

Φύλλο εργασίας

Να ανοίξετε το αρχείο html: [types_of_triangle_area](#) . Στην οθόνη σας εμφανίζεται ένα αρχείο GeoGebra που περιέχει ένα τρίγωνο ΑΒΓ και με τον τίτλο : 7 κουμπιά (**Μήκη πλευρών, ημιπερίμετρος τ – Εμβαδόν του ΑΒΓ- Τύπος του Ήρωνα - Τριγωνομετρικός τύπος- Εμβαδόν ΑΒΓ=τρ – Εμβαδόν ΑΒΓ=(αβγ)/4R – Μια άλλη απόδειξη**) Η «εφαρμογή» αυτή σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας , μας βοηθά να «προσεγγίσουμε» με δυναμικό τρόπο την ενότητα : **Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου** του μαθήματος : **ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ** . **Επιλέξτε** το κουμπί **Μήκη πλευρών, ημιπερίμετρος τ** για να εμφανίσετε τα μήκη των πλευρών και την ημιπερίμετρο του ΑΒΓ . Με τους δρομείς α , β , γ , έχετε τη δυνατότητα να αλλάζετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου . Στη συνέχεια **επιλέξτε** το κουμπί **Εμβαδόν του ΑΒΓ** , στην οθόνη εμφανίζεται το εμβαδόν του ΑΒΓ . Στη συνέχεια **επιλέξτε** το κουμπί **Τύπος του Ήρωνα** . Στην οθόνη εμφανίζεται το εμβαδόν του ΑΒΓ με τον υπολογισμό μιας τετραγωνικής ρίζας η οποία περιέχει τα μήκη των πλευρών και την ημιπερίμετρο τ . Με τον **τύπο** αυτόν έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΑΒΓ , εφόσον γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του . Στη συνέχεια **αποεπιλέξτε** το κουμπί **Τύπος του Ήρωνα** και **επιλέξτε** το κουμπί **Τριγωνομετρικός τύπος** . Στην οθόνη μαζί με τον τύπο εμφανίζονται **δυο νέα** κουμπιά με τις ονομασίες **Βοήθεια στην απόδειξη 1** και **νόμος των ημιτόνων** αντίστοιχα , καθώς και τα **ημίτονα** των γωνιών του τριγώνου . **Επιλέξτε** το κουμπί **Βοήθεια στην απόδειξη 1** . Παρατηρήστε ότι στο τρίγωνο εμφανίζεται το ύψος **ΒΔ** . Με την βοήθεια πλέον του σχήματος και λίγες γνώσεις τριγωνομετρίας **μπορείτε να κάνετε την απόδειξη του τύπου** . Με τον **τύπο** αυτόν έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΑΒΓ , εφόσον γνωρίζουμε τα μήκη δυο πλευρών του και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία . **Επιλέγοντας** στη συνέχεια το κουμπί **νόμος των ημιτόνων** βλέπουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ο **λόγος**

$\frac{\text{πλευρά}}{\text{ημίτονο απέναντι γωνίας}}$ είναι σταθερός και ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας **R** του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου . Με τον **τύπο** αυτόν έχουμε τη δυνατότητα να **επιλύσουμε** ένα τρίγωνο όταν γνωρίζουμε α) δυο γωνίες του και μια πλευρά του , β) δυο πλευρές του και μια από τις απέναντι γωνίες των πλευρών αυτών . Ο **νόμος των ημιτόνων** προκύπτει συνδυαστικά από τον **Τριγωνομετρικό τύπο** και τον τύπο **Εμβαδόν ΑΒΓ=(αβγ)/4R** .

Στη συνέχεια **αποεπιλέξτε** το κουμπί **Τριγωνομετρικός τύπος** και **επιλέξτε** το κουμπί **Εμβαδόν ΑΒΓ=τρ** . Στην οθόνη μαζί με τον τύπο εμφανίζεται ένα **νέο** κουμπί με την ονομασία **Βοήθεια στην απόδειξη 2** , το οποίο και να **επιλέξετε** . Παρατηρήστε ότι στο τρίγωνο εμφανίζονται επιπλέον ο **εγγεγραμμένος** κύκλος και η ακτίνα του **ρ** . Με την βοήθεια πλέον του σχήματος **μπορείτε να κάνετε την απόδειξη του τύπου** . Με τον **τύπο** αυτόν έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΑΒΓ , εφόσον γνωρίζουμε την ακτίνα **ρ** του **εγγεγραμμένου κύκλου** του τριγώνου και την **ημιπερίμετρό** του **τ** . Στη συνέχεια **επιλέξτε** το κουμπί **Μια άλλη απόδειξη** , το οποίο

βρίσκεται πάνω αριστερά στην οθόνη . Στην οθόνη εμφανίζεται μια εικόνα που μας δίνει μια **άλλη άποψη** για την απόδειξη του εν λόγω τύπου.

Τέλος **αποεπιλέξτε** τα κουμπιά **Εμβαδόν $AB\Gamma = \tau r$** και **Μια άλλη απόδειξη** και **επιλέξτε** το κουμπί **Εμβαδόν $AB\Gamma = (\alpha\beta\gamma)/4R$** . Στην οθόνη εμφανίζεται ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου καθώς και ακτίνα του **R** . Με τον **τύπο** αυτόν έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του $AB\Gamma$, εφόσον γνωρίζουμε την ακτίνα **R** του **περιγεγραμμένου κύκλου** του τριγώνου και τα **μήκη** των πλευρών του.

Ερωτήματα - Εργασία

Σύμφωνα με τα παραπάνω και τον ήδη γνωστό τύπο:

$$\text{Εμβαδόν } AB\Gamma = \frac{1}{2} \text{ βάση} \cdot \text{αντίστοιχο ύψος} ,$$

α) να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα

Ερωτήματα

- 1) Να συμπληρώσετε αντίστοιχα τον **Τριγωνομετρικό τύπο** για τις γωνίες **B** και **Γ** ,
 $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \dots \dots \eta\mu B = \frac{1}{2} \dots \dots \eta\mu \Gamma .$
- 2) Ποιους τύπους γνωρίζετε για το εμβαδόν τριγώνου ;
- 3) Αν γνωρίζετε τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου , ποιον από τους τύπους θα επιλέξετε για τον υπολογισμό του εμβαδού του ;
- 4) Αν γνωρίζετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου , πως μπορείτε να υπολογίσετε τα ύψη του ;
- 5) Αν γνωρίζετε τις πλευρές β , γ και την γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$, ποιον από τους τύπους θα επιλέξετε για τον υπολογισμό του εμβαδού του ;
- 6) Οι πλευρές ενός τριγώνου $A'B'\Gamma'$ είναι διπλάσιες των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε ποια σχέση έχουν τα εμβαδά των δύο τριγώνων ; Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ είναι διπλάσια από την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$; Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ είναι διπλάσια από την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$;

β) Εργασία: να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται και από τον τύπο :
 $E = (\tau - \alpha)\rho_\alpha = (\tau - \beta)\rho_\beta = (\tau - \gamma)\rho_\gamma$, όπου ρ_α , ρ_β , ρ_γ είναι οι ακτίνες των παραγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου.