

## 10. Η πρόσκληση

### Σύντομη Περιγραφή

Για το σχεδιασμό μιας πρόσκλησης θα χρησιμοποιηθεί χαρτί σε σχήμα παραλληλογράμμου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το εμβαδό του τυπωμένου υλικού της πρόσκλησης και τα περιθώρια εκτύπωσης είναι δεδομένα, ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδό του χαρτιού που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την πρόσκληση. Η πρόσκληση κατόπιν γίνεται ανακοίνωση και ζητείται να βρεθεί το μέγιστο εμβαδό του χαρτιού που θα χρησιμοποιηθεί ώστε να ισχύουν οι ίδιες προϋποθέσεις, αλλά και ο επιπλέον περιορισμός το μήκος και το πλάτος της ανακοίνωσης να μη διαφέρουν πάνω από 3 εκατοστά.

### Ένταξη στο Αναλυτικό Πρόγραμμα

Μπορεί να ενταχθεί σαν εφαρμογή της μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης στην Α΄ Λυκείου, όπως και στη διδασκαλία των αντιστρόφων ποσών στην Β΄ Γυμνασίου.

**Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας:** 3 διδακτικές ώρες

### Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές:

- > Να βρίσκουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης με βάση:
  - α) τον πίνακα τιμών και
  - β) τη γραφική παράσταση.
- > Να χρησιμοποιήσουν τον τύπο εμβαδού παραλληλογράμμου σε προβλήματα άλγεβρας.
- > Να βρίσκουν με ακρίβεια χιλιοστού τη λύση ενός προβλήματος.
- > Να παρατηρήσουν και να διακρίνουν τη σχέση δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσών μεταξύ τους.
- > Να παρατηρήσουν ότι όταν μια συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο, σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της έχει τοπικό μέγιστο.

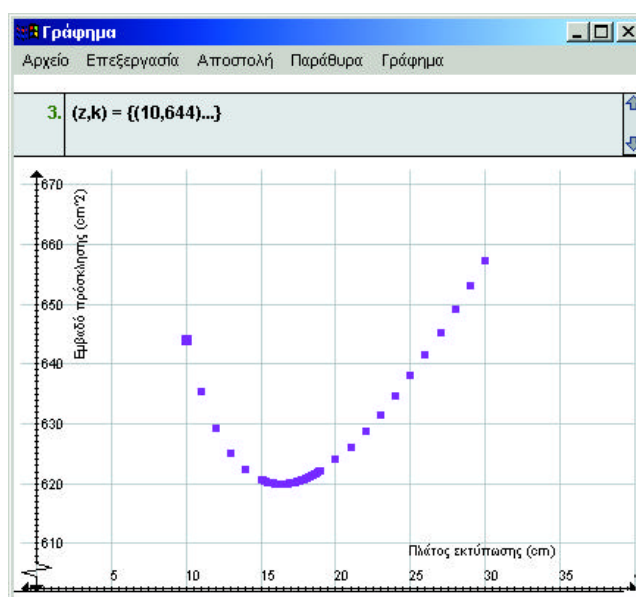
### Παρατηρήσεις

1. Σχετικά με την κατασκευή των στηλών να δοθεί έμφαση στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των παραπάνω μεγεθών και του  $z$ . Για παράδειγμα, η στήλη που αφορά το πλάτος  $v$  της ανακοίνωσης είναι εξαρτημένη στήλη με τη  $z$  με βάση τον τύπο  $v=400/z$ . Έτσι, όλες οι στήλες, εκτός της  $z$ , να κατασκευαστούν συναρτήσει της (βλέπε εικόνα 1).
2. Στην ερώτηση 3 να δοθεί έμφαση στη σχέση που έχουν μεταξύ τους δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Όταν αυξάνεται το ένα ελαττώνεται το άλλο.
3. Στο ερώτημα 4, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν από τον πίνακα ότι το εμβαδό ελαττώνεται, αλλά κάποια στιγμή αρχίζει να αυξάνεται, προτείνεται να χρησιμοποιήσουν την εντολή 'Ενδιάμεσο γέμισμα', για να μπορέσουν να υπολογίσουν την ελάχιστη τιμή. Για να δουν ποια ακριβώς τιμή του  $z$  δίνει το ελάχιστο εμβαδό θα πρέπει να ορίσουν στις 'Ρυθμίσεις στήλης' τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που τους επιτρέπει να βγάλουν ένα συμπέρασμα.
4. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει μέγιστη τιμή. Η ακρίβεια στις τιμές των διατάσεων του χαρτιού βρίσκεται από τον πίνακα (βλέπε εικόνα 2) και στην 'Αριθμομηχανή' υπολογίζεται το πόσο κοστίζει η πρόσκληση.

