

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου

Ανοίξτε το αρχείο του λογισμικού Geogebra «*Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου_ver.1.ggb*» από την επιφάνεια εργασίας του Η/Υ και εκτελέστε, σύμφωνα με τις παρακάτω οδηγίες, όλες τις Δραστηριότητές του (1 – 6).

Δραστηριότητα 1 : Διάμεσοι τριγώνου

Επιλέξτε το κουτί «1^η Δραστηριότητα» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά: «Μέσα πλευρών», «Διάμεσος ΑΜ», «Διάμεσος ΒΝ» και «Διάμεσος ΓΞ». Τι παρατηρείτε;

Επιβεβαιώστε την παρατήρησή σας, επιλέγοντας το κουτί «Βαρύκεντρο G».

Ερώτηση 1: Πώς ονομάζεται το κοινό σημείο τομής των τριών **διαμέσων**;

Αποεπιλέξτε κατά αντίστροφη σειρά όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «1^η Δραστηριότητα».

Δραστηριότητα 2 : Διχοτόμοι τριγώνου

Επιλέξτε το κουτί «2^η Δραστηριότητα» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά: «Γωνίες», «Διχοτόμος ΑΔ», «Διχοτόμος ΒΕ» και «Διχοτόμος ΓΖ». Τι παρατηρείτε;

Επιβεβαιώστε την παρατήρησή σας, επιλέγοντας το κουτί «Έγκεντρο Κ».

Ερώτηση 2: Πώς ονομάζεται το κοινό σημείο τομής των τριών **διχοτόμων**;

Αποεπιλέξτε κατά αντίστροφη σειρά όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «2^η Δραστηριότητα».

Δραστηριότητα 3 : Ύψοι τριγώνου

Επιλέξτε το κουτί «3^η Δραστηριότητα» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά: «Ίχνη υψών», «Ύψος u_A », «Ύψος u_B » και «Ύψος u_G ». Τι παρατηρείτε;

Επιβεβαιώστε την παρατήρησή σας, επιλέγοντας το κουτί «Ορθόκεντρο Η».

Ερώτηση 3: Πώς ονομάζεται το κοινό σημείο τομής των τριών **υψών**;

Αποεπιλέξτε κατά αντίστροφη σειρά όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «3^η Δραστηριότητα».

Δραστηριότητα 4 : Μεσοκάθετοι τριγώνου

Επιλέξτε το κουτί «4^η Δραστηριότητα» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά: «Μεσοκάθετος ΒΓ», «Μεσοκάθετος ΑΓ» και «Μεσοκάθετος ΑΒ». Τι παρατηρείτε;

Επιβεβαιώστε την παρατήρησή σας, επιλέγοντας το κουτί «Περίκεντρο Π_ε».

Ερώτηση 4: Πώς ονομάζεται το κοινό σημείο τομής των τριών **μεσοκαθέτων**;

Αποεπιλέξτε κατά αντίστροφη σειρά όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «4^η Δραστηριότητα».

Δραστηριότητα 5 : Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Βήμα 1^ο : Εγγεγραμμένος κύκλος

Επιλέξτε το κουτί «5^η Δραστηριότητα» και εν συνεχεία το κουτί: «Εγγεγραμμένος κύκλος». Τι παρατηρείτε;

Ορισμός 1: *Εγγεγραμμένος* ονομάζεται ο κύκλος που

Επιλέξτε έπειτα το κουτί «Έγκεντρο Κ». Τι παρατηρείτε;

Παρατήρηση 1₁: Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ, είναι το

Τι παρατηρείται για την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ;

Παρατήρηση 1₂: Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ, είναι

Αποεπιλέξτε πρώτα το κουτί «Έγκεντρο Κ» και εν συνεχεία το κουτί «Εγγεγραμμένος κύκλος».

Βήμα 2^ο : Περιγεγραμμένος κύκλος

Επιλέξτε το κουτί «Περιγεγραμμένος κύκλος». Τι παρατηρείτε;

Ορισμός 2: *Περιγεγραμμένος* ονομάζεται ο κύκλος που

Επιλέξτε έπειτα το κουτί «Περίκεντρο Π_ε». Τι παρατηρείτε;

Παρατήρηση 2₁: Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ, είναι το

Τι παρατηρείται για την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ;

Παρατήρηση 2₂: Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ, είναι

Αποεπιλέξτε πρώτα το κουτί «Περίκεντρο Π_ε» και εν συνεχεία το κουτί «Περιγεγραμμένος κύκλος».

Βήμα 3^ο : Παρεγγεγραμμένος κύκλος

Επιλέξτε το κουτί «Παρεγγεγραμμένος κύκλος Ι_α». Τι παρατηρείτε;

Ορισμός 3: *Παρεγγεγραμμένος* ονομάζεται ο κύκλος που

Επιλέξτε έπειτα το κουτί «Παράκεντρο Ι_α». Τι παρατηρείτε;

Παρατήρηση 3₁: Το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου Ι_α του ΑΒΓ, είναι το

Τι παρατηρείται για την ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου Ι_α του τριγώνου ΑΒΓ;

Παρατήρηση 3₂: Η ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου Ι_α του ΑΒΓ, είναι

Ορισμός 4: *Παράκεντρο* ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων των 2 **εξωτερικών** γωνιών & της 3^{ης} **εσωτερικής** γωνίας ενός τριγώνου.

