

**ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
(ΕΜΒΑΔΩΝ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ
ΧΩΡΙΟΥ – Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ
ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ
– ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ
ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ)**

ΑΝΑΡΤΗΘΗΚΕ ΑΠΟ:

[ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΜΑΚΑΡΙΑΔΗΣ](#)

Ημερομηνία Δημιουργίας:

22/08/2023



ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Τίτλος σεναρίου

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα

(Εμβαδόν Παραβολικού Χωρίου – Η Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος – Ιδιότητες και Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος)

Δημιουργοί / Συντελεστές

Στέφανος Μακαριάδης - συγγραφή σεναρίου @18/08/2023

Συνοπτική περιγραφή

Το προτεινόμενο σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου και αναφέρεται στο Β΄ Μέρος (Ανάλυση) και στην παράγραφο 3.4 «Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα».

Οι μαθητές εμπλέκονται με δραστηριότητες που αφορούν τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου, την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, τις ιδιότητες με βάση τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και τα θεωρήματα που ισχύουν στο ορισμένο ολοκλήρωμα. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, είναι από τις πιο απαιτητικές ενότητες στη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στην Γ Λυκείου. Εισάγεται στο σχολικό εγχειρίδιο ως το εμβαδόν παραβολικού χωρίου με τον υπολογισμό των αντίστοιχων αθροισμάτων (κάτω, πάνω και ενδιάμεσα) των ορθογωνίων που δημιουργούνται στο παραβολικό χωρίο.

Η κατανόηση των εννοιών απαιτούν σύνθετες νοητικές λειτουργίες και απαιτούνται πολλές αναπαραστάσεις εννοιών και πρέπει να ενισχυθούν με πρόσθετα εργαλεία διδασκαλίας και τον σωστό καθοδηγητικό ρόλο του διδάσκοντα.

Γνωστικό/ά αντικείμενο/α – γνωστική/ές περιοχή/ές

Μαθηματικά > Ανάλυση > Ολοκλήρωμα

Γλώσσα (ες) σεναρίου

ελληνικά

Λέξεις-κλειδιά

[Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα](#) [Εμβαδόν Παραβολικού Χωρίου](#) [Η Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος](#)
[Ιδιότητες και Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος](#)

ΣΚΕΠΤΙΚΟ

Σκεπτικό του σεναρίου / Αιτιολόγηση των επιλογών

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα διερευνήσουν και θα ανακαλύψουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε συνδυασμό με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου με τη μέθοδο της εξαντλήσεως. Ποιο συγκεκριμένα αξιοποιώντας τη δυνατότητα του λογισμικού Geogebra και με τη δυνατότητα δυναμικής προσέγγισης, οι μαθητές θα προσπαθήσουν να ανακαλύψουν και να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο το εμβαδόν ενός χωρίου εκφράζεται με το ορισμένο ολοκλήρωμα. Έτσι οι μαθητές θα ανακαλύψουν μία νέα έννοια βασισμένοι όμως σε γνωστές έννοιες εμβαδών ορθογωνίων και ορίων στο $+\infty$ με το κριτήριο παρεμβολής που έχουν διδαχθεί στην παράγραφο 1.5. Οι κινήσεις αυτές είναι δυνατόν να οπτικοποιηθούν και να γίνουν δυναμικές αν η διδασκαλία υποστηριχτεί στο λογισμικό Geogebra με υποστηρικτικά φύλλα εργασίας που βήμα - βήμα θα βοηθήσουν τους μαθητές να ανακαλύψουν τη γνώση.

Παιδαγωγική προσέγγιση και στρατηγικές

Προστιθέμενη αξία:

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση.

Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ - ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Στοχευόμενο κοινό (ομάδα-στόχος ή σε ποιους απευθύνεται)

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Γ' Λυκείου και αναφέρεται στο Β' Μέρος (Ανάλυση) και στην παράγραφο 3.4

«Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα».

Βαθμίδα Εκπαίδευσης

γενικό λύκειο

Τάξη

Γ' Λυκείου

Ηλικιακή ομάδα

Από 17 Έως 18

Γλώσσα στοχευόμενου κοινού

ελληνικά

Εκτιμώμενος χρόνος υλοποίησης σεναρίου (διάρκεια)

μικρή διάρκεια: έως 3 ώρες

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες. Η αξιολόγηση των μαθητών με ασκήσεις εφαρμογής πάνω στην νέα γνώση όπως και τεστ θεωρίας θα εφαρμοστούν από τους μαθητές στο σπίτι.

Χώρος υλοποίησης

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών.