5. Στο ερώτημα 7 έχουμε έναν περιορισμό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης του εμβαδού. Ζητείται το μέγιστο εμβαδό της πρόσκλησης, όταν η διαφορά των σπηλών πλάτος από μήκος ανακοίνωσης είναι μικρότερη του 4. Θα πρέπει να δημιουργήσουν στον 'Πίνακα' μια στήλη που να δείχνει τη διαφορά των δύο διαστάσεων.
- Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί η διαφορά μεταξύ του τοπικού μεγίστου και ελαχίστου μιας συνάρτησης. Όταν περιορίζουμε το πεδίο ορισμού, τότε μπορούμε να βρούμε τοπικό μέγιστο, αν και η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Πίνακας					
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας					
z	v=400/z	b=z+4	c=v+6	k=b*c	l=v-z
πλάτος εκτύπωσης (cm)	μήκος εκτύπωσης (cm)	πλάτος πρόσκλησης (cm)	μήκος πρόσκλησης (cm)	εμβαδό πρόσκλησης (cm <sup>2</sup> )	διαφορά μήκους-πλάτους (cm)
16.2	24.69	20.2	30.69	619.965	8.49
16.3	24.54	20.3	30.54	619.96	8.24
16.4	24.39	20.4	30.39	619.961	7.99
16.5	24.24	20.5	30.24	619.97	7.74
16.6	24.1	20.6	30.1	619.986	7.5
16.9	23.67	20.9	29.67	620.075	6.77
17	23.53	21	29.53	620.118	6.53
17.1	23.39	21.1	29.39	620.167	6.29
17.5	22.86	21.5	28.86	620.429	5.36
17.6	22.73	21.6	28.73	620.509	5.13
17.9	22.35	21.9	28.35	620.785	4.45
18	22.22	22	28.22	620.889	4.22
18.1	22.1	22.1	28.1	620.998	4
18.4	21.74	22.4	27.74	621.357	3.34
18.5	21.62	22.5	27.62	621.486	3.12
18.8	21.28	22.8	27.28	621.906	2.48
18.9	21.16	22.9	27.16	622.056	2.26
19	21.05	23	27.05	622.211	2.05
20	20	24	26	624	0
21	19.05	25	25.05	626.19	-1.95
22	18.18	26	24.18	628.727	-3.82
23	17.39	27	23.39	631.565	-5.61
24	16.67	28	22.67	634.667	-7.33

εικόνα 1



εικόνα 2

## Φύλλο εργασίας για το μαθητή

Η τάξη σου διοργανώνει μια εκδήλωση και πρέπει να ετοιμάσει προσκλήσεις. Μετά από συνέλευση της τάξης αποφασίστηκε η πρόσκληση να πληροί τις πιο κάτω προϋποθέσεις:

Η πρόσκληση να αποτελείται από 400 τετραγωνικά εκατοστά τυπωμένου υλικού, με περιθώρια 3 εκατοστών στην κορυφή και στο κάτω μέρος της σελίδας και 2 εκατοστών στα πλάγια τμήματά της. Επίσης, λόγω του κόστους του χαρτιού, οι προσκλήσεις πρέπει να τυπωθούν σε χαρτί που να έχει την ελάχιστη επιφάνεια (εμβαδό) που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις.