Επαναλάβετε επιλέγοντας τα κουτιά: «Παρεγγεγραμμένος κύκλος Ι_β» και «Παράκεντρο Ι_β».

Ομοίως, επιλέξτε τα κουτιά: «Παρεγγεγραμμένος κύκλος Ι_γ» και «Παράκεντρο Ι_γ».

Πόσοι είναι οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι ενός τριγώνου;

Παρατήρηση 4: Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι ενός τριγώνου είναι με κέντρα

Αποεπιλέξτε κατά αντίστροφη σειρά όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «5^η Δραστηριότητα».

Δραστηριότητα 6 : Ευθεία & κύκλος του Euler

Βήμα 1^ο : Ευθεία του Euler

Επιλέξτε το κουτί «6^η Δραστηριότητα» και εν συνεχεία το κουτί: «Σημεία ευθείας Euler (3)».

Έπειτα επιλέξτε κατά σειρά τα κουτιά: «Βαρύκεντρο G», «Ορθόκεντρο H», «Περίκεντρο Π_ε».

Τι υποθέτετε ότι μπορεί να συμβαίνει για τα τρία (3) αυτά σημεία;

Υπόθεση 1: Τα τρία (3) σημεία: Βαρύκεντρο, Ορθόκεντρο & Περίκεντρο

Επιβεβαιώστε την υπόθεσή σας επιλέγοντας το κουτί «Ευθεία Euler».

Ορισμός 5:

Ευθεία Euler ονομάζεται η ευθεία που διέρχεται από το: Βαρύκεντρο, Ορθόκεντρο & Περίκεντρο.

Σχόλιο 1: Η **ευθεία Euler** ονομάζεται κι αλλιώς **ευθεία των 3 σημείων**.

Αποεπιλέξτε κατά σειρά τα κουτιά:

«Βαρύκεντρο G», «Ορθόκεντρο H», «Περίκεντρο Π_ε», «Σημεία ευθείας Euler (3)» & «Ευθεία Euler».

Βήμα 2^ο : Κύκλος του Euler

Επιλέξτε το κουτί: «Σημεία κύκλου Euler (9)».

Έπειτα επιλέξτε κατά σειρά τα κουτιά: «Μέσα πλευρών», «Ίχνη υψών», «Μέσα HA, HB, HC».

Τι υποθέτετε ότι μπορεί να συμβαίνει για τα εννιά (9) αυτά σημεία;

Υπόθεση 2: Τα εννιά (9) σημεία: Μέσα πλευρών, Ίχνη υψών & Μέσα HA, HB, HC

Επιβεβαιώστε την υπόθεσή σας επιλέγοντας το κουτί «Κύκλος Euler».

Ορισμός 6: **Κύκλος Euler** ονομάζεται ο κύκλος που διέρχεται από τα εξής εννιά (9) σημεία: μέσα πλευρών, ίχνη υψών & μέσα των HA, HB, HC, όπου H το ορθόκεντρο τριγώνου.

Σχόλιο 2₁: Ο κύκλος Euler ονομάζεται κι αλλιώς **κύκλος των 9 σημείων**.

Που συγκεκριμένα βρίσκεται το κέντρο του κύκλου Euler;

Σχόλιο 2₂: Το κέντρο του κύκλου Euler

Αποεπιλέξτε κατά σειρά όλα τα προηγούμενα κουτιά.

(Δηλ.: «Μέσα πλευρών», «Ίχνη υψών», «Μέσα HA, HB, HC», «Σημεία κύκλου Euler (9)», «Κύκλος Euler» όπως και το κουτί «6^η Δραστηριότητα»).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερώτηση Διερεύνησης 1

Επιλέξτε το κουτί «**1^η Δραστηριότητα**» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά:

«Μέσα πλευρών», «Διάμεσος AM», «Διάμεσος BN», «Διάμεσος ΓΞ» και «Βαρύκεντρο G».

Μετακινήστε την κορυφή A του τριγώνου ABΓ και παρατηρήστε τις συμβαίνει με το Βαρύκεντρο G.

Το Βαρύκεντρο G είναι:

- A. πάντα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
- B. πάντα εξωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
- Γ. πάντα σημείο του τριγώνου ABΓ.
- Δ. κάποιες φορές εσωτερικό, κάποιες εξωτερικό και κάποιες σημείο του τριγώνου ABΓ.

Αποεπιλέξτε όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «1^η Δραστηριότητα».

Ερώτηση Διερεύνησης 2

Επιλέξτε το κουτί «**2^η Δραστηριότητα**» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά:

«Διχοτόμος AD», «Διχοτόμος BE», «Διχοτόμος ΓΖ» και «Έγκεντρο K».

