Έτσι,

- είναι δυνατή η παρατήρηση των τιμών της y όταν αυξάνει η x (βλέπε εικόνα 1).
3. Στα ερωτήματα 2-5 προτείνεται οι μαθητές να εκτελούν πρώτα τους μετασχηματισμούς και μετά να εικάζουν για το ποιος θα είναι ο τύπος της μετασχηματισμένης γραφικής παράστασης. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει να ελεγχθεί αν είναι επιλεγμένη η ρύθμιση 'Απόκρυψη όλων' στο παράθυρο διαλόγου 'Επιλογές παραθύρου Γραφήματος' το οποίο ενεργοποιείται από το μενού 'Γράφημα'. Η επιλογή 'Εμφάνιση μετασχηματισμών' εμφανίζει στο πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού τους τύπους των μετασχηματισμένων γραφικών παραστάσεων.
 4. Στο Β' Μέρος οι μαθητές καλούνται να βρουν τη συμμετρική γραφική παράσταση της $y=2^x$ ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων και να μελετήσουν, όπως πριν, τη νέα συνάρτηση (δηλ. τη λογαριθμική). Να τονιστεί η σχέση που έχουν οι δύο συναρτήσεις μεταξύ τους (αντίστροφες), με βάση τη γραφική τους παράσταση.

x	y	X	Y
Οριζόντια	Κάθετα	Οριζόντια	Κάθετα
-1	0.5	1	0.5
0.12	1.08	-0.12	1.08
0.74	1.67	-0.74	1.67
1.17	2.25	-1.17	2.25
1.5	2.83	-1.5	2.83
1.77	3.42	-1.77	3.42
2	4	-2	4

εικόνα 1

Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Α' μέρος

1. Άνοιξε το παράθυρο 'Γράφημα' και να εισαγάγεις τον τύπο $y=2^x$ στο 'Πλαίσιο Τύπων' (πρόσεξε ότι πρέπει να πληκτρολογήσεις $y=2^x$). Για περισσότερες οδηγίες βλέπε το Εγχειρίδιο Χρήστη στη σελίδα 44). Στο ίδιο παράθυρο να εισαγάγεις και τον τύπο $y=(1/2)^x$.
Α) Επίλεξε μερικά σημεία ως προς τον άξονα των y και από τις δύο γραφικές παραστάσεις και στείλε τα στο παράθυρο 'Πίνακας'. Για να επιλέξεις σημεία, ενεργοποίησε την κάθε γραφική παράσταση κάνοντας κλικ πάνω της, και στη συνέχεια επέλεξε τυχαία σημεία ως προς τον άξονα y με την εντολή 'Σύνολο σημείων' από το υπομενού 'Δείγμα από καμπύλη' του μενού 'Γράφημα'. Τι παρατηρείς σχετικά με τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων; Επαληθεύεις το ίδιο γραφικά; Με ποιο μετασχηματισμό θα μπορούσες να ταυτίσεις τη μια γραφική παράσταση με την άλλη;
2. Απάλειψε από το παράθυρο 'Γράφημα' όλες τις γραφικές παραστάσεις εκτός από την $y=2^x$ (επιλέγοντας τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία'). Έπειτα σχημάτισε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=3^x$, $y=4^x$ και $y=5^x$ εισαγάγοντας τους αντίστοιχους τύπους. Τι παρατηρείς σχετικά με την κλίση των καμπυλών;
3. Να μετακινήσεις τη γραφική παράσταση της $y=2^x$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω στον άξονα των y (εργαλείο μετατόπισης). Ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;

4. Να μετακινήσεις τη γραφική παράσταση της $y=2^x$ κατά 3 μονάδες δεξιά στον άξονα των x . Ποιος θα είναι τότε ο τύπος της;
5. Να κάνεις στο τετράδιό σου τη γραφική παράσταση της $y=2^{x-3}+2$. Επαλήθευσε το σχήμα σου στο παράθυρο 'Γράφημα'. Ποιους μετασχηματισμούς θα έκανες στην $y=2^x$, για να ταυτιστεί με την $y=2^{x-3}+2$; Επίλεξε το κατάλληλο εργαλείο από την εργαλειοθήκη του παραθύρου 'Γράφημα' ενεργοποίησέ το όσες φορές χρειαστεί.

Β' μέρος

1. Καθάρισε το παράθυρο 'Γράφημα' με τις κατάλληλες εντολές από το μενού 'Επεξεργασία'. Σχημάτισε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=2^x$ και βρες τη συμμετρική της ως προς τη διχοτόμο των αξόνων με τη χρήση του εργαλείου συμμετρίας. Ποια συνάρτηση νομίζεις ότι είναι; Τι σχέση έχουν οι δύο συναρτήσεις; Για να βοηθηθείς, ενεργοποίησε το εικονίδιο δείκτη σημείου, το οποίο δείχνει τις συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης, επίλεξε μερικά σημεία και από τις δυο γραφικές παραστάσεις, στείλε τα στο παράθυρο 'Πίνακας' και βρες τι σχέση έχουν. Ποια είναι η σχέση τους ως προς τη μονοτονία;
2. Με το εργαλείο μετατόπισης, μετακίνησε τη νέα συνάρτηση κατά 3 μονάδες δεξιά στον άξονα των x . Πώς θα μεταβληθεί ο τύπος της;
3. Με το εργαλείο μετατόπισης, μετακίνησε τη συνάρτηση αυτή κατά 2 μονάδες στον άξονα των y προς τα πάνω. Τι νομίζεις ότι θα αλλάξει στον τύπο της;