1. Να σχεδιάσεις στο τετράδιό σου ένα σχήμα για την πρόσκληση, ονομάζοντας το πλάτος της εκτύπωσης 'z'. Να εκφράσεις το μήκος της εκτύπωσης σε σχέση με το 'z' και τέλος το μήκος και το πλάτος ολόκληρης της πρόσκλησης σε σχέση με το 'z'.
2. Να κατασκευάσεις στο Function Probe έναν πίνακα με τις ακόλουθες στήλες: 'Πλάτος εκτύπωσης', 'Μήκος εκτύπωσης', 'Πλάτος πρόσκλησης', 'Μήκος πρόσκλησης', 'Εμβαδό πρόσκλησης'. Να συμπληρώσεις τουλάχιστον 20 τιμές σε κάθε στήλη. Επίλεξε το κατάλληλο εύρος τιμών για το z.
3. Καθώς αυξάνονται οι τιμές στην στήλη του 'z', τι συμβαίνει στις τιμές κάθε μιας από τις άλλες στήλες;
4. Υπάρχει ελάχιστη τιμή για το εμβαδό της πρόσκλησης; Αν υπάρχει, υπολόγισέ την και εξήγησε με ποιον τρόπο το έκανες.  
*Απάντηση: Η ελάχιστη τιμή προκύπτει για  $z = 16,3 \text{ cm}$ .*
5. Υπάρχει μέγιστη τιμή για το εμβαδό της πρόσκλησης; Να στείλεις τις στήλες 'Πλάτος εκτύπωσης' και 'Εμβαδό πρόσκλησης' στο παράθυρο 'Γράφημα', προκειμένου να ελέγξεις την υπόθεσή σου.  
*Απάντηση: Θεωρητικά όχι γιατί οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα, ωστόσο τίθενται περιορισμοί από τις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος.*
6. Το κατάστημα για τις εκτυπώσεις διαθέτει ένα μηχάνημα που μπορεί να κόβει χαρτί με ακρίβεια χιλιοστού. Να βρεις τις διαστάσεις του χαρτιού με το ελάχιστο εμβαδό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγγελία. Αν το χαρτί που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί κοστίζει 1,5 λεπτό το τετραγωνικό εκατοστό, πόσο θα πληρώσει η τάξη για κάθε πρόσκληση;  
*Απάντηση: Το ελάχιστο εμβαδόν είναι  $619,96 \text{ cm}^2$  και θα κοστίσει 9,3 ευρώ.*
7. Εκτός από τις προσκλήσεις, αποφασίστηκε η τάξη να κολλήσει μια μεγάλη ανακοίνωση στον πίνακα ανακοινώσεων ως διαφήμιση για να ενημερωθούν για την εκδήλωση και οι υπόλοιποι μαθητές των άλλων τάξεων. Αυτή τη φορά, όμως, θέλει να μεγιστοποιήσει το εμβαδό της, ώστε να μπορούν οι άλλοι μαθητές να τη διαβάσουν από απόσταση. (Εντούτοις, εξακολουθούν να ισχύουν οι υπόλοιποι περιορισμοί.) Ας υποθέσουμε επιπλέον πως για λόγους αισθητικής, αποφασίστηκε το μήκος και το πλάτος της ανακοίνωσης να μη διαφέρουν περισσότερο από τέσσερα εκατοστά. Χρησιμοποιώντας το παράθυρο 'Πίνακας' να βρεις το πλάτος και το μήκος της πρόσκλησης που μεγιστοποιούν το εμβαδό της ανακοίνωσης. Για να βοηθηθείς, με την εντολή 'Διαφορά' δημιούργησε μια νέα στήλη στον πίνακα που να δείχνει τη διαφορά των διαστάσεων της πρόσκλησης. Πώς ερμηνεύεις τις αρνητικές τιμές της στήλης;