Μετακινήστε την κορυφή A του τριγώνου ABΓ και παρατηρήστε τις συμβαίνει με το Έγκεντρο K.

Το Έγκεντρο K είναι:

- A. πάντα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
- B. πάντα εξωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
- Γ. πάντα σημείο του τριγώνου ABΓ.
- Δ. κάποιες φορές εσωτερικό, κάποιες εξωτερικό και κάποιες σημείο του τριγώνου ABΓ.

Αποεπιλέξτε όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «2^η Δραστηριότητα».

Ερώτηση Διερεύνησης 3

A. Επιλέξτε το κουτί «**3^η Δραστηριότητα**» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά:

«Ίχνη υψών», «Ύψος u_A», «Ύψος u_B», «Ύψος u_Γ» και «Ορθόκεντρο H».

Μετακινήστε την κορυφή A του τριγώνου ABΓ και παρατηρήστε τις συμβαίνει με το Ορθόκεντρο H.

Το Ορθόκεντρο H είναι:

- A. πάντα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
- B. πάντα εξωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.
- Γ. πάντα σημείο του τριγώνου ABΓ.
- Δ. κάποιες φορές εσωτερικό, κάποιες εξωτερικό και κάποιες σημείο του τριγώνου ABΓ.

B. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τρίγωνο ABΓ της **Στήλης Α** μία μόνο θέση του Ορθόκεντρου της **Στήλης Β**.

Στήλη Α (Τρίγωνο ABΓ)	Στήλη Β (Θέση του Ορθόκεντρου του τριγώνου ABΓ)	ΠΙΝΑΚΑΣ II	
α). οξυγώνιο	1). εσωτερικό σημείο του τριγώνου	α).	
β). ορθογώνιο	2). εξωτερικό σημείο του τριγώνου	β).	
γ). αμβλυγώνιο	3). σημείο «επάνω» στο τρίγωνο	γ).	

Γ. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για το επόμενο υποερώτημα:

Το Ορθόκεντρο Η ενός ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ($A=90^\circ$), συμπίπτει με την κορυφή:

A. Α

B. Β

Γ. Γ

Αποεπιλέξτε όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «3^η Δραστηριότητα».

Ερώτηση Διερεύνησης 4

A. Επιλέξτε το κουτί «**4^η Δραστηριότητα**» και εν συνεχεία κατά σειρά τα κουτιά:

«Μεσοκάθετος ΒΓ», «Μεσοκάθετος ΑΓ», «Μεσοκάθετος ΑΒ» και «Περίκεντρο Π_ϵ ».

Μετακινήστε την κορυφή Α του τριγώνου ABΓ και παρατηρήστε τις συμβαίνει με το Περίκεντρο Π_ϵ .

Το Περίκεντρο Π_ϵ είναι:

A. πάντα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.

B. πάντα εξωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ.

Γ. πάντα σημείο του τριγώνου ABΓ.

Δ. κάποιες φορές εσωτερικό, κάποιες εξωτερικό και κάποιες σημείο του τριγώνου ABΓ.

B. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τρίγωνο ABΓ της **Στήλης Α** μία μόνο θέση του Περίκεντρου της **Στήλης Β**.

Στήλη Α (Τρίγωνο ABΓ)	Στήλη Β (Θέση του Περίκεντρου του τριγώνου ABΓ)	ΠΙΝΑΚΑΣ II	
α). οξυγώνιο	1). εσωτερικό σημείο του τριγώνου	α).	
β). ορθογώνιο	2). εξωτερικό σημείο του τριγώνου	β).	
γ). αμβλυγώνιο	3). σημείο «επάνω» στο τρίγωνο	γ).	

Γ. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για το επόμενο υποερώτημα:

Το Περίκεντρο Π_ϵ ενός ορθογωνίου τριγώνου ABΓ ($A=90^\circ$), συμπίπτει με το μέσο της πλευράς:

A. ΑΒ

B. ΒΓ

Γ. ΓΑ

Αποεπιλέξτε όλα τα προηγούμενα κουτιά όπως και το κουτί «4^η Δραστηριότητα».

Άσκηση 5

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε Σημείο ενός τριγώνου ABΓ της **Στήλης Α** έναν μόνο Ορισμό της **Στήλης Β**.

Στήλη Α (Σημείο)	Στήλη Β (Ορισμός)	ΠΙΝΑΚΑΣ II	
α). Βαρύκεντρο	1). Σημείο τομής 3 διχοτόμων.	α).	
β). Περίκεντρο	2). Σημείο τομής 1 εσωτερικής και 2 απέναντι εξωτερικών διχοτόμων.	β).	
γ). Ορθόκεντρο	3). Σημείο τομής 3 μεσοκαθέτων.	γ).	
δ). Έγκεντρο	4). Σημείο τομής 3 διαμέσων.	δ).	
ε). Παράκεντρο	5). Σημείο τομής 3 υψών.	ε).	