Ενορχήστρωση τάξης

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές τις 3 ώρες εργαζόμενοι σε δυάδες και καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτικό θα αναπτύξουν τις δραστηριότητες που θα οδηγήσουν στη σταδιακή ανακάλυψη της νέας γνώσης. Η αξιολόγηση θα γίνει στο σπίτι των μαθητών, όπου καλούνται να εφαρμόσουν τη νέα γνώση και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις θεωρίας.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Η επικοινωνία όλων των μαθητών της τάξης με τις εργασίες των συμμαθητών τους και η συλλογική διερεύνηση κρίσιμων παραμέτρων της μαθησιακής διαδικασίας μπορεί επίσης ενισχυθεί με κατάλληλη χρήση του διαδραστικού πίνακα σε διαφορετικές πτυχές της εφαρμογής των δραστηριοτήτων του σεναρίου.

Οργάνωση τάξης / διδασκαλίας

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Στους μαθητές θα δοθούν κατάλληλα φύλλα εργασίας που θα εκπονήσει ο διδάσκων και αναλυτικές οδηγίες (προφορικά ή γραπτά) για την υλοποίηση του σεναρίου.

Αρχικά θα δοθούν κάποιες οδηγίες για τη χρήση του λογισμικού. Επίσης οδηγίες για τη χρήση δρομέων ή 'σύρσιμο' του ποντικιού ή αυτόματη κίνηση ώστε οι μαθητές να διερευνήσουν τις δυναμικές κινήσεις των δρομέων, καθώς και η καταγραφή των αποτελεσμάτων σε ένα υπολογιστικό φύλλο.

Ρόλοι μαθητών & εκπαιδευτικών

Τα διαδραστικά εργαλεία και οι δυναμικές μεταβολές βοηθούν σε πολύ μεγάλο βαθμό τους μαθητές που έχουν μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών στο μάθημα των Μαθηματικών. Με τη βοήθεια του προτεινόμενου λογισμικού, των διαδραστικών και δυναμικών εργαλείων και του ποντικιού, θα μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και θα μπορούν μόνοι τους να παρατηρήσουν και να κατανοήσουν τις έννοιες που αναφέραμε.

Απαιτήσεις εφαρμογής σεναρίου

Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών

Ως προς τα μαθηματικά:

Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν:

- Το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου
- Τον τρόπο γραφής ενός αθροίσματος (το δίνει ο διδάσκων)
$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
- Το όριο μιας ακολουθίας όταν το $n \rightarrow +\infty$
- Το κριτήριο παρεμβολής
- Τα γνωστά αθροίσματα από την θεωρία αριθμών (τα δίνει ο διδάσκων)
- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (2n+1)}{6}$
- Στοιχειώδη χειρισμό του προγράμματος Geogebra

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Στους μαθητές θα δοθούν κατάλληλα φύλλα εργασίας που θα εκπονήσει ο διδάσκων και αναλυτικές οδηγίες (προφορικά ή γραπτά) για την υλοποίηση του σεναρίου.

ΣΤΟΧΟΙ & ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση αυτής της διδασκαλίας:

1. Θα έχουν ανακαλύψει τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου
2. Θα έχουν διερευνήσει την έννοια και τη σημασία του ορισμένου ολοκληρώματος
3. Θα έχουν κατανοήσει τις ιδιότητες και τα θεωρήματα που διέπουν το ορισμένο ολοκλήρωμα

Γνώσεις

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά, να πειραματίζονται, να παρατηρούν, να ανταλλάσσουν απόψεις και να διατυπώνουν εικασίες.

Δεξιότητες

Επίσης με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων δυναμικού χειρισμού (δρομείς), θα προσεγγίσουν με την μέθοδο της εξαντλήσεως τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου και θα το συνδέσουν με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προκειμένου να προκύψουν σωστά εποπτικά συμπεράσματα.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ: ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ & ΜΑΘΗΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Κατόπιν ο διδάσκων αφιερώνει λίγο χρόνο (5-7 λεπτά) για να δώσει στους μαθητές μερικά ιστορικά στοιχεία που δυναμικά θα εφαρμόσουν και αυτοί στη συνέχεια του μαθήματος. Ο διδάσκων ρωτά:

Τι ονομάζουμε εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος (χωρίου) και πως υπολογίζεται αυτό;

Ιστορικό Σημείωμα:

Το πρόβλημα μελετήθηκε από τον Αρχιμήδη (287-212 π.χ) που υπολόγισε τέτοια εμβαδά με τη μέθοδο της εξάντλησης, που αποδίδεται στον Εύδοξο (408-355 π.χ).

