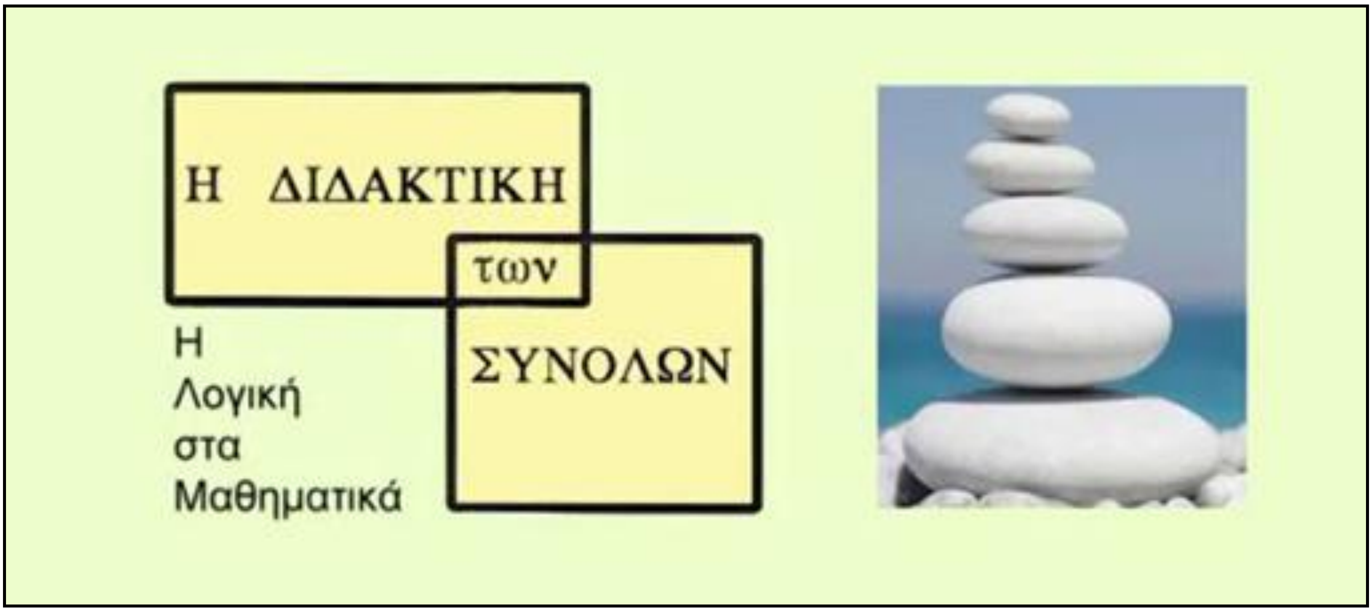
Τάσος Ανθουλιάς

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ
Η λογική στα Μαθηματικά

Βασικός σκοπός μας είναι να βοηθήσουμε τα παιδιά ηλικίας 8 ως 15 χρόνων να σκεφτούν καθαρά και λογικά. Στα Μαθηματικά –και, ακόμα περισσότερο, στη Μαθηματική λογική– η γλώσσα χρησιμοποιείται με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Τα παιδιά οδηγούνται, λοιπόν, να συνειδητοποιήσουν τον τρόπο, με τον οποίο χρησιμοποιούν τις πιο σημαντικές για τη λογική λέξεις, καθώς και στο να εκφραστούν όσο μπορούν πιο καθαρά και θετικά. Η έμφαση δίνεται πάνω στη γλώσσα που χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή.



ΧΕΛΙΔΟΝΙ 2023

Ο πιο άμεσος τρόπος για να διδάξουμε στα παιδιά πώς να βάζουν τη σκέψη τους σε τάξη και πώς να εκφράζονται καθαρά είναι να προσφέρουμε σε αυτά μερικές εμπειρίες από τη στοιχειώδη λογική. Για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης υπάρχουν ορισμένες λέξεις-κλειδιά, όπως **όλα**, **μερικά**, **κανένα**, **και**, **ή**, **δεν**, **αν**. Μια ποικιλία από εμπειρίες ομαδοποίησης και ταξινόμησης θα βοηθήσουν πολύ τα παιδιά στο να καταλάβουν την ακριβή σημασία αυτών των λέξεων και στο να μάθουν να τις χρησιμοποιούν με τον κατάλληλο τρόπο.

όλα μερικά κανένα

και ή δεν αν

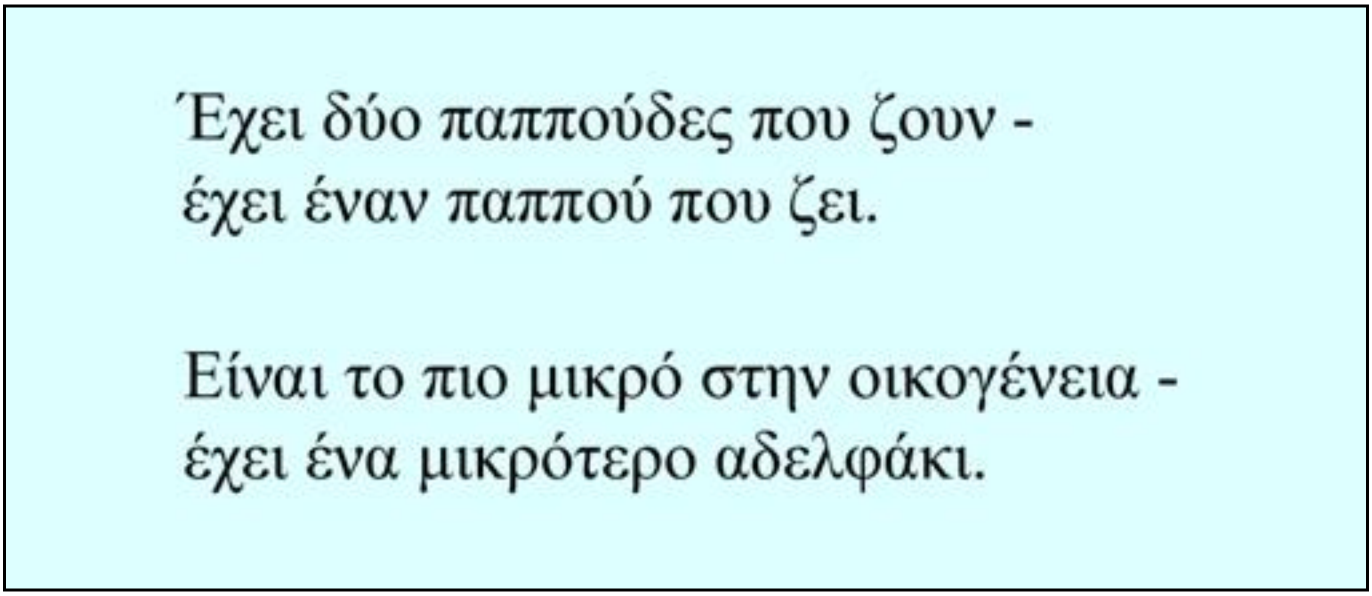
Τα ίδια τα παιδιά της τάξης μπορούν να χωριστούν με πολλούς τρόπους. Αν ο δάσκαλος ζητήσει από τα παιδιά που το πρωί **ήπιαν γάλα** να σταθούν στη μια πλευρά της αίθουσας και από τα παιδιά που **ήπιαν γάλα-κακάο** στην άλλη πλευρά, είναι πολύ πιθανό μερικά παιδιά να μείνουν **καθισμένα στη θέση τους**. Και τότε μπορεί να ερωτηθούν τα παιδιά που σηκώθηκαν γιατί μερικοί συμμαθητές τους παρέμειναν καθισμένοι.

το πρωί ήπιαν γάλα	το πρωί ήπιαν γάλα-κακάο

κάθονται
στη θέση τους

Αν τώρα ο δάσκαλος ζητήσει από τα **αγόρια** να σταθούν στη μια πλευρά και από τα **κορίτσια** στην άλλη, τότε κανένα παιδί δεν θα μείνει καθισμένο. Συζητώντας αυτές τις δύο καταστάσεις, οι διαφορές θα γίνουν καθαρές. Ένα παιδί θα είναι αγόρι ή κορίτσι: όλα τα παιδιά που δεν είναι αγόρια θα είναι κορίτσια και το αντίστροφο. Αλλά δεν είναι αλήθεια (τουλάχιστο αν το παράδειγμα είναι κατάλληλο για τη συγκεκριμένη τάξη) ότι ένα παιδί θα έχει πιει το πρωί γάλα ή γάλα-κακάο: **Μερικά** μπορεί να μην έχουν πιει ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Δύο χαρακτηριστικά, τα οποία μπορούν να χωρίζουν τα παιδιά μιας τάξης σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα που όμως (συνήθως) δεν περιλαμβάνουν όλα τα παιδιά, είναι για παράδειγμα: *Έχει δύο παππούδες που ζουν, έχει έναν παππού που ζει. Είναι το πιο μικρό στην οικογένεια, έχει ένα μικρότερο αδελφάκι*.



Από το άλλο μέρος, τα παρακάτω ζευγάρια χαρακτηριστικών διαμερίζουν όλα τα παιδιά της τάξης σε δύο ξεχωριστά σύνολα. Κάθε παιδί θα ανήκει ή στο ένα σύνολο ή στο άλλο: *Φοράει γυαλιά, δεν φοράει γυαλιά. Έχει γενέθλια αυτόν τον μήνα, δεν έχει γενέθλια αυτόν τον μήνα. Είναι μεγαλύτερο από 9 χρόνων, είναι μικρότερο από 9 χρόνων. Γράφει με το αριστερό χέρι, γράφει με το δεξί χέρι*.

Φοράει γυαλιά - δεν φοράει γυαλιά.

Έχει γενέθλια αυτόν τον μήνα -
δεν έχει γενέθλια αυτόν τον μήνα.

Είναι μεγαλύτερο από 9 χρόνων -
είναι μικρότερο από 9 χρόνων.

Γράφει με το αριστερό χέρι -
γράφει με το δεξί χέρι.

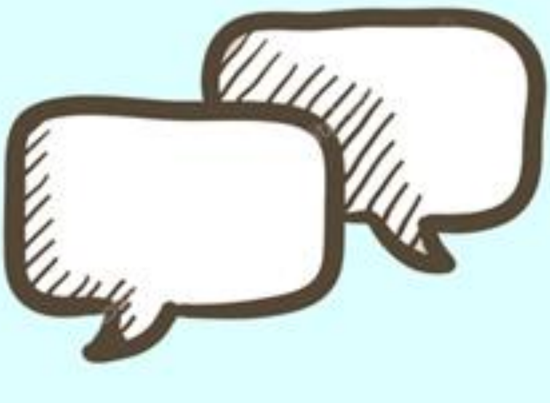
Δύο πολύ ενδιαφέροντα σημεία θα εμφανιστούν μέσα από τη συζήτηση παραδειγμάτων όπως τα παραπάνω. Πρώτο: όταν ένα από τα δύο χαρακτηριστικά είναι η άρνηση του άλλου (φοράει γυαλιά, δεν φοράει γυαλιά) τότε κάθε παιδί της τάξης θα ανήκει αναγκαστικά ή στο ένα σύνολο ή στο άλλο. Βέβαια, αυτό μπορεί να συμβεί και σε άλλες περιπτώσεις. Αλλά στην περίπτωση που αναφέρουμε, τα παιδιά θα πρέπει να καταλάβουν πως αυτό θα συμβεί υποχρεωτικά.

Φοράει γυαλιά - δεν φοράει γυαλιά.

Δεύτερο: ακόμη και τα πολύ απλά παραδείγματα που έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα θα κάνουν φανερή την ανάγκη για προσεκτικές και ακριβείς διευκρινίσεις και θα δείξουν πως μερικές φαινομενικά καθαρές διατυπώσεις μπορούν στην πραγματικότητα να ερμηνευτούν διαφορετικά από διαφορετικούς ανθρώπους. Αν ο Γιάννης έχει δύο μικρότερα αδελφάκια, με κάποια έννοια, βέβαια, έχει ένα μικρότερο αδελφάκι. Αλλά η φράση «έχει ένα μικρότερο αδελφάκι» σημαίνει «έχει τουλάχιστον ένα και ίσως και περισσότερα» ή «έχει ένα και μόνο ένα»;

Είναι το πιο μικρό στην οικογένεια - έχει ένα μικρότερο αδελφάκι.

Το πρώτο παράδειγμα που αναφέρθηκε (ήπιε το πρωί γάλα, ήπιε το πρωί γάλα-κακάο) είχε προσεκτικά διατυπωθεί, ώστε να αποφύγουμε οποιαδήποτε πιθανότητα αμφιβολίας. Αλλά, μετά από αυτό, είναι χρήσιμο ο δάσκαλος να μεταχειρίζεται εκφράσεις χωρίς να προσπαθεί να προβλέψει και να αποφύγει όλες τις πιθανές διαφορετικές ερμηνείες, αν και κάτι τέτοιο είναι, έτσι κι αλλιώς, τις πιο πολλές φορές σχεδόν αδύνατο. Η συζήτηση πάνω στις διαφορετικές ερμηνείες είναι πολύτιμη. Όταν παρουσιαστεί κάποια αμφιβολία για μια έκφραση που χρησιμοποίησε ο δάσκαλος, τα παιδιά θα αντιληφθούν πως ξεπηδά μια σειρά από ερωτήσεις: τι σημαίνει συνήθως αυτή η έκφραση; τι μπορεί να σημαίνει σ' αυτή την περίπτωση; ποια ήταν η πρόθεση του δασκάλου; (Μόνο ο ίδιος ο δάσκαλος μπορεί να απαντήσει στην τελευταία ερώτηση).



Συζήτηση και διευκρινίσεις χρειάζονται στα περισσότερα από τα παραδείγματα που έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα: Το «φοράει γυαλιά» σημαίνει «τώρα», «πάντα» ή «μερικές φορές»; Το «γράφει με το αριστερό χέρι» σημαίνει «είναι ικανό να γράψει με το αριστερό χέρι» ή «προτιμά να γράφει με το αριστερό χέρι» ή «πάντα γράφει με το αριστερό χέρι»; Όσο για το «έχει γαλανά μάτια» και «έχει καστανά μάτια» είναι πραγματικά τόσο αμφίβολα, ώστε, μετά από κάποια συζήτηση, τα παιδιά να τα θεωρήσουν εντελώς ακατάλληλα για ένα χωρισμό.

Φοράει γυαλιά

Γράφει με το αριστερό χέρι

Έχει γαλανά ή καστανά μάτια

Όλα τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα αναφέρονται σε δύο χαρακτηριστικά που το ένα αποκλείει το άλλο (ή τουλάχιστον αυτή ήταν η πρόθεσή μας). Αν τώρα ο δάσκαλος ζητήσει από τα παιδιά που φορούν κάτι κόκκινο να σταθούν στη μια πλευρά της τάξης και από τα παιδιά που φορούν κάτι άσπρο να σταθούν στην άλλη πλευρά, θα παρουσιαστεί ένα πρόβλημα. Είναι πιθανό πως θα υπάρξουν μερικά παιδιά που θα φορούν και κάτι κόκκινο και κάτι άσπρο. (Αν όχι, δοκιμάζουμε με κάποιο άλλο ζευγάρι χρωμάτων). Ο δάσκαλος μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να εξηγήσουν γιατί μια παρόμοια δυσκολία δεν είχε εμφανιστεί νωρίτερα και να προτείνουν διάφορους τρόπους για να παραστήσουν τη νέα αυτή κατάσταση. Για παράδειγμα, μπορεί να προταθεί να σταθούν τα παιδιά που φορούν κάτι κι από τα δύο χρώματα ανάμεσα στα παιδιά που φορούν κάτι κόκκινο και σ' αυτά που φορούν κάτι άσπρο.

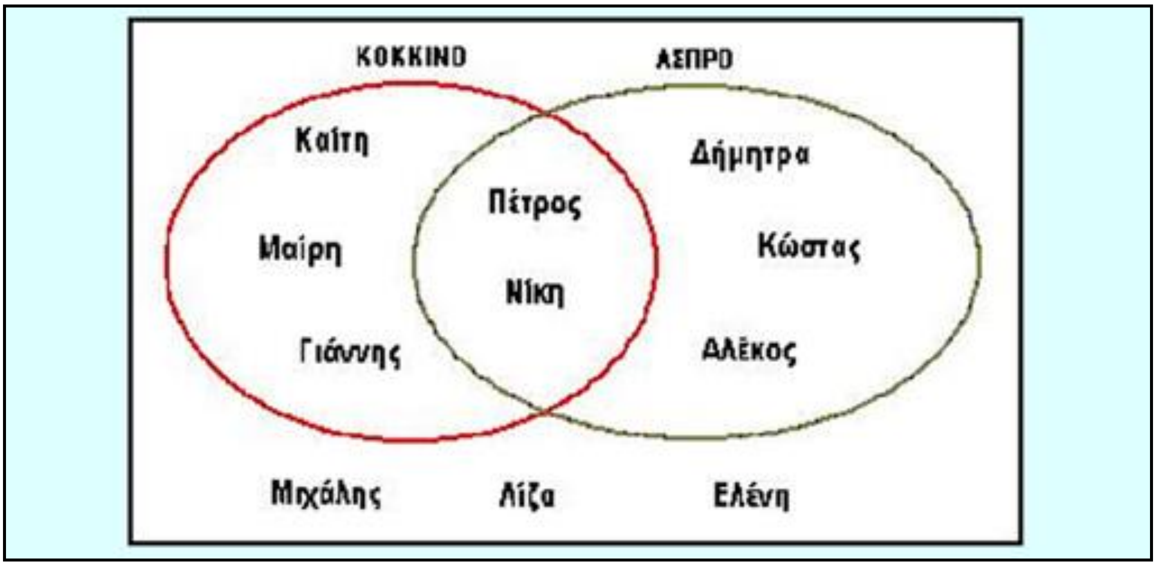
φορούν κάτι άσπρο

φορούν κάτι κόκκινο

φορούν κάτι άσπρο και κάτι κόκκινο

Αν τώρα δώσουμε στα παιδιά δύο μεγάλα κορδόνια (στην περίπτωση αυτή το ένα μπορεί να είναι κόκκινο και το άλλο άσπρο) θα μπορέσουν να ανακαλύψουν (με μια μικρή βοήθεια από τον δάσκαλο αν το κρίνει αναγκαίο) πώς να τοποθετηθούν μέσα σ' αυτά, έτσι ώστε τα παιδιά που φορούν κάτι άσπρο να είναι μέσα στο άσπρο κορδόνι, εκείνα που φορούν κάτι κόκκινο μέσα στο κόκκινο κορδόνι κι εκείνα που φορούν κάτι κι από τα δύο χρώματα μέσα και στα δύο κορδόνια. Φυσικά, αυτό αποτελεί τη βασική αρχή του διαγράμματος του Venn. Αλλά είναι πιο εύκολο για τα παιδιά να τοποθετηθούν κατάλληλα μέσα στα κορδόνια, παρά να κάνουν ένα σχέδιο με κιμωλία στο πάτωμα, πράγμα που μπορεί να γίνει κατόπιν. Τέλος, μια γραφική παράσταση της κατάστασης μπορεί να σχεδιαστεί στον πίνακα, δίνοντας ένα αληθινό Βένιο διάγραμμα, στο οποίο τα παιδιά παριστάνονται με τα ονόματά τους:

Κάθε παιδί θα πρέπει να μπορεί να πει γιατί πήγε στη θέση που είναι τώρα. Για παράδειγμα, ο Γιάννης βρίσκεται εκεί γιατί φοράει κάτι κόκκινο αλλά δεν φοράει κάτι άσπρο. Επίσης, μπορούμε να ρωτήσουμε τα παιδιά γιατί ακόμα κάθονται ορισμένα από αυτά (των οποίων τα ονόματα δεν έχουν μέχρι τώρα εμφανιστεί στο διάγραμμα). Φυσικά, θα είναι εκείνα που δεν φορούν ούτε κάτι κόκκινο ούτε κάτι άσπρο. Θα μπορούσαν να σταθούν κοντά στα άλλα παιδιά αλλά έξω από τα κορδόνια κι έτσι θα φανεί καθαρά σε ποια θέση του διαγράμματος πρέπει να γραφούν τα ονόματά τους.



Το έντονο ορθογώνιο μπορεί να θεωρηθεί σαν το περίγραμμα όλου του διαγράμματος, που περικλείνει το συζητούμενο σύνολο. Και μέχρι τώρα το σύνολο αυτό ήταν πάντα «τα παιδιά της τάξης». Μερικά ζευγάρια χαρακτηριστικών που συνήθως έχουν τα ίδια αποτελέσματα με το τελευταίο παράδειγμα μπορούν να είναι: *Έχει έναν αδελφό, έχει μια αδελφή. Έχει επίθετο που αρχίζει από φωνήεν, έχει μικρό όνομα που αρχίζει από φωνήεν. Ξέρει να κολυμπά, ξέρει να χορεύει. Του αρέσει το τσάι, του αρέσει το κακάο*. Όπως συνήθως, θα παρουσιαστούν αμφιβολίες που χρειάζονται συζήτηση.

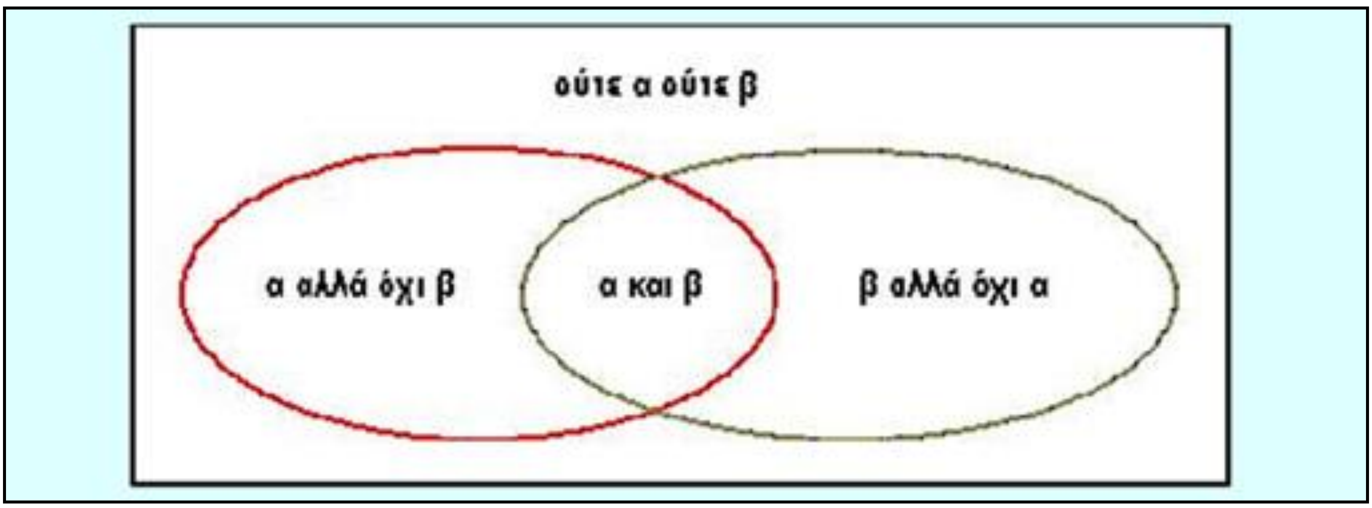
Έχει έναν αδελφό - έχει μια αδελφή.

Έχει επίθετο που αρχίζει από φωνήεν - έχει μικρό όνομα που αρχίζει από φωνήεν.

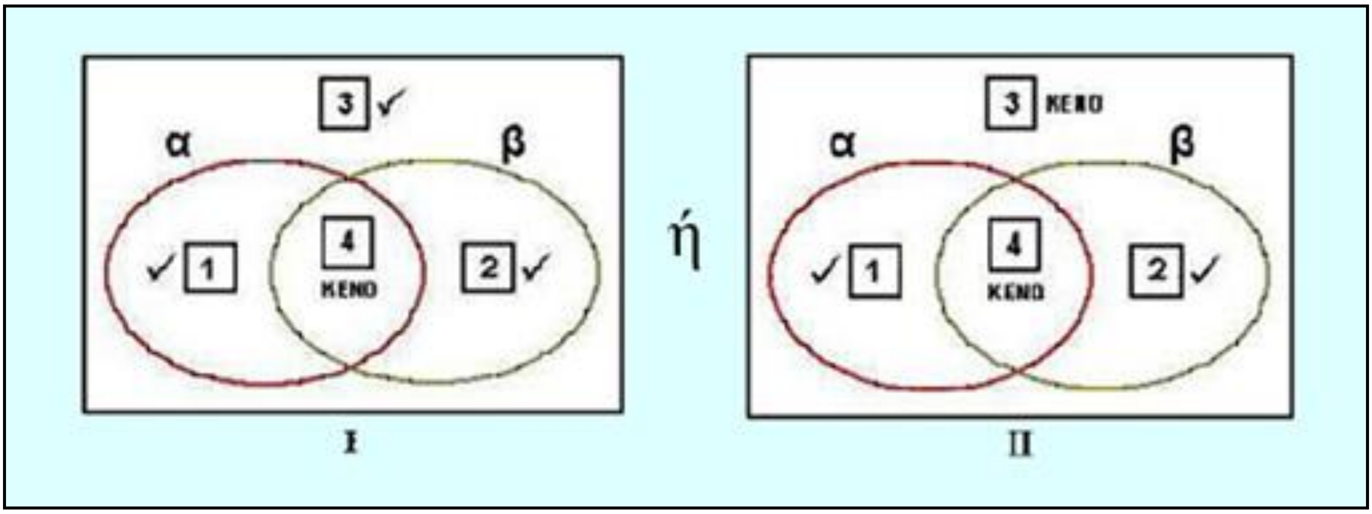
Ξέρει να κολυμπά - ξέρει να χορεύει.

Του αρέσει το τσάι - του αρέσει το κακάο.

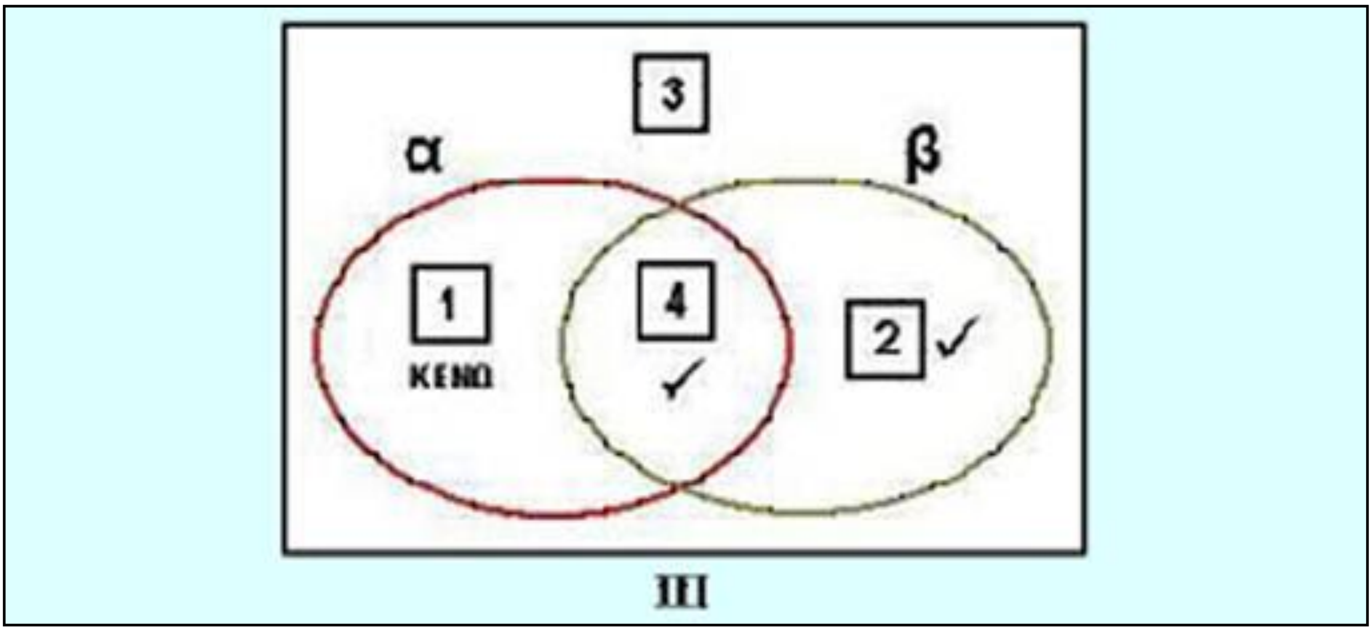
Αντί να κρατούν κορδόνια, μπορούμε τώρα να ζητήσουμε από τα παιδιά να σταθούν στην κατάλληλη θέση σ’ ένα διάγραμμα που έχει γίνει από κορδόνια τοποθετημένα στο πάτωμα ή να γράψουν τα ονόματά τους στην κατάλληλη θέση σ’ ένα διάγραμμα σχεδιασμένο στον πίνακα ή σ’ ένα φύλλο χαρτιού. Τα παιδιά σύντομα θα δουν πως με δύο χαρακτηριστικά **α** και **β** (για παράδειγμα **α**: του αρέσει το τσάι, **β**: του αρέσει το κακάο) η τάξη συνήθως διαμερίζεται όχι σε 2 αλλά σε 4 σύνολα που αντιστοιχούν στα: *1. α αλλά όχι β (του αρέσει το τσάι, αλλά δεν του αρέσει το κακάο). 2. β αλλά όχι α (του αρέσει το κακάο, αλλά δεν του αρέσει το τσάι). 3. α και β (του αρέσει το τσάι και του αρέσει το κακάο). 4. ούτε α ούτε β (δεν του αρέσει το τσάι, δεν του αρέσει το κακάο)*.



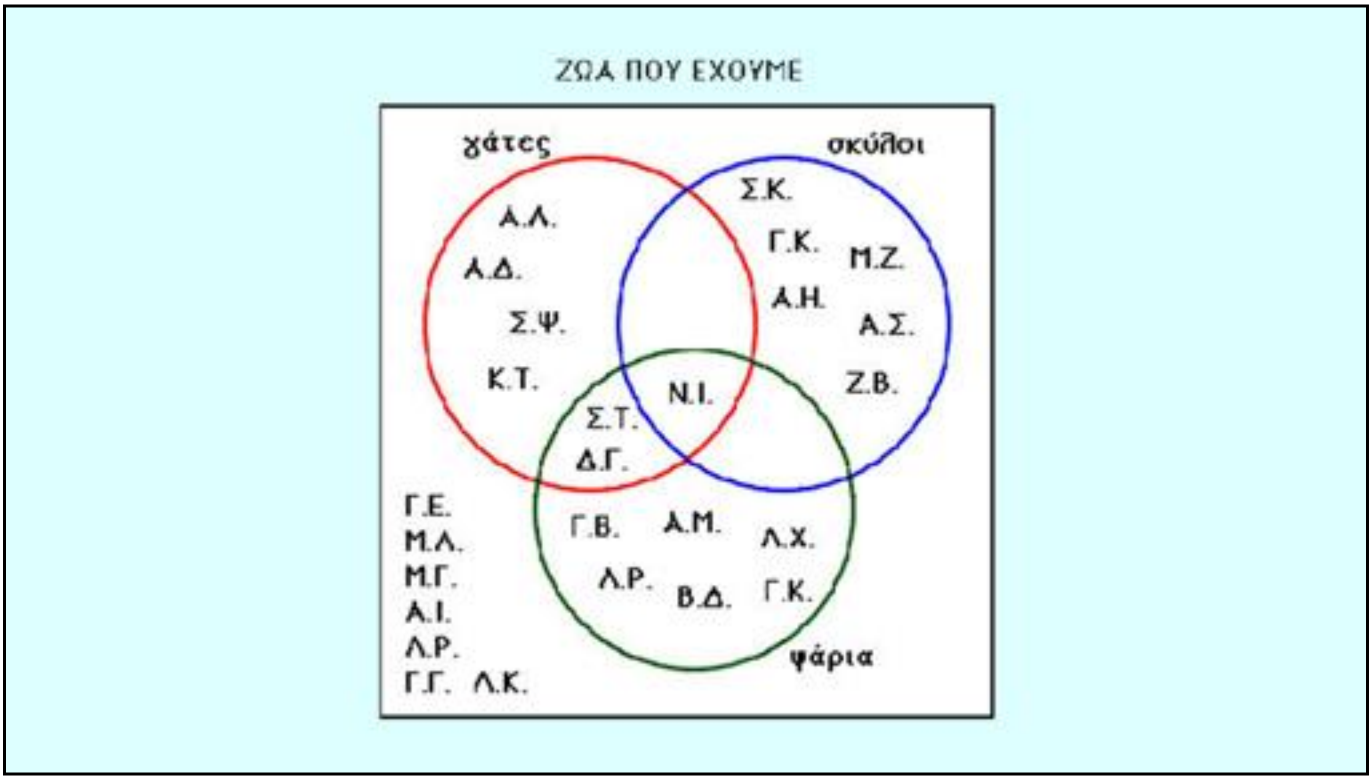
Η περίπτωση I εμφανίζεται όταν δεν υπάρχει κανένα παιδί που να του αρέσει και το τσάι και το κακάο. Η περίπτωση II εμφανίζεται όταν όλα τα παιδιά είναι ή α ή β (έτσι το σύνολο 3 είναι κενό) και κανένα παιδί δεν είναι και α και β (έτσι το σύνολο 4 είναι κενό). Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται καθαρά όταν α: είναι αγόρι και β: είναι κορίτσι.



Αν αυτή η περίπτωση δεν έχει κιόλας εμφανιστεί, ο δάσκαλος, γνωρίζοντας την τάξη, μπορεί εύκολα να βρει κατάλληλα παραδείγματα. Ας πούμε, αν μερικά από τα κορίτσια (αλλά όχι όλα) φορούν φούστα και δώσουμε το ζευγάρι των χαρακτηριστικών **α**: φοράει φούστα, **β**: είναι κορίτσι. Στην τελευταία περίπτωση μπορούμε να ζητήσουμε από τα παιδιά να εξηγήσουν γιατί το σύνολο 1 είναι κενό. Θα πρέπει να περιμένουμε μερικές μπερδεμένες, άσχετες και λαθεμένες απαντήσεις πριν ακουστεί η απλή απάντηση πως «όλα τα παιδιά που φορούν φούστα είναι κορίτσια». Αυτή την ώρα μπορεί να εμφανιστεί και το ερώτημα για την αλήθεια της αντίστροφης πρότασης. Αν «όλα τα παιδιά που φορούν φούστα είναι κορίτσια», είναι αλήθεια πως «όλα τα κορίτσια φορούν φούστα»; Βέβαια, αυτό δεν είναι αναγκαστικά αληθινό και η αναγνώριση της διαφοράς ανάμεσα στις δύο προτάσεις αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στάδια στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αν «όλα τα παιδιά που φορούν φούστα είναι κορίτσια», μπορούμε να υποστηρίξουμε μόνο πως «μερικά από τα κορίτσια φορούν φούστα».

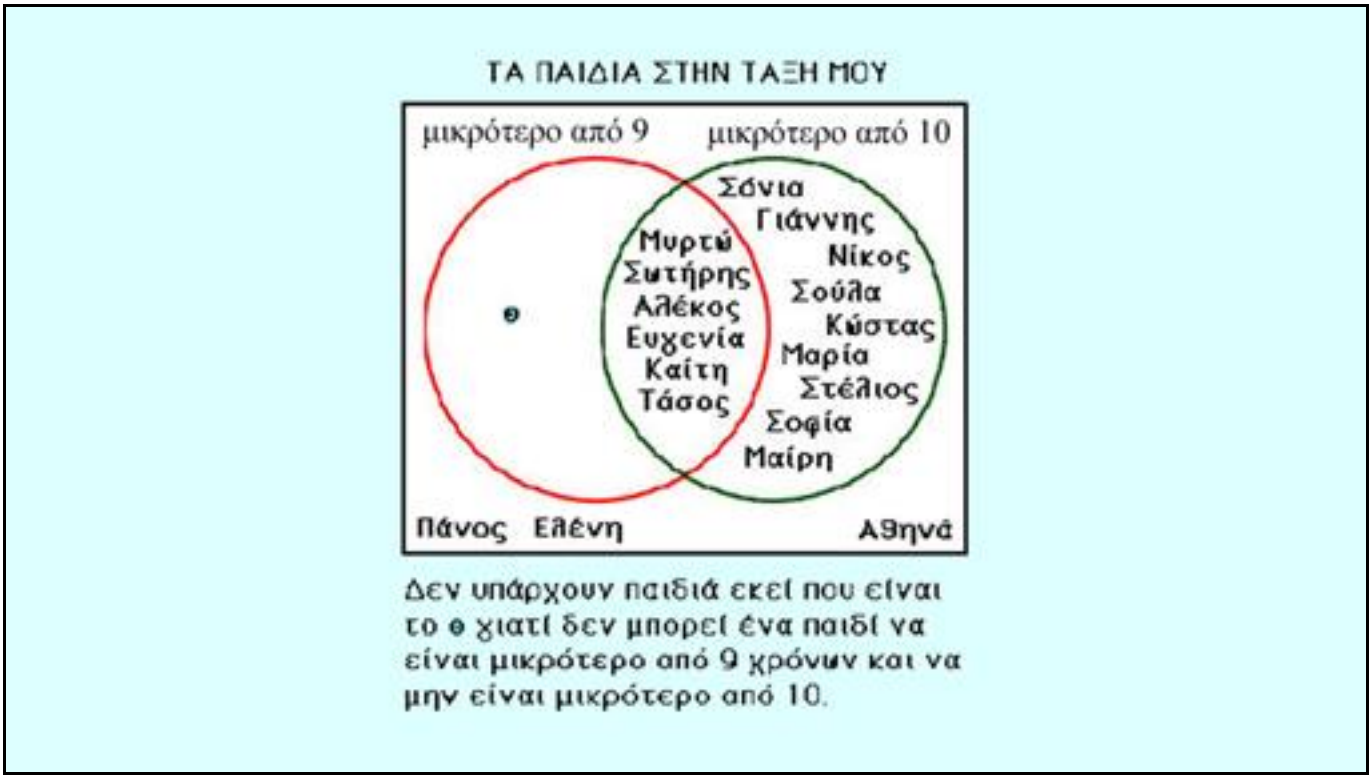


Και τώρα διάφορα παραδείγματα. Ζώα που έχουν τα παιδιά στο σπίτι τους.

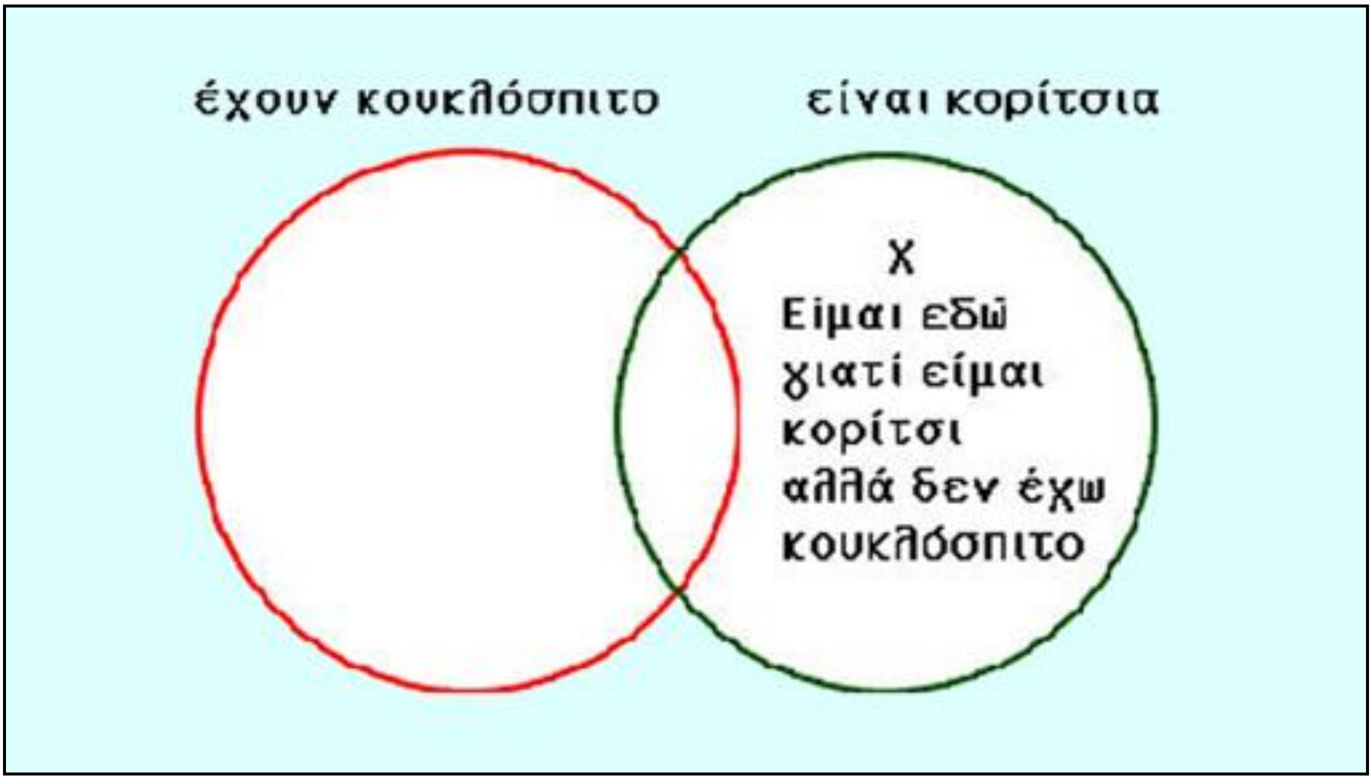


Τα παιδιά στην τάξη. Αδέλφια.

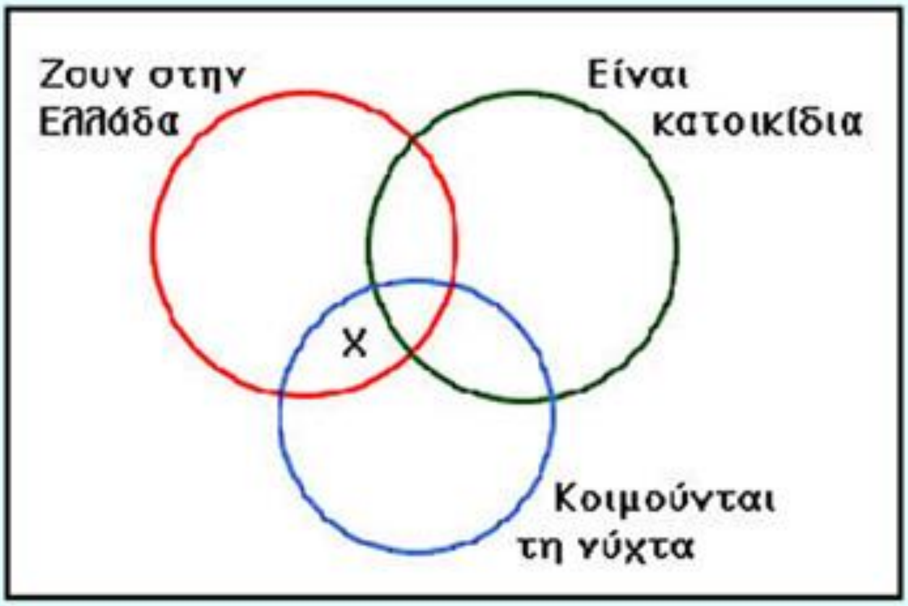
Δεν υπάρχουν παιδιά εκεί που είναι αυτό το σήμα γιατί δεν μπορεί ένα παιδί να είναι μικρότερο από 9 χρόνων και να μην είναι μικρότερο από 10 χρόνων.



