

# ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

## 1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

**Θεματική του σχεδίου μαθήματος:**

Γυμνάσιο: Β §1.1 Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου

Λύκειο: ΓΕΩ §4.5, 5.12 Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου

**Δημιουργός:**

Κατσαρής Ηλίας

**Βαθμίδα – Τάξη:**

Δευτεροβάθμια – Γ' Γυμνασίου, Α' Λυκείου

**Διδακτικές ώρες:**

1 ώρα

**Ενότητα του ΠΣ και Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):**

**Θεματικό Πεδίο** : Γεωμετρία

**Θεματική Ενότητα** : Γεωμετρία του επιπέδου

**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ):**

Οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση (Γ Γυμνασίου: Γ.Ε.9.1<sub>1</sub> , Α Λυκείου: Γ.Ε.9.1<sub>2</sub> – Γ.Ε.9.1<sub>3</sub>):

Γ.Ε.9.1<sub>1</sub> να ορίζουν τα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου (Βαρύκεντρο, Ορθόκεντρο, Έγκεντρο, Περύκεντρο, Παράκεντρο).

Γ.Ε.9.1<sub>2</sub> να ορίζουν τους αξιοσημείωτους κύκλους τριγώνου (Εγγεγραμμένος, Περιγεγραμμένος, Παρεγγεγραμμένοι).

Γ.Ε.9.1<sub>3</sub> να περιγράφουν την ευθεία του Euler και τον κύκλο του Euler.

**Προαπαιτούμενες δυνατότητες μαθητών/τριών (γνωστικές και κοινωνικο-πολιτισμικές):**

Σε επίπεδο γνωστικό:

- διάμεσοι τριγώνου, διχοτόμοι τριγώνου, ύψη τριγώνου, μεσοκάθετοι τριγώνου,
- χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων: της μεσοκαθέτου ενός ευθ. τμήματος & της διχοτόμου μίας γωνίας,
- ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καρτεσιανές συντεταγμένες,
- στοιχειώδη γνώση χειρισμού του λογισμικού Geogebra.

Σε επίπεδο κοινωνικό – πολιτισμικό:

- συνεργατική μάθηση (συνεργασία για έναν κοινό στόχο),
- ενεργητική και ισότιμη συμμετοχή των μαθητών,
- εμπλοκή σε διαδικασίες διατύπωσης, διερεύνησης και ορισμών,
- τεκμηριωμένη διατύπωση των αποτελέσματα των μαθητών στο σύνολο της τάξης,
- αξιοποίηση εναλλακτικών μορφών αξιολόγησης (π.χ. ασκήσεις σε περιβάλλον e-class, σταυρόλεξο, Kahoot),
- αξιοποίηση εποπτικών και τεχνολογικών μέσων για την υποστήριξη των δραστηριοτήτων των μαθητών,
- εξοικείωση με χρήση τεχνολογίας Η/Υ στην καθημερινή και μαθησιακή τους πορεία.

**Υποστηρικτικό υλικό:**

- Αρχείο Geogebra : <https://www.geogebra.org/m/aawcbp3h>
- Σταυρόλεξο : <https://crosswordlabs.com/embed/11- ver1>
- Παιχνίδι Kahoot : [https://kahoot.it/challenge/09680621?challenge-id=be0653df-bcc5-4434-ae9b-88bd324e1251\\_1721322940256](https://kahoot.it/challenge/09680621?challenge-id=be0653df-bcc5-4434-ae9b-88bd324e1251_1721322940256)