Προσεγγίζουμε το χωρίο με ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο που το εμβαδόν του είναι ορισμένο. Επιλέγουμε ένα δεύτερο εγγεγραμμένο, που περιβάλλει το πρώτο και έχουμε μία καλύτερη προσέγγιση του χωρίου. Συνεχίζοντας όμοια μπορούμε να εξαντλήσουμε όλο το χωρίο και να πάρουμε ως εμβαδόν του το όριο των εμβαδών.

Ο Αρχιμήδης εφάρμοσε με επιτυχία τη γενική αυτή μέθοδο για τον κυκλικό δίσκο και για τα παραβολικά χωρία.

Δηλαδή, εγγράφουμε στον κύκλο κανονικό πολύγωνο και διχοτομώντας τα τόξα κατασκευάζουμε κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών και συνεχίζοντας κατασκευάζουμε μία ακολουθία εγγεγραμμένων πολυγώνων, με εμβαδά εν. Στη συνέχεια, στις κορυφές κάθε εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου φέρνουμε εφαπτόμενες και παίρνουμε μία ακολουθία περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, με εμβαδά Εν. Η ακολουθία εν είναι αύξουσα και φραγμένη, ενώ η ακολουθία Εν είναι φθίνουσα και φραγμένη.

Επομένως συγκλίνουν και μάλιστα αποδεικνύεται, έχουν το ίδιο όριο, που ονομάζεται εμβαδόν κυκλικού δίσκου Ε. Οπότε: $E = \lim \epsilon_n = \lim E_n$ όταν $n \rightarrow +\infty$

Ροή εφαρμογής – Πορεία διδασκαλίας

Μετά από αυτήν την εισαγωγή που ο εκπαιδευτικός έδωσε την ιστορική αναδρομή της μεθόδου υπολογισμού του εμβαδού χωρίου, οι μαθητές κατά την εκτέλεση αυτού του σεναρίου θα εμπλακούν στις παρακάτω δραστηριότητες:

Στη φάση αυτή καλούνται οι μαθητές να εργαστούν με μικροπειράματα με στόχο να εξηγήσει ο εκπαιδευτικός τον τρόπο με τον οποίο θα προσεγγιστεί ο υπολογισμός του εμβαδού ενός καμπυλόγραμμου χωρίου.

Φάσεις, Βήματα ή Δραστηριότητες

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο με όνομα «Μέθοδος Εξαντλήσεως.ggb» που βρίσκεται στο μάθημα Μαθηματικά Γ Λυκείου στο e-class. Τους δίνεται το 1ο φύλλο εργασίας.

Δραστηριότητα 1

Τίτλος δραστηριότητας

Φάση 1η : «Υπολογισμός του παραβολικού χωρίου»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1ο

με χρήση του αρχείου:

Μέθοδος Εξαντλήσεως.ggb

Εκτιμώμενη διάρκεια

Η πρώτη διδακτική ώρα του σεναρίου

Δραστηριότητα 2

Τίτλος δραστηριότητας

Φάση 2η : «Αλγεβρικός Υπολογισμός του παραβολικού χωρίου – Ορισμός Εμβαδού – Ορισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2ο

Εκτιμώμενη διάρκεια

Η δεύτερη διδακτική ώρα του σεναρίου

Δραστηριότητα 3

Τίτλος δραστηριότητας

Φάση 3η : «Ιδιότητες και θεωρήματα του Ορισμένου Ολοκληρώματος»

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3ο

με χρήση των αρχείων:

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb και

Θεωρήματα Ορισμένου Ολοκληρώματος.ggb

Εκτιμώμενη διάρκεια

Η τρίτη διδακτική ώρα του σεναρίου

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ & ΑΝΤΙΚΤΥΠΟΣ

Η αξιολόγηση των μαθητών θα γίνει σε μορφή εργασιών στο σπίτι τους.

1. Το φύλλο εργασίας 4 (Αξιολόγηση)

2. Επίσης οι μαθητές θα συνδεθούν στην ιστοσελίδα του παρακάτω συνδέσμου

<https://forms.gle/jNDg7NwEiaYcmoD8>

όπου θα απαντήσουν 5 ερωτήσεις θεωρίας.

Το σενάριο βασίζεται στο template «[Εξειδικευμένο Template για εκπαιδευτικά σενάρια Μαθηματικών \(Socio-Constructionist Learning\)](#)».