Ένα κορίτσι που δεν έχει κουκλόσπιτο θα είναι εκεί που δείχνει.

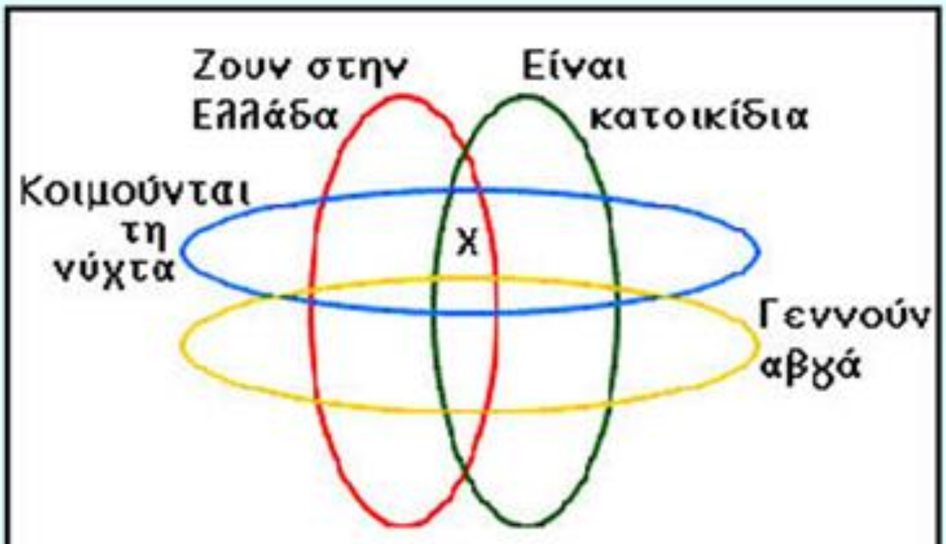


Για τα προηγούμενα παραδείγματα τα παιδιά χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν δύο κορδόνια. Ανάλογη εργασία μπορεί να γίνει και με τρία κορδόνια. Αλλά, καθώς ο αριθμός των χαρακτηριστικών αυξάνει, νέες μέθοδοι ταξινόμησης χρειάζονται. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως έχουμε ένα σύνολο ζώων: {αγελάδα, σκύλος, τίγρη, νυφίτσα, κότα, νυχτερίδα, αετός, κροκόδειλος, ασβός}. Αυτό το σύνολο μπορεί να διαμεριστεί με πολλούς τρόπους. Π.χ. εκείνα που ζουν στην Ελλάδα, είναι κατοικίδια και κοιμούνται τη νύχτα. Στην εικόνα, το Χ δηλώνει ένα ζώο που ζει στην Ελλάδα και κοιμάται τη νύχτα, αλλά δεν είναι κατοικίδιο (π.χ. αετός).



I

Σε αυτή την εικόνα προστίθεται και άλλο χαρακτηριστικό: γεννούν αυγά. Εδώ το Χ δηλώνει ένα ζώο που ζει στην Ελλάδα, είναι κατοικίδιο, κοιμάται τη νύχτα, αλλά δεν γεννά αβγά (π.χ. σκύλος).



II

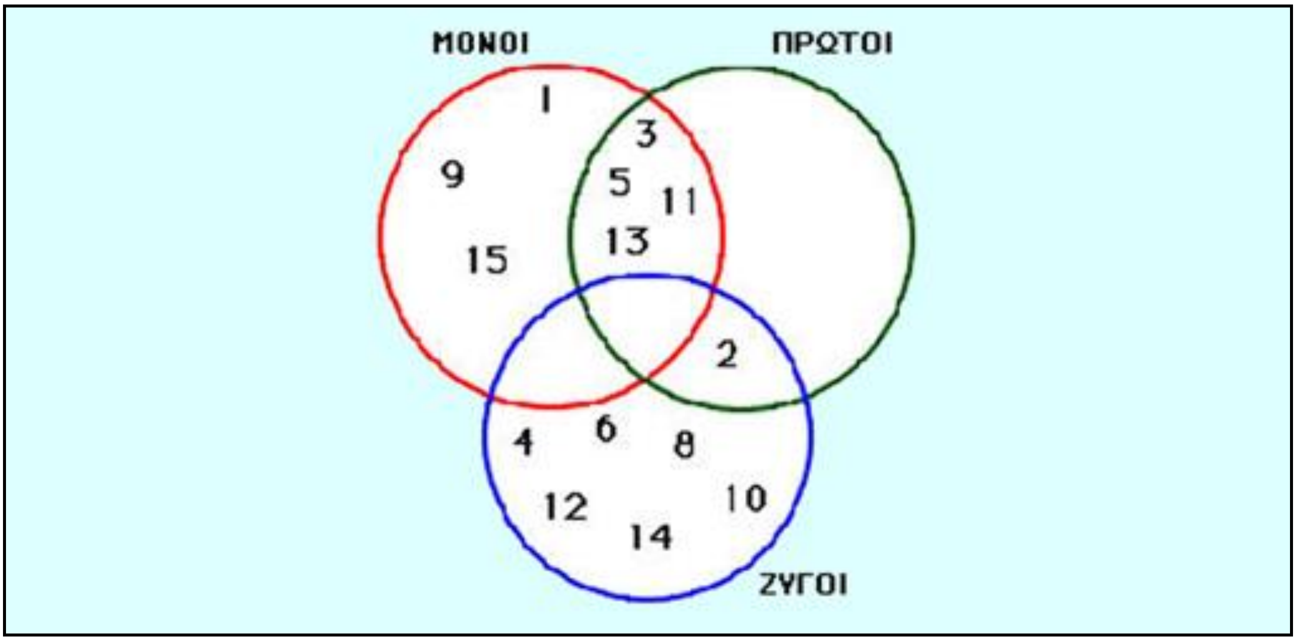
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, πολύ ικανοποιητικά, αυτή τη μέθοδο για να ξεχωρίσουμε τα υποσύνολα των ζώων με κοινά χαρακτηριστικά, ιδιαίτερα όταν αυτά τα χαρακτηριστικά είναι πολυάριθμα: Από τον πίνακα γίνεται φανερό, για παράδειγμα, πως, μέσα στο δοσμένο σύνολο των ζώων, το υποσύνολο εκείνων που γεννούν αβγά, κοιμούνται τη νύχτα και δεν είναι κατοικίδια έχει δύο στοιχεία, τον αετό και τον κροκόδειλο.

	Ζει στην Ελλάδα	Είναι κατοικίδιο	Κοιμάται τη νύχτα	Γεννά αβγά	Έχει φτερά
αγελάδα	X	X	X		
σκύλος	X	X	X		
τίγρη			X		
νυφίτσα	X		X		
κότα	X	X	X	X	X
νυχτερίδα	X				X
αετός	X		X	X	X
κροκόδειλος			X	X	
ασβός	X				

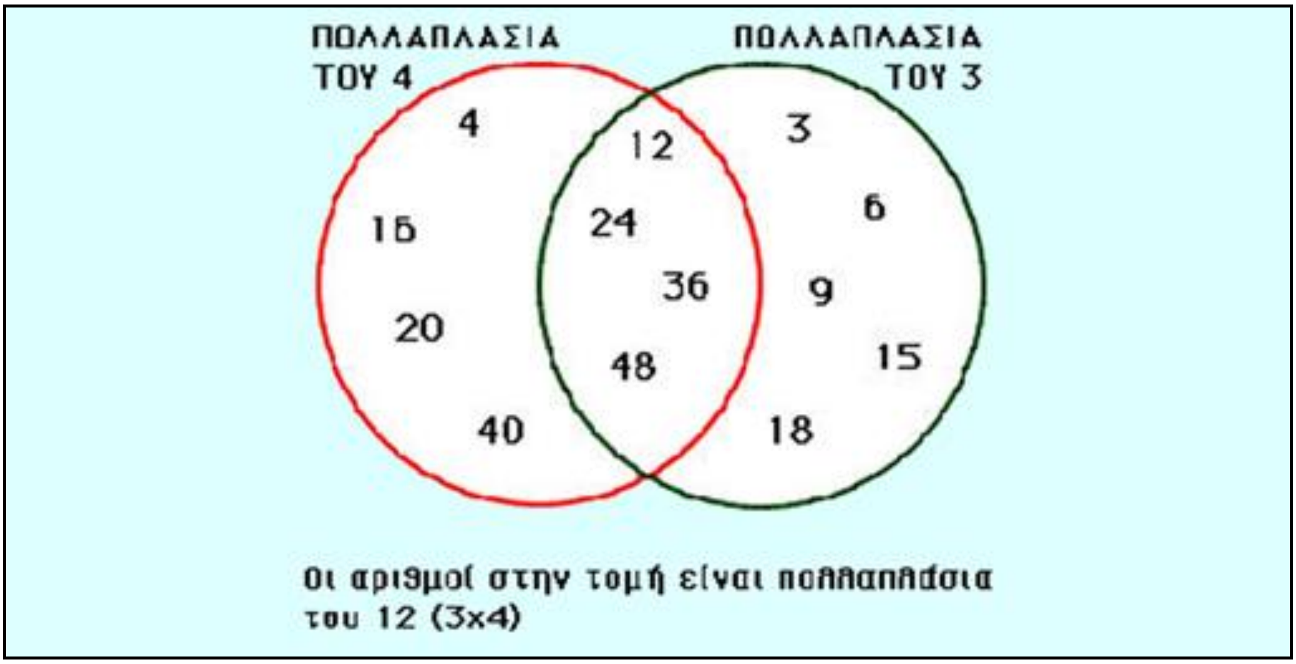
Ένας άλλος τρόπος για να ξεχωρίσουμε υποσύνολα με κοινά χαρακτηριστικά είναι με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού. Αν ένα φύλλο από διαφανές χαρτί τοποθετηθεί πάνω σε έναν πίνακα με τα ονόματα (ή τις εικόνες) των στοιχείων του συνόλου, μπορεί να μπουν σημάδια πάνω στο διαφανές χαρτί που να υποδηλώνουν ειδικά χαρακτηριστικά χωρίς να καταστραφεί ο πίνακας. Στο προηγούμενο παράδειγμα, τα εννιά ζώα θα μπορούσαν να παρασταθούν σε έναν τετράγωνο πίνακα (3x3). Κι αν βάλουμε π.χ. ένα X πάνω στο διαφανές χαρτί για να δείξουμε ποια ζώα έχουν φτερά και έναν κύκλο για να δείξουμε ποια κοιμούνται τη μέρα, θα φανεί καθαρά πως η νυχτερίδα (και μόνο η νυχτερίδα μεταξύ των ζώων του δοσμένου συνόλου) έχει φτερά και κοιμάται τη μέρα.

αγελάδα	σκύλος	τίγρη
X κότα	X O νυχτερίδα	νυφίτσα
X αετός	κροκόδειλος	ασβός

Έχει μεγάλο μαθηματικό ενδιαφέρον να ασχοληθούμε με τον διαμερισμό των φυσικών αριθμών. Ανάμεσα στους παράγοντες (ή διαιρέτες) ενός φυσικού αριθμού συνηθίζουμε να περιλαμβάνουμε το 1 και τον ίδιο τον αριθμό. Έτσι 1, 2, 5, 10 είναι οι παράγοντες του 10. Ένας αριθμός διαιρείται από έναν άλλο αν ο δεύτερος αριθμός είναι παράγοντας του πρώτου. Αν ένας αριθμός διαιρείται από έναν άλλο ονομάζεται πολλαπλάσιο του δεύτερου (κι έτσι ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του εαυτού του). Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού σχηματίζονται αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον αριθμό με τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, πολλαπλάσια του 20 είναι οι αριθμοί 20, 40, 60, 80, 100, 1000. Δεν υπάρχει κανένα όριο στο πλήθος των πολλαπλασίων ενός αριθμού, αλλά το πλήθος των παραγόντων του είναι περιορισμένο. Οι πρώτοι αριθμοί έχουν μόνο δύο παράγοντες: τον εαυτό τους και το 1.



Αυτός είναι ένας διαμερισμός με τους αριθμούς 1 ως 50. Οι αριθμοί που διαιρούνται και από το 3 και από το 4 είναι εκείνοι που διαιρούνται από το 12 που είναι ίσο με 3 επί 4.



Αυτός είναι ένας διαμερισμός με τους αριθμούς 1 ως 100. Οι αριθμοί που διαιρούνται και από το 6 και από το 8 είναι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 24 γιατί και το 6 και το 8 είναι πολλαπλάσια του 2.

Το διαζευκτικό «ή». Χρειάζεται μια προσεκτική αντιμετώπιση της λέξης «ή», γιατί χρησιμοποιείται με δύο έννοιες, την έννοια του αποκλείεται και την έννοια του περιέχεται: Αν χρησιμοποιηθεί με την έννοια του αποκλείεται, τότε «α ή β» σημαίνει «ένα και μόνο ένα από τα α, β». Αν χρησιμοποιηθεί με την έννοια του περιέχεται, τότε «α ή β» σημαίνει «τουλάχιστον ένα από τα α, β και ίσως και τα δύο». Στην καθημερινή ομιλία παρουσιάζονται και οι δύο έννοιες, αν και η έννοια του αποκλείεται είναι πιο συνηθισμένη.

ή

Αν χρησιμοποιηθεί με την έννοια του αποκλείεται τότε «α ή β» σημαίνει «ένα και μόνο ένα από τα α, β».

Αν χρησιμοποιηθεί με την έννοια του περιέχεται τότε «α ή β» σημαίνει «τουλάχιστον ένα από τα α, β και ίσως και τα δύο».

Οι παρακάτω προτάσεις δείχνουν τις δύο χρήσεις του «ή» και τα παιδιά θα μπορούσαν να συζητήσουν αυτά τα παραδείγματα ή άλλα παρόμοια. Είναι φανερό πως η λέξη «ή» χρησιμοποιείται με την έννοια του αποκλείεται σίγουρα στην πρώτη και μάλλον στη δεύτερη πρόταση. Αυτός που λέει την τρίτη πρόταση είναι πιθανό να σκέφτεται το «ή» με την έννοια του αποκλείεται, αλλά αν το καλοσκεφτεί θα δεχτεί την έννοια του περιέχεται. Στην τέταρτη πρόταση το «ή» μπορεί να χρησιμοποιείται είτε με την έννοια του αποκλείεται είτε με την έννοια του περιέχεται ανάλογα με τα συμφραζόμενα. Στην πέμπτη δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, αφού ένα κομμάτι δεν μπορεί να είναι και τετράγωνο και τριγωνικό. Στην καθημερινή ομιλία οι αμφιβολίες αίρονται με τη γνώση των συμφραζομένων ή με τον τόνο της φωνής ή με την προσθήκη άλλων λέξεων. Στην πρόταση 2 μπορεί να μην ενδιέφερε καθόλου η έννοια του «ή», αλλά αν ήταν σημαντικό να έχει την έννοια του περιέχεται θα μπορούσε να προστεθεί η φράση «ή και με τα δύο». Κι αν ήταν σημαντικό να έχει την έννοια του αποκλείεται, η πληροφορία θα μπορούσε να δοθεί με κάποια πρόταση, όπως: «Μπορείς να πας μόνο με το τρένο ή μόνο με το λεωφορείο, αλλά δεν μπορείς να συνδυάσεις ένα ταξίδι με τρένο και λεωφορείο». Τα συμφραζόμενα θα μπορούσαν να διώξουν τις αμφιβολίες για τη σημασία της τέταρτης πρότασης. Αλλιώς θα λέγαμε: «Μπορείς ή να κολυμπήσεις ή να παίξεις ποδόσφαιρο, αλλά όχι και τα δύο» ή «Μπορείς να κολυμπήσεις και να παίξεις ποδόσφαιρο» (η τελευταία φράση σημαίνει πως μπορείς να κάνεις είτε και τα δύο είτε μόνο το ένα).

ή

1. **Δεν έχω αποφασίσει αν θα μείνω στο σπίτι ή θα βγω έξω το απόγευμα.**
2. **Μπορείς να πας εκεί με το τρένο ή με το λεωφορείο.**
3. **Δεν μπορώ να δουλέψω όταν είμαι κουρασμένος ή άρρωστος.**
4. **Μπορείς να κολυμπήσεις ή να παίξεις ποδόσφαιρο.**
5. **Δώσε μου ένα τετράγωνο ή τριγωνικό κομμάτι.**

Τέλος, το «ή» μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με ερωτήσεις. Η ερώτηση «Θέλεις τσάι ή καφέ;» περιμένει συνήθως για απάντηση «τσάι», «καφέ» ή ίσως «και τα δύο». Αλλά μπορεί επίσης να περιμένει σαν απάντηση ένα «ναι» ή ένα «όχι». Είναι μια πολύ χρήσιμη άσκηση για τα παιδιά να φτιάχνουν δικές τους προτάσεις που να περιέχουν τη λέξη «ή», να βλέπουν πώς οι άλλοι τις αντιλαμβάνονται και να τις διορθώνουν αν υπάρχει κάποια αμφιβολία. Σε αυτό το στάδιο, είναι προτιμότερο για τα παιδιά να αποσαφηνίζουν το νόημα που θέλουν να δώσουν, με την προσθήκη φράσεων όπως «ή και τα δύο», «αλλά όχι και τα δύο», παρά να υιοθετήσουν μια πάγια έννοια της λέξης «ή». (Μολονότι, σε ένα κατοπινό στάδιο, στα Μαθηματικά, θα μάθουν να δίνουν πάντα στο «ή» την έννοια του περιέχεται).

ή

Ερώτηση: «Θέλεις τσάι ή καφέ;»

Απάντηση: «τσάι», «καφέ» ή ίσως «και τα δύο»

Αλλά μπορεί επίσης να περιμένει σαν απάντηση ένα «ναι» ή ένα «όχι».

Λογικός συλλογισμός είναι μια λογική διαδικασία με την οποία, ξεκινώντας από μία ή περισσότερες αρχικές προτάσεις (που ονομάζονται «υποθέσεις»), οδηγούμαστε σε ένα ή περισσότερα συμπεράσματα. Η ορθότητα του συλλογισμού είναι εντελώς ανεξάρτητη από το αν οι υποθέσεις είναι στην πραγματικότητα σωστές ή όχι. Αν είναι σωστές, ο συλλογισμός οδηγεί φυσικά σε ένα σωστό συμπέρασμα. Συνήθως, βέβαια, ξεκινούμε από υποθέσεις που τουλάχιστο πιστεύουμε πως είναι σωστές. Αρκετά συχνά, όμως, αρχίζουμε και με υποθέσεις που δεν ξέρουμε αν είναι σωστές και διερευνούμε τις συνέπειες της πιθανής ορθότητάς τους. Φυσικά, τα παιδιά πολύ αργότερα θα προσεγγίσουν αυτή τη γενική θεώρηση. Σε αυτό το στάδιο ενδιαφερόμαστε μόνο να βοηθήσουμε στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης των παιδιών. Αλλά οι δάσκαλοι θα πρέπει πάντα να θυμούνται αυτή τη διάκριση ανάμεσα στην ορθότητα του συλλογισμού και στην αλήθεια των συμπερασμάτων.

Λογικοί συλλογισμοι

Ένα κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων που παρουσιάζονται παρακάτω είναι πως οι συλλογισμοί στηρίζονται σε πληροφορίες που δίνονται στο παιδί και όχι σε πραγματικά δεδομένα που τα έχει ανακαλύψει μόνο του. Αυτό, όμως, αποτελεί ένα βασικό στάδιο στην καλλιέργεια της σκέψης του παιδιού. Στα προβλήματα που ακολουθούν, όπως και σε όλη τη μέχρι τώρα εργασία, παρατηρούμε πως οι λέξεις και, ή, δεν, μερικά, όλα, κανένα έχουν πρωταρχική σημασία και μερικές φορές απαιτούν ιδιαίτερη συζήτηση.

και, ή, δεν

μερικά, όλα, κανένα

Ο Μιχάλης λέει πως τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 23 ή στις 24 Ιουλίου. Η Καίτη λέει πως τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 22 ή στις 23 Ιουλίου. Πότε είναι τα γενέθλια του Τάκη αν έχουν και οι δύο δίκιο; Πότε είναι αν ο Μιχάλης έχει δίκιο και η Καίτη κάνει λάθος; Τι μπορείς να πεις αν και οι δυο τους κάνουν λάθος; Τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 23 Ιουλίου αν έχουν και οι δύο δίκιο. Είναι στις 24 αν ο Μιχάλης έχει δίκιο και η Καίτη κάνει λάθος. Αν και οι δυο τους κάνουν λάθος, το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι πως ο Τάκης δεν έχει γενέθλια ούτε στις 22, ούτε στις 23, ούτε στις 24 Ιουλίου.

Ο Μιχάλης λέει πως τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 23 ή στις 24 Ιουλίου.
Η Καίτη λέει πως τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 22 ή στις 23 Ιουλίου.

Πότε είναι τα γενέθλια του Τάκη αν έχουν και οι δύο δίκιο;
Πότε είναι αν ο Μιχάλης έχει δίκιο και η Καίτη κάνει λάθος;
Τι μπορείς να πεις αν και οι δυο τους κάνουν λάθος;

Η Μαίρη λέει πως τα Χριστούγεννα πριν δύο χρόνια έπεφταν Δευτέρα ή Τρίτη. Ο Νίκος λέει πως έπεφταν Τρίτη ή Πέμπτη. Η Κική λέει πως δεν έπεφταν Τρίτη. Αν η Κική κάνει λάθος, τα Χριστούγεννα πριν δύο χρόνια έπεφταν Τρίτη. Αν η Μαίρη και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο έπεφταν Δευτέρα. Αν ο Νίκος και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο έπεφταν Πέμπτη. Δεν θα μπορούσαν να έχουν και οι τρεις τους δίκιο. Δεν θα μπορούσαν να κάνουν και οι τρεις τους λάθος, γιατί αν η Κική κάνει λάθος τότε η Μαίρη και ο Νίκος έχουν και οι δυο τους δίκιο.

Η Μαίρη λέει πως τα Χριστούγεννα πριν δύο χρόνια έπεφταν Δευτέρα ή Τρίτη.
Ο Νίκος λέει πως έπεφταν Τρίτη ή Πέμπτη.
Η Κική λέει πως δεν έπεφταν Τρίτη.

Πότε έπεφταν αν η Κική κάνει λάθος;
Πότε έπεφταν αν η Μαίρη και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο;
Πότε έπεφταν αν ο Νίκος και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο;
Θα μπορούσαν να έχουν και οι τρεις τους δίκιο;
Θα μπορούσαν να κάνουν και οι τρεις τους λάθος;

Η λύση των προηγούμενων προβλημάτων δεν απαιτεί καμιά ιδιαίτερη γνώση πέρα από τον λογικό συλλογισμό. Το επόμενο όμως πρόβλημα, αν και είναι βασικά πρόβλημα λογικής, για να λυθεί απαιτεί την εφαρμογή της μεταβατικής ιδιότητας στη σχέση «μεγαλύτερο από». Η ιδιότητα αυτή λέει πως αν «α μεγαλύτερο από β» και «β μεγαλύτερο από γ» τότε «α μεγαλύτερο από γ». Έτσι, ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος από τον Γιώργο. Δεν μπορούμε να πούμε ποιος είναι μεγαλύτερος ανάμεσα στον Γιώργο και στον Αλέκο. Ο Γιάννης είναι μεγαλύτερος από τον Γιώργο. Δεν μπορούμε να πούμε ποιος είναι μεγαλύτερος ανάμεσα στον Πέτρο και στον Γιάννη.

Ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος από τον Νίκο.
Ο Νίκος είναι μεγαλύτερος από τον Γιώργο και τον Αλέκο και μικρότερος από τον Γιάννη.

Μπορείς να πεις ποιο αγόρι είναι το μεγαλύτερο σε καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια;
Πέτρος - Αλέκος, Γιώργος - Αλέκος, Γιώργος - Γιάννης.

Μπορείς να βρεις ένα άλλο ζευγάρι, στο οποίο να μην μπορείς να πεις ποιο αγόρι είναι μεγαλύτερο;

Προβλήματα όπως αυτό και το επόμενο μπορούν να παρουσιαστούν σαν παιχνίδια για μια ομάδα παιδιών ή και για ολόκληρη την τάξη. Στο πρώτο πρόβλημα η λύση είναι ο αριθμός 9.

Ο Γιάννης σκέφτεται έναν αριθμό και λέει πως είναι μεγαλύτερος από το 3, είναι μονός αριθμός και είναι παράγοντας του 36.

Μπορείς να βρεις ποιος αριθμός είναι;

Οι παράγοντες του 36 (δηλαδή οι αριθμοί με τους οποίους διαιρείται) είναι 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Ο μοναδικός μονός αριθμός μεγαλύτερος από το 3 είναι το 9.

Το γράμμα που ο Πέτρος σκέφτηκε είναι το «ν». Μπορεί να καθοριστεί και χωρίς την πληροφορία πως δεν βρίσκεται στη λέξη «αέρας».

Ο Πέτρος σκέφτεται ένα γράμμα και λέει πως βρίσκεται στις λέξεις «νερό» και «ντροπή», αλλά δεν βρίσκεται στις λέξεις «αέρας» και «δρόμος».

Μπορείς να βρεις ποιο γράμμα είναι;

Ήταν απαραίτητο να πει ο Πέτρος πως το γράμμα δεν βρίσκεται στη λέξη αέρας;