## Εκπαιδευτικό Πρόβλημα:

Ο ορισμός και κατά συνέπεια η κατασκευή τόσο των αξιοσημείωτων σημείων ενός τριγώνου (Βαρύκεντρο, Έγκεντρο, Ορθόκεντρο, Περίκεντρο, Παράκεντρα) όσο και των αξιοσημείωτων κύκλων του (Εγγεγραμμένος, Περιγεγραμμένος, Παρεγγεγραμμένοι) καθώς και η παρατήρηση των σχετικών θέσεων και ιδιοτήτων τους με τη βοήθεια του κλασσικού πίνακα διδασκαλίας εμπεριέχει το βασικό μειονέκτημα της στατικότητας, κατά συνέπεια της πολυπλοκότητας. Το συγκεκριμένο σχέδιο μαθήματος (Φύλλο Εργασίας και Μικροπείραμα) παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία, μέσω του δυναμικού περιβάλλοντος του μικροπείραματος (αρχείο Geogebra) και της καθοδηγούμενης ανακαλυπτικής μεθόδου του αντίστοιχου Φύλλου Εργασίας, να ορίσουν, να παρατηρήσουν, να ελέγξουν και τέλος να κατανοήσουν τις παραπάνω έννοιες με τρόπο απλό και κατανοητό. Αυτό οφείλεται στη διάδρασή τους με το αρχείο που τους δίνει τη δυνατότητα να μετακινήσουν τις κορυφές Α, Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ, μεταβάλλοντας γρήγορα και με εύκολο τρόπο το είδος του (οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο). Οι σχετικές θέσεις των εν λόγω σημείων στα τρίγωνα θα οδηγήσουν τελικά τους μαθητές στις έννοιες της ευθείας του Euler και του κύκλου του Euler (ver.1).

## 2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ

### Α. Το θέμα και το μαθησιακό περιβάλλον

1. Το γνωστικό αντικείμενο είναι τα αξιοσημείωτα σημεία ενός τριγώνου, οι αξιοσημείωτοι κύκλοι ενός τριγώνου, η ευθεία Euler και ο κύκλος Euler (ορισμοί, στοιχειώδεις ιδιότητες & σχετικές θέσεις).
2. Η διδασκαλία θα υλοποιηθεί στη φυσική αίθουσα, όπου οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των 4–5 ατόμων με βάση αφενός το φύλλο εργασίας που θα τους δοθεί και αφετέρου το αντίστοιχο αρχείο περιβάλλοντος Geogebra (Μικροπείραμα), φτιαγμένο από τον διδάσκοντα, το οποίο και θα είναι προεγκατεστημένο στην επιφάνεια εργασίας του κάθε φορητού Η/Υ (Laptop).
3. Χρονική διάρκεια: 1 διδακτική ώρα (40 min).

### Β. Διδακτική μέθοδος και εργαλεία

Διδακτικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν είναι: φύλλο εργασίας, πίνακας, βιντεοπροβολέας και οι Η/Υ. Η μέθοδος που θα εφαρμοστεί είναι η «καθοδηγούμενη ανακαλυπτική».

Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα εμπλακούν σε δραστηριότητες με τις οποίες θα κληθούν να ορίσουν τα αξιοσημείωτα σημεία ενός τριγώνου (Βαρύκεντρο, Έγκεντρο, Ορθόκεντρο, Περίκεντρο, Παράκεντρα), τους αξιοσημείωτους κύκλους ενός τριγώνου (Εγγεγραμμένος, Περιγεγραμμένος, Παρεγγεγραμμένοι) και τέλος να οδηγηθούν στις έννοιες της ευθείας του Euler και του κύκλου του Euler, με τη βοήθεια τόσο μέσω του φύλλου εργασίας όσο και μέσω της διάδρασής τους με αντίστοιχο αρχείο, σχεδιασμένο από τον διδάσκοντα, σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας Geogebra ( <https://www.geogebra.org/m/aawcbp3h> ), όπου θα τους δίνεται η δυνατότητα να μετακινήσουν τις κορυφές Α, Β, Γ ενός τριγώνου στο επίπεδο προκειμένου να πειραματιστούν, να υποθέσουν, να εκτιμήσουν, να συγκρίνουν, να παρατηρήσουν, να συμπεράνουν και τέλος να αντιληφθούν διαισθητικά τις έννοιες που εισάγονται. Ο διδάσκοντας θα συμμετέχει στη διαδικασία με στοχευμένη βοήθεια και συστηματική καθοδήγηση.

Θα υπάρχει ομαδοσυνεργατική μάθηση καθώς οι μαθητές θα εργάζονται σε ομάδες. Σε κάθε ομάδα θα δοθεί ένα φύλλο εργασίας, στο οποίο θα συνεργάζονται με τους συμμαθητές τους. Όταν η κάθε δραστηριότητα θα έχει προχωρήσει αρκετά θα σηκωθεί ένας εκπρόσωπος της κάθε ομάδας για να παρουσιάσει την εργασία και να διατυπώσει τα σχετικά συμπεράσματα.

