

## Σχέσεις δύο μεταβλητών - Συναρτήσεις

ΠΜΑ Β' Γυμνασίου

- A1. Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο.
- A2. Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση.
- A3. Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών.
- A4. Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- A5. Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως.
- A6. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο).
- A7. Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης.
- A8. Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις. Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).

### 2.1 Από τι εξαρτάται;

Στην καθημερινότητα παρατηρούμε ότι κάποια μεγέθη εξαρτώνται από άλλα μεγέθη.

Για παράδειγμα, τα χρήματα που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε ένα προϊόν με τιμή ανά κιλό 2 € εξαρτάται από τα κιλά του προϊόντος που θα αγοράσουμε.

Συμπληρώνουμε τις προτάσεις:

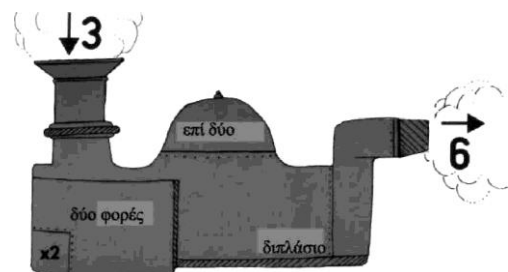
**α)** Το εμβαδόν του τετράγωνου δαπέδου ενός δωματίου εξαρτάται από \_\_\_\_\_

**β)** Ο λογαριασμός που θα πληρώσουμε στη ΔΕΗ εξαρτάται από \_\_\_\_\_

**γ)** Η απόσταση που θα διανύσει ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα εξαρτάται από \_\_\_\_\_

### 2.2 Εισαγόμενες και εξαγόμενες τιμές (δραστηριότητα από ΟΕ)

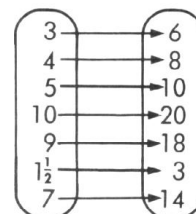
Σε μια (φανταστική) μηχανή μπορούμε να εισάγουμε τιμές και να μας εξάγει άλλες τιμές σύμφωνα με έναν κανόνα. Για παράδειγμα, η παρακάτω μηχανή διπλασιάζει κάθε αριθμό που θα εισάγουμε.



**α)** Τι αποτέλεσμα θα έχουμε όταν εισάγουμε το 4;

**β)** Αν το αποτέλεσμα είναι 20, ποιος αριθμός μπήκε στη μηχανή;

**γ)** Αυτό το διάγραμμα δείχνει πώς η μηχανή αλλάζει κάποιους αριθμούς.



Να σχεδιάσουμε ένα άλλο διάγραμμα, για να δείξουμε πώς αλλάζουν κάποιοι άλλοι αριθμοί.

δ) Σχεδιάζουμε διαφορετικά διαγράμματα, για να δείξουμε τι συμβαίνει στους αριθμούς 3, 4, 5 (μπορούμε αν θέλουμε να προσθέσουμε και άλλους αριθμούς), όταν χρησιμοποιούμε:

Μια μηχανή: «τρυτλασίασε».

Μια μηχανή: «πρόσθεσε 7».

Μια μηχανή: «αφαίρεσε 2».

Μια μηχανή: «πολλαπλασίασε με το 5 και μετά πρόσθεσε τρία».

Δραστηριότητα «Function Machine»  
[http://nlvm.usu.edu/en/nav/frame\\_s\\_asid\\_191\\_g\\_4\\_t\\_1.html?from=category\\_g\\_4\\_t\\_1.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/frame_s_asid_191_g_4_t_1.html?from=category_g_4_t_1.html) (από ΟΕ δημοτικού).

Πρέπει να σύρουμε και να ρίξουμε κάθε αριθμό στην υποδοχή της μηχανής. Να αναζητήσουμε τον κανόνα που θα μας επιτρέψει να συμπληρώσουμε τον πίνακα.

(σχετική δραστηριότητα: 2.8)

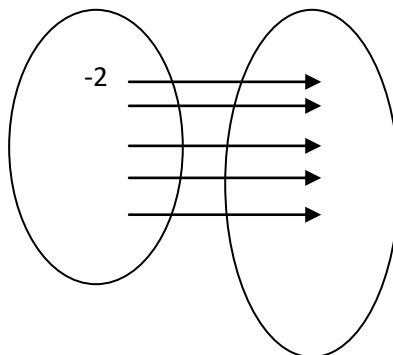
Όταν μία μεταβλητή  $\psi$  (π.χ. η τιμή που εξάγει η μηχανή) εξαρτάται από μία μεταβλητή  $\chi$  (π.χ. η τιμή που εισάγουμε στη μηχανή), τότε το  $\chi$  ονομάζεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή και το  $\psi$  **εξαρτημένη** μεταβλητή.

### 2.3 Πως αναπαριστάνουμε τη σχέση δύο μεταβλητών;

Μία σχέση μεταξύ μίας ανεξάρτητης μεταβλητής  $\chi$  και μίας εξαρτημένης μεταβλητής  $\psi$  μπορούμε να την εκφράσουμε με πολλούς τρόπους όπως: λεκτικά, με διάγραμμα, με πίνακα τιμών, με τύπο, με διατεταγμένα ζεύγη  $(\chi, \psi)$  ή με γραφική παράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο.

Αν η λεκτική περιγραφή μιας σχέσης είναι: **«προσθέτω 3»** στους αριθμούς -2, -1, 0, 2, 3 τότε συμπληρώνουμε τους υπόλοιπους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αναπαρασταθεί αυτή η συνάρτηση.

α) με **διάγραμμα** (ή βελοδιάγραμμα)

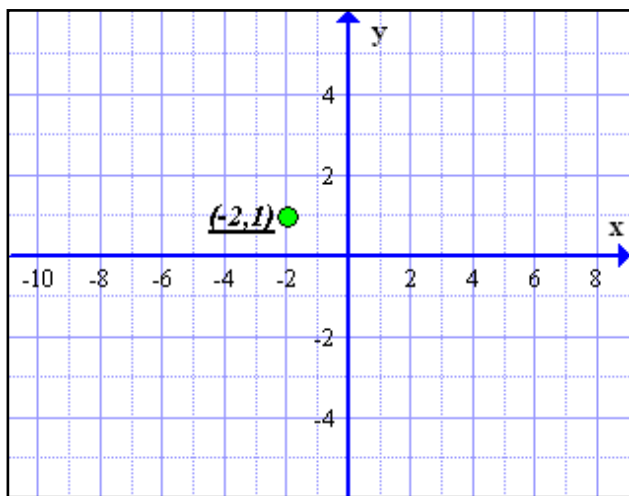


β) με πίνακα τιμών

$\chi$	-2	-1	0	2	3
$\psi$	1				

γ) με διατεταγμένα ζεύγη  $(\chi, \psi)$  $(-2, 1), (\_, \_), (\_, \_), (\_, \_), (\_, \_)$ δ) με γραφική παράσταση (τοποθετούμε τα διατεταγμένα ζεύγη  $(\chi, \psi)$  στο καρτεσιανό επίπεδο)

Συμπληρώνουμε στο σύστημα αξόνων τα υπόλοιπα σημεία της σχέσης.



ε) Με τύπο

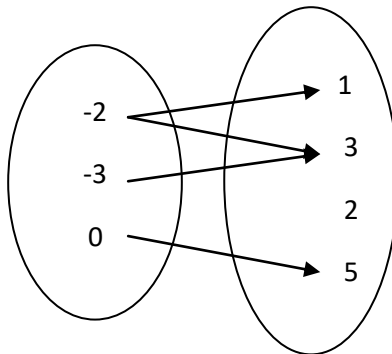
 $\psi = \_, \text{ για } \chi = -2, -1, 0, 2, 3$ 

## 2.4 Τι είναι συνάρτηση;

Μία σχέση δύο μεταβλητών  $\chi$  (ανεξάρτητη) και  $\psi$  (εξαρτημένη), την ονομάζουμε **συνάρτηση** όταν κάθε τιμή της μεταβλητής  $\chi$  αντιστοιχεί σε **μία μόνο τιμή** της μεταβλητής  $\psi$ .

Εξετάζουμε αν οι παρακάτω αναπαραστάσεις σχέσεων είναι συναρτήσεις. Καταθέσουμε την άποψή μας στην ομάδα και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε συμφωνία.

α) αν το διάγραμμα της σχέσης είναι:



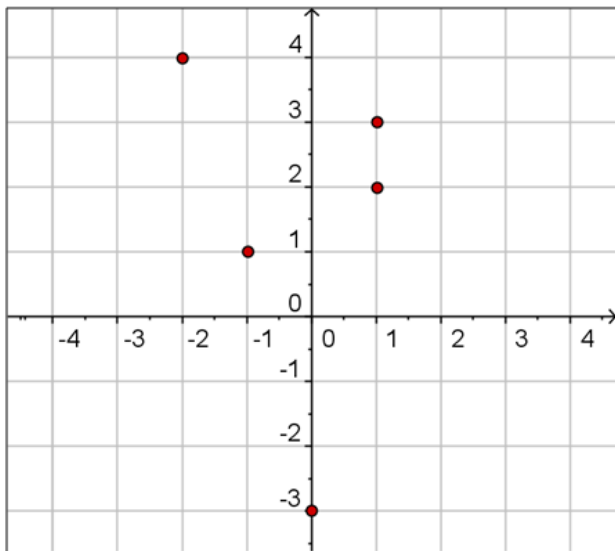
β) αν ο πίνακας τιμών είναι:

$\chi$	1	2	4	4	6
$\psi$	-3	4	7	-2	7

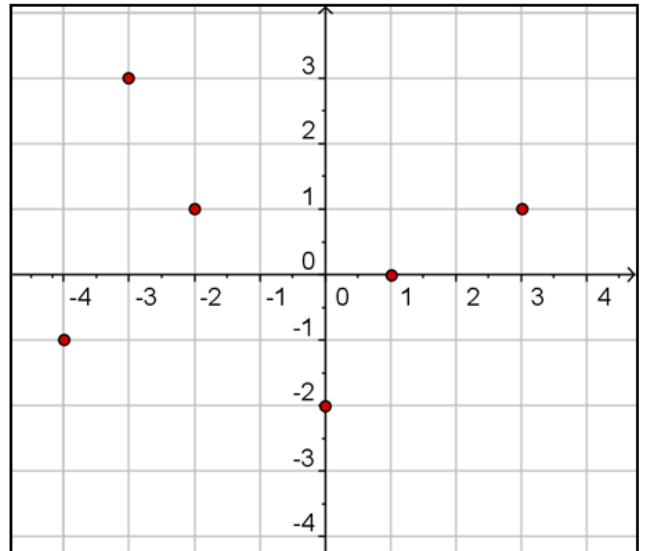
γ) αν τα διατεταγμένα ζεύγη της σχέσης είναι  $(-2,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,-1)$ ,  $(5,5)$

δ) αν τα διατεταγμένα ζεύγη της σχέσης είναι  $(-1,2)$ ,  $(0,4)$ ,  $(0,-2)$ ,  $(2,4)$

ε) αν η γραφική παράσταση της σχέσης είναι:



στ) αν η γραφική παράσταση της σχέσης είναι:



ζ) αν η λεκτική της περιγραφή είναι: «αντιστοιχίζουμε τις τιμές 2, 3, 4, 5 στους πραγματικούς αριθμούς που απέχουν αντίστοιχη απόσταση από το 0».

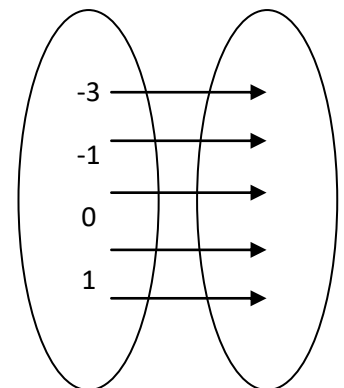
(σχετικές δραστηριότητες: 2.9, 2.10, 2.11)

## 2.5 Γνωρίζοντας τον τύπο

Μία συνάρτηση δίνεται από τον τύπο  $\psi=2\chi-1$  για  $\chi= -3, -1, 0, 1, 1,5$ . Να συμπληρώσουμε τις άλλες μορφές αναπαράστασης της συνάρτησης.

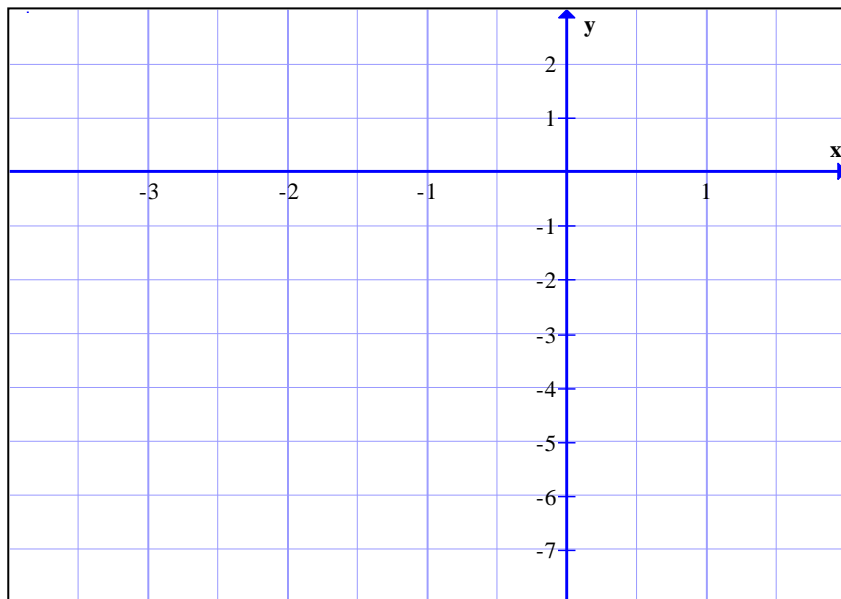
α) Λεκτική περιγραφή: «

β) Διάγραμμα:



γ) Διατεταγμένα ζεύγη:  $(\_, \_)$ ,  $(\_, \_)$ ,  $(\_, \_)$ ,  $(\_, \_)$ ,  $(\_, \_)$

δ) Γραφική παράσταση:



(σχετικές δραστηριότητες: 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18)

## 2.6 Από το αριθμητικό μοτίβο στη συνάρτηση

Δίνεται το αριθμητικό μοτίβο 3, 8, 13, 18, 23, ...

α) Συμπληρώνουμε τον επόμενο όρο στις παρακάτω ακολουθίες αριθμών και γράφουμε ένα κανόνα (ως ο επόμενος όρος του α) που να περιγράφει το μοτίβο:

3, 8, 13, 18, 23, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, ..., α, \_\_\_\_\_

Με τα δεδομένα που ξέρουμε μέχρι τώρα για το μοτίβο, μπορούμε να βρούμε ποιος αριθμός είναι ο 102<sup>ος</sup> όρος;

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση με πίνακα τιμών

$\chi$	1	2	3	4	5
$\psi$	3	8	13	18	23

Αυτή η σχέση των  $\chi$  και  $\psi$ , είναι συνάρτηση;

Αν το  $\chi$  παίρνει τιμές από τους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης;

γ) Ποιος αριθμός είναι ο 102<sup>ος</sup> όρος της ακολουθίας;

δ) Το 1558 είναι όρος της ακολουθίας και αν ναι, ποιος όρος είναι;

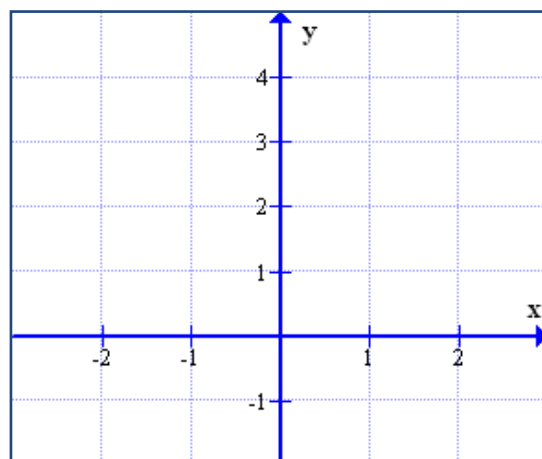
(σχετικές δραστηριότητες: 2.19, 2.20)

### 2.7 Γραφική παράσταση συνάρτησης με ανεξάρτητη μεταβλητή πραγματικό αριθμό.

Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = \chi^2 - 1$

**α)** Να συμπληρώσουμε τον πίνακα τιμών και να τοποθετήσουμε αυτά τα σημεία στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα.

$\chi$	-2	-1	0	1	2
$\psi$					



**β)** Αν το  $\chi$  παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές πως θα είναι η γραφική της παράσταση; Προσπαθούμε να τη χαράξουμε με προσοχή στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα.

**γ)** Συζητάμε με την ομάδα μας και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε συμφωνία. Όταν το  $\chi$  παίρνει πραγματικές τιμές ποιος/οι τρόπος/οι αναπαράστανει/ουν πλήρως τη συνάρτηση;

Χρήση τεχνολογίας.

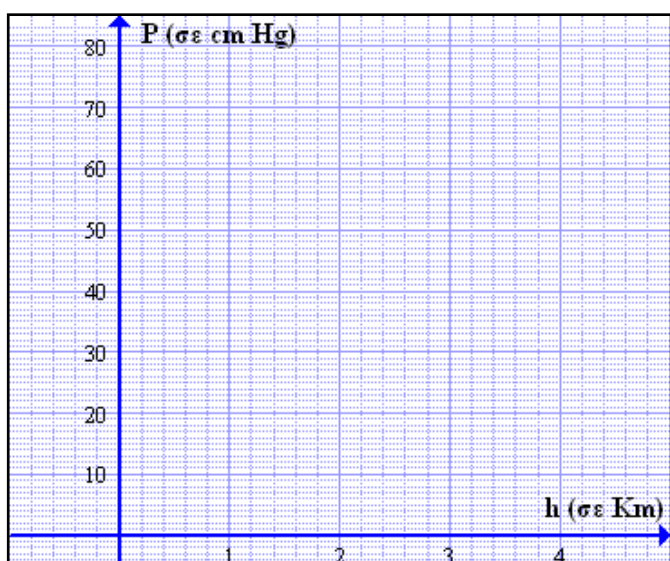
Το (β) μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα με την εφαρμογή [«Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι πραγματικός αριθμός»](#).

(σχετική δραστηριότητα: 2.21)

### 2.8 Η ατμοσφαιρική πίεση ως προς το ύψος

Η πίεση  $P$  (σε cm Hg) του αέρα ως συνάρτηση του ύψους  $h$  από το έδαφος φαίνεται στον παραπάνω πίνακα.

**α)** Να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής



**β)** Ποιά είναι η πίεση σε

ύψος 1,5 Km από το έδαφος;

Ύψος $h$ (σε Km)	0	1	2	3
Πίεση $P$ (σε cm Hg)	76	68	60	52

Χρήση τεχνολογίας.

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με την εφαρμογή: [Η ατμοσφαιρική πίεση](#)

**γ)** Σε ποιο ύψος η πίεση είναι ίση με 12 cm Hg;

(σχετική δραστηριότητα: 2.22, 2.23)

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ - ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

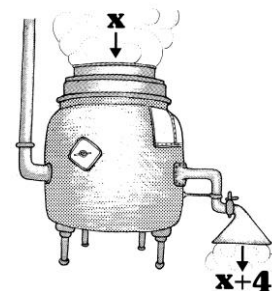
## 2.9 Μηχανή αντιστοίχισης (δραστηριότητα από ΟΕ δημοτικού)

α) Αν στη δυτλανή μηχανή εισάγουμε τον αριθμό 7 ποια θα είναι η εξαγόμενη τιμή;

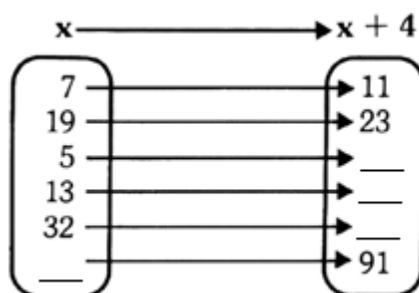
β) Γράφουμε τον κανόνα που περιγράφει τις εξαγόμενες τιμές ως προς τις τιμές που εισάγουμε.

γ) Το  $x \rightarrow x+4$  είναι ένας απλός τρόπος για να περιγράψουμε μια "μηχανή" που προσθέτει τέσσερα».

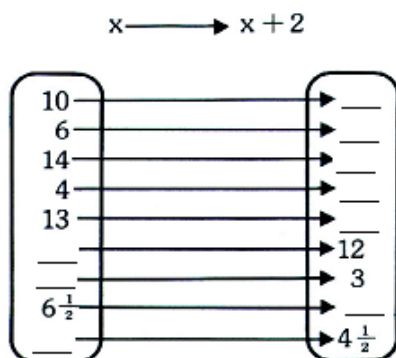
Να συμπληρώσουμε τα κενά στο παρακάτω διαγράμματα



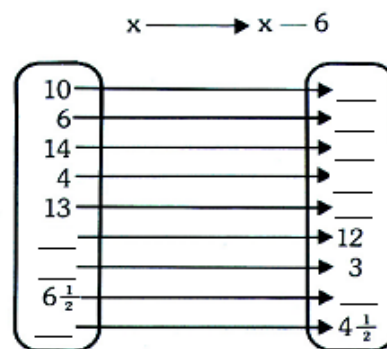
1)



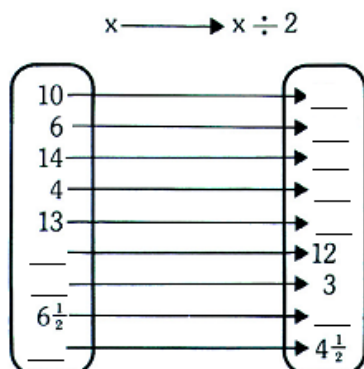
2)



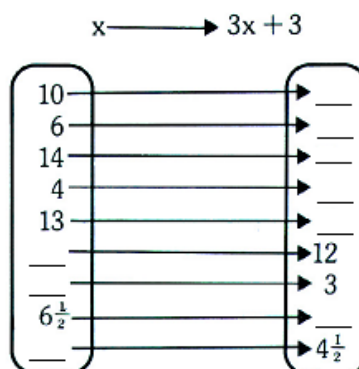
3)



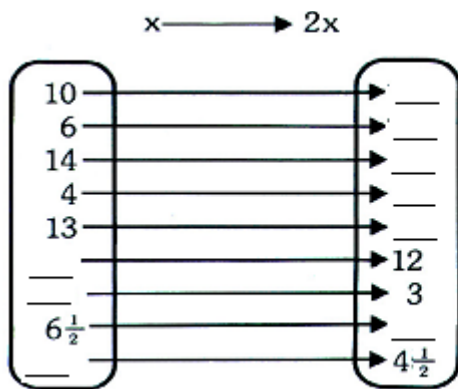
4)



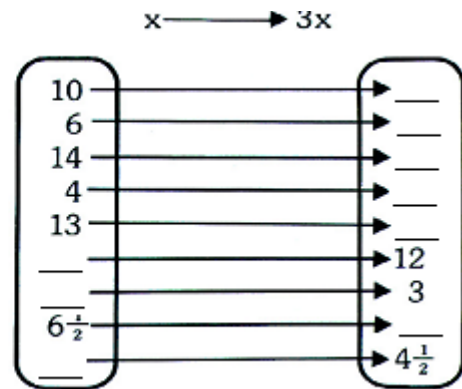
5)



6)



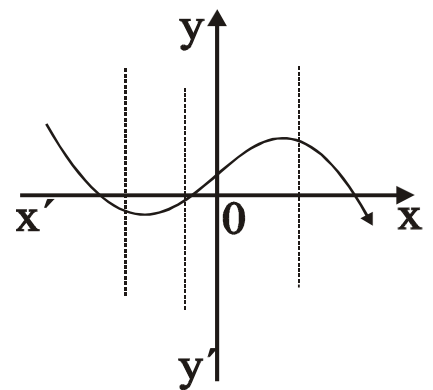
7)



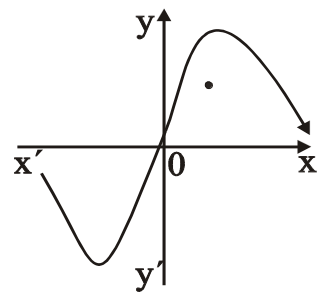
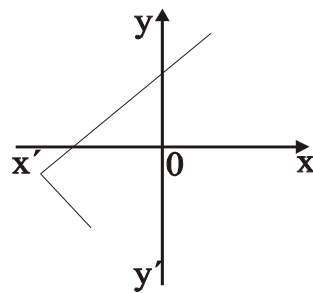
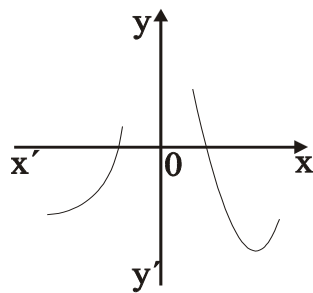
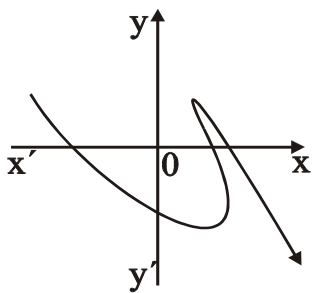
### 2.10 Είναι συνάρτηση;

**α)** Δίπλα βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

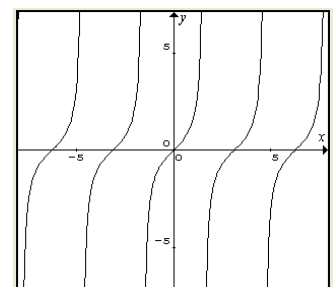
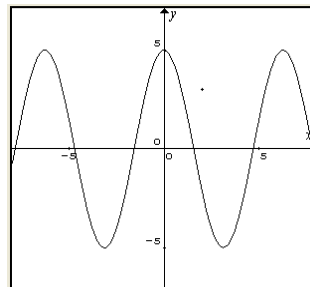
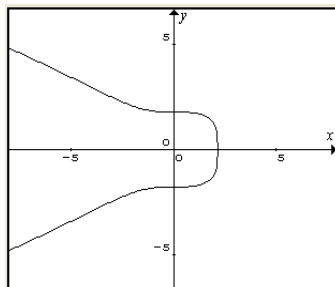
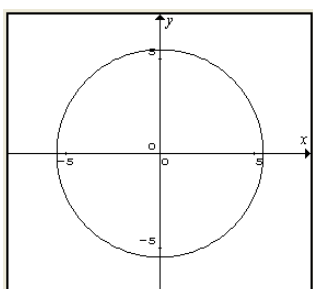
Αν φέρουμε κάθετες ευθείες στον άξονα των  $x$  σε πόσα σημεία μπορεί να τέμνει η κάθε μία την γραφική παράσταση της συνάρτησης και γιατί; Συζητάμε με την ομάδα μας και καταθέτουμε την άποψή μας στην ολομέλεια της τάξης.



**β)** Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συνάρτησης.



**γ)** Είναι συναρτήσεις οι σχέσεις με τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις; (συμπληρώνουμε ναι ή όχι και αιτιολογούμε την άποψή μας)

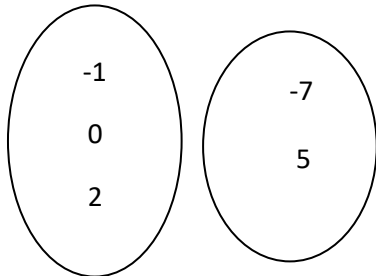




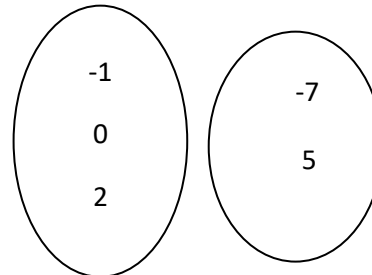
### 2.11 Κατασκευή συναρτήσεων και μη συναρτήσεων

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  παίρνει τις τιμές  $-1, 0, 2$  και η εξαρτημένη μεταβλητή  $y$  τις τιμές  $-7, 5$ , να φτιάξουμε το διάγραμμα μιας σχέσης που να είναι συνάρτηση και μίας σχέσης που να μην είναι συνάρτηση.

Σχέση που να είναι συνάρτηση



Σχέση που να μην είναι συνάρτηση



### 2.12 Ποια αναπαράσταση βοηθά περισσότερο στην αναγνώριση μιας συνάρτησης;

Ποια/ες μορφή/ες αναπαράστασης μας βοηθά να καταλάβουμε πιο εύκολα αν μια σχέση είναι συνάρτηση ή όχι;

Έχει σημασία αν η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει διακριτές και πεπερασμένες τιμές, διακριτές αλλά άπειρες τιμές, πραγματικές τιμές;

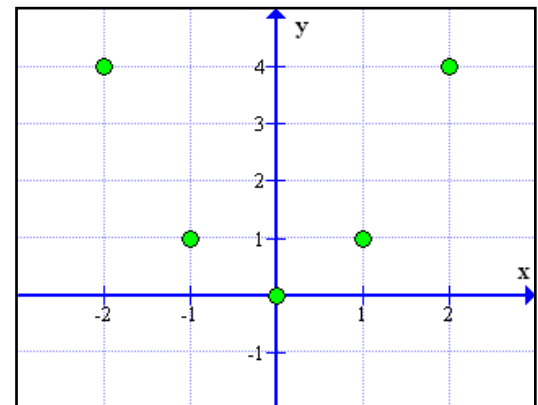
Συζητάμε με την ομάδα μας και καταθέτουμε την άποψή μας στην ολομέλεια της τάξης.

### 2.13 Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση

Δίνεται η γραφική παράσταση μιας σχέσης.

**α)** Είναι συνάρτηση αυτή η σχέση;

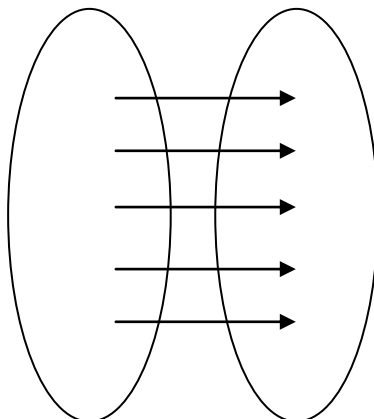
Αιτιολογούμε την άποψή μας.



**β)** Να συμπληρώσουμε τις άλλες μορφές αναπαράστασης αυτής της σχέσης.

**Λεκτική περιγραφή:** «

**Διάγραμμα:**



**Διατεταγμένα ζεύγη:**  $(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

**Τύπος:**  $\psi =$  \_\_\_\_\_ για  $x =$  \_\_\_\_\_

**2.14 Κάθε πίνακας τιμών εκφράζει μοναδικό τύπο συνάρτησης;**

Γράφουμε (αν γίνεται) τρεις τύπους συναρτήσεων για κάθε ένα πίνακα τιμών

α) 

$\chi$	-2
$\psi$	0

 1<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$  2<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$  3<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ , για  $\chi = -2$

β) 

$\chi$	5
$\psi$	-15

 1<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$  2<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$  3<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ , για  $\chi = 5$

γ) 

$\chi$	-3
$\psi$	-8

 1<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$  2<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$  3<sup>ος</sup> τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ , για  $\chi = -3$

**2.15 Από τα εκατοστά στα μέτρα**

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή  $\chi$  εκφράζει το μήκος ενός τμήματος σε εκατοστά (cm), τότε ποιος τύπος εκφράζει τη μεταβλητή  $\psi$  που είναι η ίδια μέτρηση εκφρασμένη σε μέτρα. Διαλέγουμε τη σωστή απάντηση.

i)  $\psi = 0,01\chi$

ii)  $\psi = 0,1\chi$

iii)  $\psi = 10\chi$

iv)  $\psi = 100\chi$

Αιτιολογούμε τις απόψεις μας.

**2.16 Από τον πίνακα τιμών στον τύπο**

Βρίσκουμε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στους παρακάτω πίνακες τιμών:

α) 

$\chi$	1	2	3	4	5
$\psi$	2	5	8	11	14

 Τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ , για  $\chi =$

β) 

$\chi$	-1	0	1	2	3
$\psi$	-7	-3	1	5	9

 Τύπος:  $\psi = \underline{\hspace{2cm}}$ , για  $\chi =$

**2.17 Εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή**

Να γράψουμε ένα πρόβλημα συνάρτησης όπου η εξαρτημένη μεταβλητή να έχει μικρότερη τιμή από την ανεξάρτητη μεταβλητή.

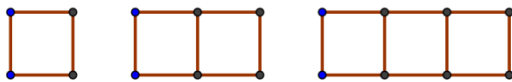
**2.18 Που είναι το λάθος;**

Να εντοπίσουμε το λάθος που έγινε στον πίνακα τιμών της συνάρτησης  $\psi=2\chi-1$ ,  $\chi=-2, 0, 1, 3, 5$  και να βρούμε τη σωστή τιμή.

$\chi$	-2	0	1	3	5
$\psi$	-5	-1	1	4	9

**2.19 Από το γεωμετρικό μοτίβο στην συνάρτηση**

Χρησιμοποιώντας σπέρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κ.ο.κ.

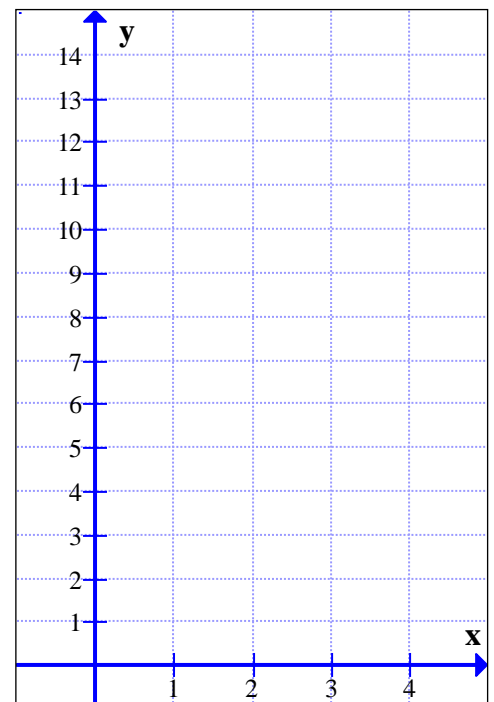


α) Να βρούμε πόσα σπέρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα

β) Συμπληρώνουμε τον πίνακα

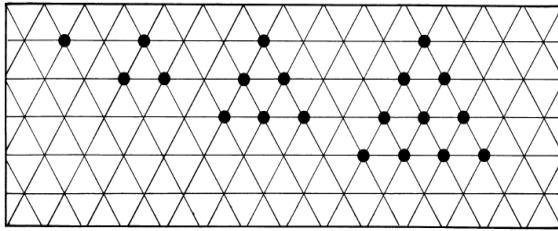
Αριθμός τετραγώνων	1	2	3	4
Αριθμός σπέρτων				

γ) Να παραστήσουμε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπέρτων) του προηγούμενου πίνακα στο διπλανό σύστημα αξόνων.



### 2.20 Τριγωνικοί αριθμοί

Θα χρειαστούμε ισομετρικό χαρτί και τετραγωνισμένο χαρτί.



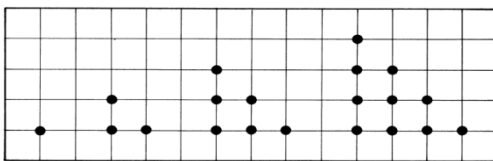
**Εικόνα 1:** Ισομετρικό χαρτί

Αυτά τα σχήματα από κουκίδες δείχνουν τους πρώτους τέσσερις τριγωνικούς αριθμούς.

Να τα μεταφέρουμε σε ισομετρικό χαρτί.

- α) Να σημειώσουμε τον αριθμό των κουκίδων κάτω από κάθε σχήμα.
- β) Κάθε τριγωνικός αριθμός σχηματίστηκε από τον προηγούμενο. Με ποιον τρόπο;
- γ) Ποιοι είναι οι επόμενοι τρεις τριγωνικοί αριθμοί;

Να χρησιμοποιήσουμε τετραγωνισμένο χαρτί, για να αντιγράψουμε τους παρακάτω αριθμούς και να σχεδιάσουμε τους επόμενους τέσσερις.



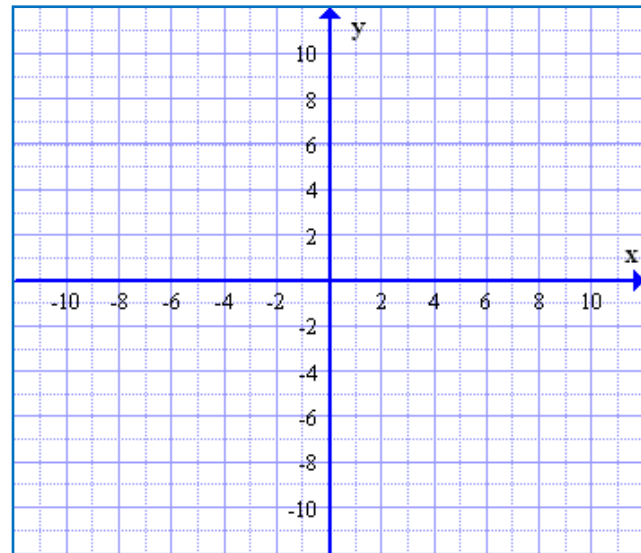
**Εικόνα 2:** Τετραγωνισμένο χαρτί

**2.21 Σταθερό γινόμενο**

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών  $\chi$  και  $\psi$  είναι 10. Αν θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή το  $\chi$ , τότε ο τύπος της συνάρτησης είναι  $\psi =$  \_\_\_\_\_

Συμπληρώνουμε έναν πίνακα τιμών και μετά σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$\chi$	-10	-5	-2,5	-2	-1	1	2	2,5	5	10
$\psi$										

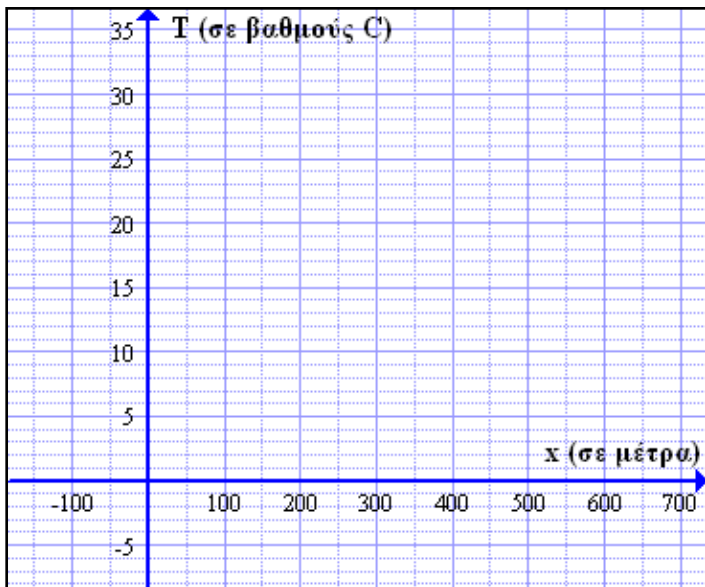


Το  $\chi$  μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές;

**2.22 Η θερμοκρασία στο βάθος της θάλασσας**

Ένα ωκεανογραφικό σκάφος κάνει μετρήσεις της θερμοκρασίας του νερού σε διάφορα βάθη στο Βόρειο Αιγαίο, με τα εξής αποτελέσματα:

<b>Βάθος <math>\chi</math> (σε m)</b>	0	50	100	200	500
<b>Θερμοκρασία <math>T</math> (σε <math>^{\circ}\text{C}</math>)</b>	28	20	16	12	8



**α)** Να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Χρήση τεχνολογίας.

Η δραστηριότητα μπορεί να γίνει και με την εφαρμογή [«Η θερμοκρασία στο βάθος της θάλασσας»](#).

**β)** Να χρησιμοποιήσουμε τη γραφική παράσταση για να εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία σε βάθος 500 μέτρων.

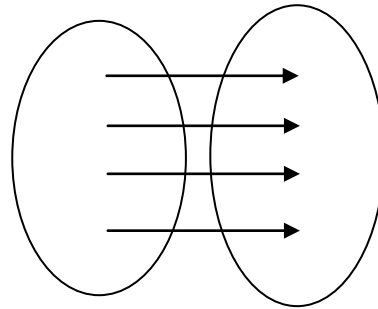
**γ)** Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια η θερμοκρασία του νερού είναι  $15^{\circ}\text{C}$ ;

## 2.23 Ελεύθερη πτώση

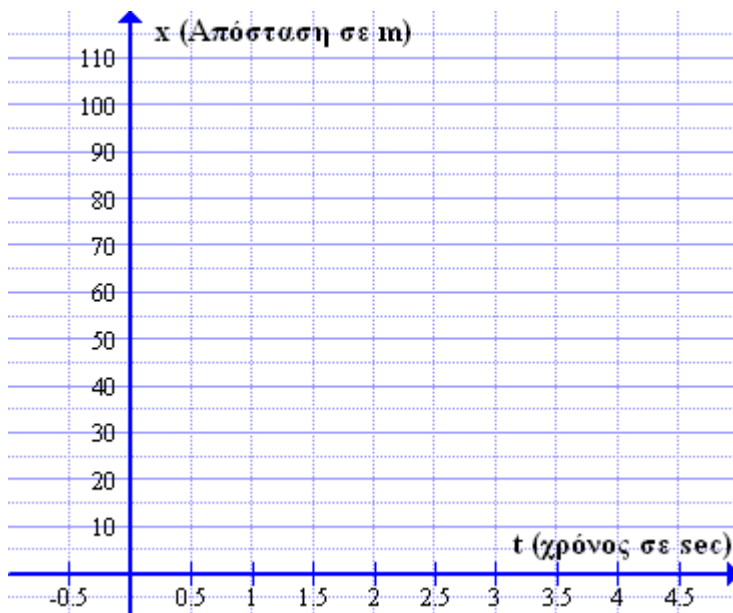
Ο καθηγητής των Φυσικών κ. Πειραματίδης μαζί με τους μαθητές του έκαναν το παρακάτω πείραμα. Άφησαν να πέσει ένα σώμα από ένα ψηλό ουρανοξύστη 140 m. Είναι γνωστό ότι όταν πέφτει ένα σώμα δεν κινείται με σταθερή ταχύτητα αλλά κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Φωτογράφησαν και βιντεοσκόπησαν το σώμα καθώς έπεφτε και με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού συμπλήρωσαν ανά δευτερόλεπτο τον ακόλουθο πίνακα:

Χρόνος $t$ (σε sec)	0	1	2	3	4
Διάστημα $\chi$ (σε m)	0	5	20	45	80

α) Συμπληρώνουμε το αντίστοιχο διάγραμμα



β) Τοποθετούμε τα σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο



Χρήση τεχνολογίας.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η εφαρμογή «[Ελεύθερη πτώση](#)»

<http://tube.geogebra.org/student/m354127>

γ) Σχεδιάζουμε μια καμπύλη που να περνάει απ' τα σημεία που έχουν καταγραφεί.

Σε πόσα περίπου sec θα φτάσει στο έδαφος;

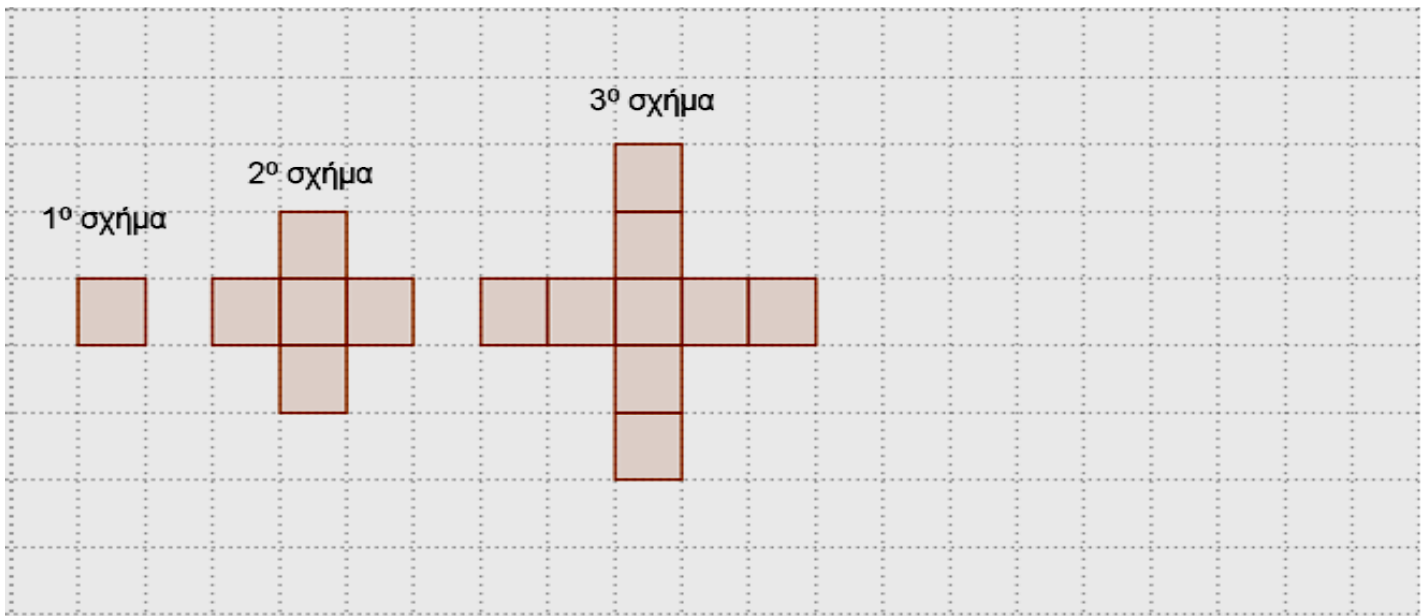
Σε 4,5 sec πόση απόσταση έχει διανύσει η μπάλα;

Σε πόσο χρόνο έχει διανύσει η μπάλα απόσταση περίπου 54 m;

δ) Συζητάμε με την ομάδα μας και προσπαθούμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης. Καταθέτουμε την άποψή μας στην ολομέλεια της τάξης.

### 2.24 Μοτίβο- συνάρτηση-εξίσωση

Η εικόνα δείχνει ένα γεωμετρικό μοτίβο.



α) Να σχεδιάσουμε τον επόμενο όρο του μοτίβου.

β) Αν  $\chi$  είναι ο αριθμός του κάθε σχεδίου και  $\psi$  ο αριθμός των τετραγώνων, γράφουμε τη συνάρτηση που περιγράφει τον αριθμό των τετραγώνων  $\psi$  ως προς τον αριθμό των σχεδίων  $\chi$ .

γ) το 34<sup>ο</sup> σχέδιο πόσα τετράγωνα έχει;

δ) Ποιο σχέδιο έχει 261 τετράγωνα;

### 2.25 Η θερμοκρασία ενός τόπου (από τις οδηγίες εξορθολογισμού της σχολικής ύλης 16-17)

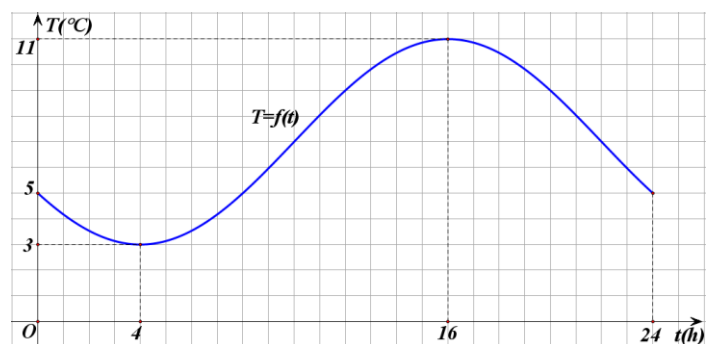
Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία  $T$  (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.

α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία;

β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6°C;

γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20, 9) της γραφικής παράστασης;

δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;



### 2.26 Αντίστροφη σχέση

Αν σε μία σχέση αντιστρέψουμε την εξαρτημένη με την ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε θα έχουμε την αντίστροφη αυτής της σχέσης. Για παράδειγμα η αντίστροφη της σχέσης  $(-1,2), (0,3), (4,-4), (5,7)$  είναι η  $(2,-1), (3,0), (-4,4), (7,5)$ .

Να γράψουμε μία σχέση (με όποιο τρόπο αναπαράστασης θέλουμε) που η αντίστροφή της να είναι συνάρτηση και μία που η αντίστροφή της να μην είναι συνάρτηση.

### 2.27 Ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης (από τις οδηγίες εξορθολογισμού της σχολικής ύλης 16-17)

α) Για τις συναρτήσεις:  $\psi_1=5+2x$ ,  $\psi_2=x^2$ ,  $\psi_3=2^x$  κατασκευάστε πίνακες τιμών για τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4 του  $x$ .

$x$	0	1	2	3	4
$\psi_1$					
$\psi_2$					
$\psi_3$					

β) Εξετάστε τον τρόπο που αυξάνεται το  $y_1$  όταν το  $x$  αυξάνεται κατά μια μονάδα (από το 0 στο 1, από το 1 στο 2, από το 2 στο 3 κ.ο.κ.). Κάνετε το ίδιο για το  $y_2$  και το  $y_3$ . Τι παρατηρείτε;

$x$	Από το 0 στο 1	Από το 1 στο 2	Από το 2 στο 3	Από το 3 στο 4
Διαφορά στην $\psi_1$				
Διαφορά στην $\psi_2$				
Διαφορά στην $\psi_3$				

γ) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων. Με ποιον τρόπο οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας (για τον ρυθμό αύξησης των  $\psi$ ) φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις;

