

Τα όμοια τρίγωνα

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας

Τα όμοια τρίγωνα είναι μια δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τη βασική ιδιότητα των ομοίων τριγώνων, την αναλογία δηλαδή των πλευρών τους, ώστε να κατατάξουν ένα μεγάλο αριθμό τριγώνων σε ομάδες οι οποίες θα περιέχουν όμοια μεταξύ τους τρίγωνα.

Στους μαθητές θα δοθεί ένας πίνακας με δύο στήλες. Η πρώτη στήλη θα περιέχει το μήκος της κάθετης πλευράς β ενός ορθογωνίου τριγώνου και η δεύτερη στήλη θα περιέχει το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς γ. Η σειρά των τριγώνων είναι τυχαία, αλλά οι μαθητές γνωρίζουν ότι υπάρχουν όμοια τρίγωνα μεταξύ αυτών. Καταρχήν, οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν την ανάγκη να υπολογίσουν τους λόγους των πλευρών, ώστε να ανακαλύψουν ποιοι από αυτούς είναι ίσοι. Αυτό όμως είναι επίπονο και το λογισμικό Function Probe τούς δίνει τη δυνατότητα, με δυο μάλιστα τρόπους, να εντοπίσουν τις ομάδες των ομοίων τριγώνων.

Η δραστηριότητα απαιτεί στο τέλος τη συμπλήρωση και μιας τρίτης στήλης, η οποία θα περιέχει την οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη κάθετη. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η αριθμομηχανή του λογισμικού.

Ένταξη δραστηριότητας στο αναλυτικό πρόγραμμα

- Τάξη: Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ.
- Γνωστικό αντικείμενο: Όμοια τρίγωνα. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.
- Διδακτική ενότητα: Κεφ. 6, παρ. 6.6. Κεφ. 7, παρ. 7.1.

Εργαλεία λογισμικού:

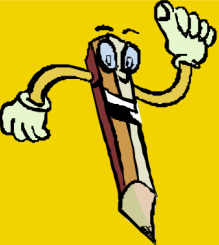
Function probe.

Εκτιμώμενος χρόνος διδασκαλίας

2 διδακτικές ώρες.

Διδακτικοί στόχοι

1. Οι μαθητές θα μάθουν να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των ομοίων τριγώνων (διατήρηση του λόγου των πλευρών τους) για να βρίσκουν όμοια μεταξύ τους τρίγωνα.
2. Θα μάθουν να χρησιμοποιούν το λογισμικό για να ανακαλύπτουν σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, ώστε να εντοπίζουν ζεύγη γραμμικά συμμεταβαλλόμενων ποσών.
3. Θα μάθουν να βρίσκουν τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν είναι γνωστές οι δύο κάθετες πλευρές του.
4. Θα μάθουν ότι μπορούμε να υπολογίσουμε μια γωνία όταν είναι γνωστή η εφαπτομένη της και ότι η διαδικασία αυτή είναι αντίστροφη της διαδικασίας εύρεσης της εφαπτομένης όταν είναι γνωστή η γωνία.



Ο καθηγητής των μαθηματικών σε ένα σχολείο δε βαθμολογεί μόνο την ικανότητα να λύσει κάποιος ένα πρόβλημα, αλλά και το πόσο γρήγορα το λύνει.

Ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές έναν πίνακα με τις κάθετες πλευρές β και γ είκοσι ορθογωνίων τριγώνων. Πληροφόρησε τους μαθητές ότι υπάρχουν τρίγωνα τα οποία είναι όμοια και ότι οι μαθητές θα πρέπει να κατατάξουν τα τρίγωνα σε δύο ή περισσότερες ομάδες, καθεμία από τις οποίες θα περιέχει όμοια μεταξύ τους τρίγωνα.

Ακόμη, θα πρέπει να υπολογίσουν τη μικρότερη από τις οξείες γωνίες κάθε τριγώνου.

Ας δούμε πώς μπορούμε να λύσουμε όσο το δυνατόν συντομότερα το πρόβλημα.