### Γ. Αναμενόμενη διδακτική πορεία

- 1<sup>η</sup> Φάση: Υλοποίηση 1<sup>ου</sup> στόχου (1<sup>η</sup>–4<sup>η</sup> Δραστηριότητα) – **Μέση διάρκεια: 8 λεπτά**  
Στη φάση αυτή οι μαθητές ορίζουν τις έννοιες των αξιοσημείωτων σημείων ενός τριγώνου (στόχος 1).  
Με τις ερωτήσεις στο τέλος της κάθε Δραστηριότητας θα αξιολογηθεί η επίτευξη του 1<sup>ου</sup> στόχου.
- 2<sup>η</sup> Φάση: Υλοποίηση 2<sup>ου</sup> στόχου (5<sup>η</sup> Δραστηριότητα) – **Μέση διάρκεια: 6 λεπτά**  
Στη φάση αυτή οι μαθητές ορίζουν τις έννοιες των αξιοσημείωτων κύκλων ενός τριγώνου (στόχος 2).  
Με τις ερωτήσεις/παρατηρήσεις ενδιάμεσα της Δραστηριότητας θα αξιολογηθεί η επίτευξη του 2<sup>ου</sup> στόχου.
- 3<sup>η</sup> Φάση: Υλοποίηση 3<sup>ου</sup> στόχου (6<sup>η</sup> Δραστηριότητα) – **Μέση διάρκεια: 8 λεπτά**  
Στη φάση αυτή οι μαθητές μαθαίνουν να ορίζουν την έννοια της ευθείας Euler και του κύκλου Euler (στόχος 3).  
Με τις ερωτήσεις/σχόλια ενδιάμεσα της Δραστηριότητας θα αξιολογηθεί η επίτευξη του 3<sup>ου</sup> στόχου.
- 4<sup>η</sup> Φάση: Συστηματοποίηση συμπερασμάτων – **Μέση διάρκεια: 7 λεπτά**

Οι απαντήσεις και οι απόψεις όλων των ομάδων θα συζητηθούν στην ολομέλεια της τάξης.  
Ο εκπ/κός συστηματοποιεί τα συμπεράσματα στα οποία έφτασαν οι μαθητές, ονοματίζει τη νέα γνώση και συνοψίζει με χρήση PowerPoint.

• 5<sup>η</sup> Φάση: Αξιολόγηση – **Μέση διάρκεια: 6 λεπτά**

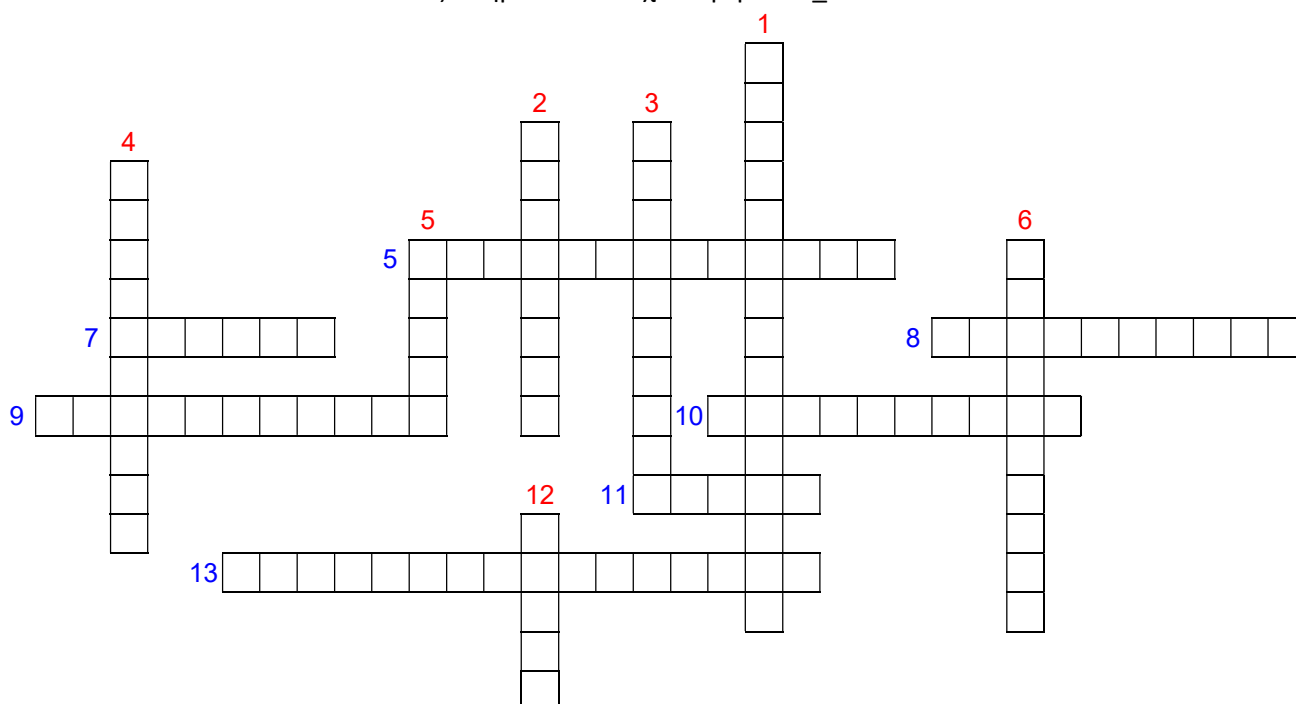
Το φύλλο εργασίας περιέχει 5 ερωτήσεις αξιολόγησης, ώστε να ελεγχθεί η υλοποίηση των τιθέμενων στόχων.

• 6<sup>η</sup> Φάση: Κλείσιμο εκπαιδευτικής διαδικασίας – **Μέση διάρκεια: 5 λεπτά**

Θα γίνει (με χρήση Power Point) ανακεφαλαίωση του μαθήματος μέσω της λύσης του φύλλου αξιολόγησης των μαθητών. Ακολούθως, αφενός θα γίνει σύνδεση του μαθήματος με το επόμενο και αφετέρου θα δωθούν στους μαθητές οι αντίστοιχες εργασίες: Σταυρόλεξο & ασκήσεις σε περιβάλλον e – class, που θα κληθούν να υλοποιήσουν ατομικά στο σπίτι τους για το επόμενο μάθημα. Αν υπάρξει χρόνος οι μαθητές θα παίξουν κι ένα σχετικό παιχνίδι στο Kahoot, διαφορετικά θα τους ανατεθεί κι αυτό ως επιπλέον εργασία για το σπίτι.

Έχει ετοιμαστεί ψηφιακό σταυρόλεξο ( <https://crosswordlabs.com/embed/11- ver1> ):

Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου\_ver.1



**Οδηγίες:** Συμπληρώστε το σταυρόλεξο με πεζά (μικρά) γράμματα της Ελληνικής αλφαβήτου και χωρίς τόνους.

**Ο Ρ Ι Ζ Ο Ν Τ Ι Α**

5. Κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται στις 3 πλευρές του.
7. Στο μέσο της απόστασης Ορθόκεντρο (Η) – Περίκεντρο (Π<sub>ε</sub>) της ευθείας Euler, βρίσκεται το ... του κύκλου Euler.
8. Το σημείο τομής των 3 διαμέσων ενός τριγώνου.
9. Τέτοια σημεία το Βαρύκεντρο, το Ορθόκεντρο και το Περίκεντρο ενός τριγώνου.
10. Τέτοια τα εννιά (9) σημεία: Μέσα πλευρών, Ίχνη υψών & Μέσα ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, όπου Η το Ορθόκεντρο ενός τριγώνου.
11. Μαθηματικός που συνέδεσε το όνομά του με μία αξιοσημείωτη ευθεία και έναν αξιοσημείωτο κύκλο στα τρίγωνα.
13. Κύκλος που εφάπτεται στη μία πλευρά ενός τριγώνου και στις προεκτάσεις των 2 άλλων.

**Κ Α Θ Ε Τ Α**

1. Κύκλος που βρίσκεται στο εξωτερικό ενός τριγώνου και διέρχεται από τις 3 κορυφές του.
2. Το σημείο τομής των 3 διχοτόμων ενός τριγώνου.
3. Το σημείο τομής των διχοτόμων 2 εξωτερικών γωνιών & της 3<sup>ης</sup> εσωτερικής γωνίας ενός τριγώνου.
4. Το σημείο τομής των 3 υψών ενός τριγώνου.
5. Ο κύκλος του Euler ονομάζεται και κύκλος των ... σημείων.
6. Το σημείο τομής των 3 μεσοκαθέτων ενός τριγώνου.
12. Η ευθεία Euler ονομάζεται και ευθεία των ... σημείων.

## Εργασία για το σπίτι

Μπορείτε να παίξετε το παιχνίδι:

- είτε σκανάροντας το παρακάτω QR Code,
- είτε με κλικ στο σύνδεσμο:

[https://kahoot.it/challenge/09680621?challenge-id=be0653df-bcc5-4434-ae9b-88bd324e1251\\_1721322940256](https://kahoot.it/challenge/09680621?challenge-id=be0653df-bcc5-4434-ae9b-88bd324e1251_1721322940256)



Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου\_ver.1 (Euler).ggb

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια

ευθεία Euler  
Το κέντρο  $O_{Euler}$  του κύκλου Euler βρίσκεται επάνω στην ευθεία Euler και συγκεκριμένα στο μέσο της απόστασης: Ορθόκentro (H) - Περίκentro (Πε).

109.4°

138.2°

Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου και εφάπτεται στις 3 πλευρές του.  
Έχει κέντρο το Έγκεντρο και ακτίνα την κοινή απόσταση αυτού από τις 3 πλευρές.

Ο κύκλος που βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου και διέρχεται από τις 3 κορυφές του.  
Έχει κέντρο το Περίκentro και ακτίνα την κοινή απόσταση αυτού από τις 3 κορυφές.

Ο κύκλος που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των 2 άλλων.  
Έχει κέντρο το Παράκentro και ακτίνα την κοινή απόσταση αυτού από τη μία πλευρά και τις προεκτάσεις των 2 άλλων.

**1ο Πειραματικό Γυμνασιο Καρδίτσας, Σχ. Έτος 2024-25**  
**Ηλίας Ι. Κατσαρής (Μαθηματικός MSc)**

## Αξιοσημείωτα στοιχεία τριγώνου

☒ 1η Δραστηριότητα

☐ Μέσα πλευρών

☒ 2η Δραστηριότητα

☐ Γωνίες

☒ 3η Δραστηριότητα

☐ Ίσνη υψών

☒ 4η Δραστηριότητα

☒ 5η Δραστηριότητα

☒ 6η Δραστηριότητα

**Διάμεσος**, ονομάζεται το ευθ. τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

☐ Διάμεσος AM ☐ Διάμεσος BN ☐ Διάμεσος ΓΕ ☒ Βαρύκentro G

**Διχοτόμος**, ονομάζεται το ευθ. τμήμα που χωρίζει μία γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

☐ Διχοτόμος AD ☐ Διχοτόμος BE ☐ Διχοτόμος ΓΖ ☒ Έγκεντρο K

**Ύψος**, ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μία κορυφή που καταλήγει στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

☐ Ύψος  $u_A$  ☐ Ύψος  $u_B$  ☐ Ύψος  $u_\Gamma$  ☒ Ορθόκentro H ☒ Μέσα HA, HB, HG

**Μεσοκάθετος**, ονομάζεται η ευθεία που διέρχεται από το μέσο μίας πλευράς και είναι κάθετη σε αυτή.

☐ Μεσοκάθετος ΒΓ ☐ Μεσοκάθετος ΑΓ ☐ Μεσοκάθετος ΑΒ ☒ Περίκentro Πε

**Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου**

☒ Εγγεγραμμένος κύκλος ☒ Περιγεγραμμένος κύκλος

☐ Παρεγγεγραμμένος κύκλος  $I_\alpha$  ☐ Παράκentro  $I_\alpha$

☒ Παρεγγεγραμμένος κύκλος  $I_\beta$  ☒ Παράκentro  $I_\beta$

☐ Παρεγγεγραμμένος κύκλος  $I_\gamma$  ☐ Παράκentro  $I_\gamma$

☒ Σημεία κύκλου Euler (9)  
Μέσα πλευρών, Ίσνη υψών, Μέσα HA, HB, HG ☒ Κύκλος Euler

**Ευθεία και κύκλος του Euler**

☒ Σημεία ευθείας Euler (3)  
G, H, Πε ☒ Ευθεία Euler

**Leonhard Euler**