Ομάδα	Πλευρά β (cm)	Πλευρά γ (cm)	Γωνία B
	0,83	1,08	
	0,24	0,57	
	1,58	2,84	
	1,12	2,69	
	2,55	4,59	
	1,02	1,33	
	11,51	14,98	
	1,38	3,31	
	3,43	6,17	
	6,25	8,13	
	2,24	2,91	
	2,51	6,02	
	5,18	6,73	
	6,01	10,82	
	5,67	13,61	
	4,38	10,51	
	3,24	4,21	
	3,01	7,22	
	5,19	9,34	
	4,73	6,15	
	5,67	13,61	
	4,38	10,51	
	3,24	4,21	
	3,01	7,22	
	5,19	9,34	
	4,73	6,15	

- 1 Διαθέτουμε δύο τρίγωνα και θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι όμοια. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
- 2 Αν περάσουμε τις τιμές των πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων σε δύο στήλες του πίνακα τιμών του Function Probe και συμπληρώσουμε μια τρίτη στήλη με το πηλίκο των πλευρών, πώς μπορούμε να διακρίνουμε τα όμοια τρίγωνα;
- 3 Να περάσετε τα ζεύγη των κάθετων πλευρών στον πίνακα “Γράφημα”. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = x$, και να περιστρέψετε την ευθεία αυτή, ώστε να εντοπίσετε σημεία τα οποία βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε ότι τα σημεία αυτά αντιστοιχούν σε όμοια τρίγωνα;
- 4 Στην ερώτηση 2, έχετε εργαστεί με τον πίνακα τιμών. Πώς συνδέονται τα αποτελέσματα της τρίτης στήλης (των πηλίκων) με τις εξισώσεις των ευθειών του ερωτήματος 3;
- 5 Έχετε εντοπίσει τις ομάδες των ομοίων τριγώνων. Στην πρώτη (κενή) στήλη του πίνακα που έχει δοθεί στο φύλλο εργασίας σε κάθε κελί να γράψετε την ομάδα στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο τρίγωνο (1η, 2η, 3η). Αν σας ζητούσαν να συμπληρώσετε στη δεύτερη ομάδα ένα τρίγωνο όμοιο με τα ήδη υπάρχοντα, πώς θα μπορούσε να γίνει αυτό;
- 6 Τώρα θα πρέπει να συμπληρωθεί η τρίτη στήλη με τις γωνίες των τριγώνων. Θα πρέπει να υπολογίσουμε 20 διαφορετικές γωνίες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7 Στην τρίτη στήλη του πίνακα τιμών του Function Probe, έχετε υπολογίσει το πηλίκο των πλευρών των τριγώνων. Ποιο όνομα έχουμε δώσει, στην τριγωνομετρία, σε αυτό το πηλίκο;

Με τη βοήθεια της αριθμομηχανής, να υπολογίσετε τη γωνία B που αντιστοιχεί σε κάθε πηλίκο και τα αποτελέσματα να περαστούν στην τρίτη στήλη.

✓ Οδηγίες για τον εκπαιδευτικό

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις δύο βασικές ιδιότητες των ομοίων τριγώνων (διατήρηση του μέτρου των γωνιών και διατήρηση του λόγου των πλευρών τους). Ακόμη, θα πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, καθώς και το ότι σχέσεις της μορφής $y = ax$ έχουν γραφική παράσταση ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

I. Στην ερώτηση 1, ουσιαστικά θα γίνει μια υπενθύμιση από τους μαθητές των ιδιοτήτων των ομοίων τριγώνων. Οι μαθητές θα πρέπει να αναφέρουν ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες και πλευρές ανάλογες. Εδώ θα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι οι ίσες γωνίες βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές. Είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί ότι ο λόγος δύο κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου παραμένει σταθερός σε κάθε όμοιο προς το αρχικό τρίγωνο.

II. Στην ερώτηση 2, τα όμοια τρίγωνα καθορίζονται από τους ίσους λόγους οι οποίοι προκύπτουν στην τρίτη στήλη, από όπου οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν την αντίστοιχη ιδιότητα των ομοίων τριγώνων.

Αν οι μαθητές κατασκευάσουν μια τρίτη στήλη, η οποία να υπολογίζει το πηλίκο β/γ , τότε θα παρατηρήσουν ότι το πηλίκο αυτό παίρνει τρεις διαφορετικές τιμές: 0,77, 0,56 και 0,42. Οι τιμές αυτές καθορίζουν και τις τρεις ομάδες ομοίων τριγώνων (εικόνα 1).

Εδώ καλό θα είναι να υπογραμμιστεί ότι το πηλίκο β/γ δεν είναι λόγος ομοιότητας, αλλά αποτελεί κριτήριο ομοιότητας όταν παραμένει σταθερό σε διάφορα τρίγωνα.

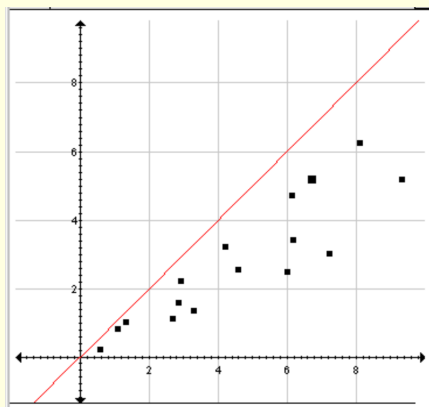
β cm	γ cm	$\lambda = \beta/\gamma$
0.83	1.08	0.77
0.24	0.57	0.42
1.58	2.84	0.56
1.12	2.69	0.42
2.55	4.59	0.56
1.02	1.33	0.77
11.51	14.98	0.77
1.38	3.31	0.42
3.43	6.17	0.56
6.25	8.13	0.77
2.24	2.91	0.77
2.51	6.02	0.42
5.18	6.73	0.77
6.01	10.82	0.56
5.67	13.61	0.42
4.38	10.51	0.42
3.24	4.21	0.77
3.01	7.22	0.42
5.19	9.34	0.56
4.73	6.15	0.77

Εικόνα 1.

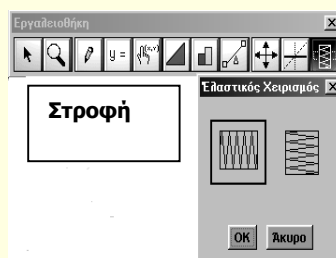
III. Στην ερώτηση 3, ο διδάσκων θέτει το ερώτημα αν τα ζεύγη τιμών, μεταφερόμενα στους άξονες του πίνακα “Γράφημα”, παρουσιάσουν κάποια κανονικότητα. Η συζήτηση πάνω στο ερώτημα αυτό θα μπορούσε να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι τα σημεία μάλλον θα παρουσιάσουν τρεις διαφορετικές κανονικότητες, μία για κάθε ομάδα σημείων. Εδώ τίθεται πλέον το ερώτημα πώς θα ανακαλυφθούν οι τρεις ομάδες με τις δυνατότητες που μας παρέχει ο πίνακας “Γράφημα”.

Οι αναλογίες θα πρέπει να παραπέμπουν τους μαθητές σε γραμμικές σχέσεις, οι οποίες εκφράζονται από εξισώσεις της μορφής $y = ax$.

Στη συνέχεια, οι μαθητές αποστέλλουν τα σημεία στους άξονες (εικόνα 2).



Εικόνα 2.



Εικόνα 3.

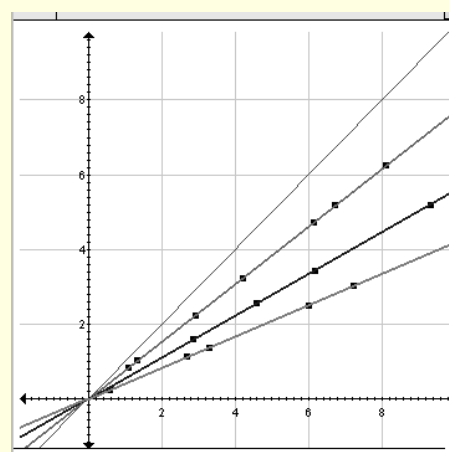
Οι μαθητές κατασκευάζουν την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια, με το εργαλείο του ελαστικού χειρισμού (εικόνα 3), περιστρέφουν την ευθεία ώστε να προσαρμοστεί πάνω στα σημεία.

Μέσω της περιστροφής της ευθείας με εξίσωση $y = x$, οι μαθητές ανακαλύπτουν τρεις ομάδες (εικόνα 4) συνευθειακών σημείων, ενώ συγχρόνως το λογισμικό τους δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουν και τις εξισώσεις των τριών ευθειών που προκύπτουν:

$$y = 0,77x$$

$$y = 0,56x$$

$$y = 0,42x$$

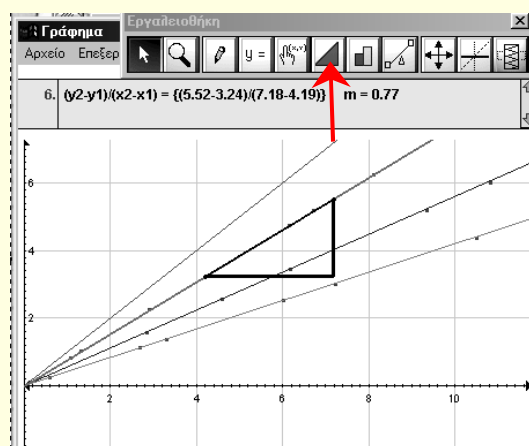


Εικόνα 4.

- IV.** Στην ερώτηση 4, οι μαθητές παρατηρούν ότι οι λόγοι που είχαν εντοπίσει με τον πίνακα τιμών εμφανίζονται ως συντελεστές διεύθυνσης στις ευθείες της ερώτησης 3. Αυτό παραπέμπει σε τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας που βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη πλευρά.

Υπάρχει ακόμη η δυνατότητα υπολογισμού της κλίσης κάθε ευθείας με τη βοήθεια του εργαλείου που υποδεικνύει το βέλος και το οποίο λειτουργεί εφόσον έχει επιλεγεί μια συγκεκριμένη ευθεία (εικόνα 5).

Εδώ το σημαντικό είναι ότι το ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο κατασκευάζει το λογισμικό έχει πλευρές των οποίων τα μέτρα είναι ανάλογα προς τα μέτρα των πλευρών των τριγώνων της ομάδας. Οι μαθητές τώρα μπορούν να κατασκευάσουν οσαδήποτε τρίγωνα όμοια προς τα τρίγωνα της αντίστοιχης ομάδας, οπότε απαντούν και στην ερώτηση 5.



Εικόνα 5.

- V. Στην ερώτηση 6, οι μαθητές θα πρέπει να ανακαλέσουν μια βασική ιδιότητα των ομοίων τριγώνων (έχουν ίσες γωνίες) ώστε να απαντήσουν ότι απαιτείται υπολογισμός μόνο τριών διαφορετικών γωνιών, όσες δηλαδή είναι και οι ομάδες.
- VI. Στην ερώτηση 7, οι μαθητές θα πρέπει μετά από διαπραγμάτευση να αναγνωρίσουν στο πηλίκο β/γ την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης της γωνίας B. Ακόμη, θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι το πρόβλημα το οποίο καλούνται να λύσουν είναι το εξής: «Να υπολογιστεί η τιμή της γωνίας ω όταν είναι γνωστή η τιμή της εφω».

Το πρόβλημα αυτό είναι το αντίστροφο του συνηθισμένου προβλήματος: «Να υπολογιστεί η τιμή της εφω όταν είναι γνωστή η τιμή ω », και αυτό θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές, αφού έτσι θα καταλάβουν τη σημασία να επιλέξουμε το κουμπί INV (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ) στην αριθμομηχανή ώστε να εμφανιστεί το κουμπί $\tan^{-1}x$, με το οποίο μπορούμε να υπολογίζουμε τη γωνία όταν γνωρίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας (εικόνα 6).



Εικόνα 6.

Δίνονται 11 ορθογώνια τρίγωνα. Ο πίνακας στην πρώτη στήλη περιέχει τα μήκη της μιας κάθετης πλευράς α και στη δεύτερη τα μήκη της άλλης κάθετης πλευράς β. Η τρίτη στήλη θα συμπληρωθεί με τα εμβαδά των τριγώνων.

Ερώτηση 1η (8 μονάδες)

Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι όμοια με τη βοήθεια του πίνακα τιμών του Function Probe αλλά και με τον πίνακα “Γράφημα”.

α	β	Ε
0.13	0.2	
1.25	1.88	
2.58	3.87	
3.9	5.85	
5.12	7.68	
6.7	10.05	
8	12	
9.4	14.1	
11.23	16.85	
13.1	19.65	
15	22.5	

Ερώτηση 2η (4 μονάδες)

Να συμπληρώσετε τη στήλη του εμβαδού με τη βοήθεια του λογισμικού και του τύπου του εμβαδού

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \alpha.$$

Ερώτηση 3η (8 μονάδες)

Να αποστείλετε τη στήλη της πλευράς α και του εμβαδού στους άξονες. Ποια σχέση συνδέει το εμβαδόν με την πλευρά;

Απαντήσεις στο φύλλο αξιολόγησης

E₁) Το πηλίκο β/α παραμένει σταθερό (1,5), άρα τα τρίγωνα, με δεδομένο ότι είναι ορθογώνια, είναι όμοια.

Η αποστολή των ζευγών στους άξονες δημιουργεί συνευθειακά σημεία που δείχνουν ανάλογα ποσά (είναι τα κάτω σημεία στην εικόνα).

E₂) Οι μαθητές θα πληκτρολογήσουν τον τύπο $E = 0,5\alpha\beta$.

E₃) Τα σημεία θα διαταχθούν όπως δείχνει η εικόνα (τα επάνω σημεία). Πρόκειται μάλλον για δευτεροβάθμια σχέση και αυτό επιβεβαιώνεται από το ότι:

$$E = 0,5\alpha\beta = 0,5\alpha(1,5\alpha) = 0,75\alpha^2$$

